N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 2, Number 306 (2016), 133–138

EXACT SOLUTIONS OF EVOLUTION EQUATIONS IN RESTRICTED THREE-BODY PROBLEM WITH VARIABLE MASS

M.Dzh. Minglibayev[1, 3], A.N. Prokopenya[2], B.A. Beketauov[1]

[1]Al-Farabi Kazakh National University, 71, al-Farabi ave., Almaty, 050038 Kazakhstan;
[2]Warsaw University of Life Sciences SGGW, 159, Nowoursynowska str., 02-776 Warsaw, Poland;
[3]Fesenkov Astrophysical Institute, 23, Observatoriya, Almaty, 050020 Kazakhstan
E-mail: Beketauov_Baglan@mail.ru

Key words: restricted problem of three bodies, variable masses, secular perturbations, exact solutions, aperiodic quasi-conical motion, quasi-circular orbit.

Abstract. The satellite version of the restricted three-body problem formulated on the basis of classical Gylden-Meshcherskii problem is considered. Motion of the point P_2 of infinitesimal mass about the point P_0 is described in the first approximation in terms of the osculating elements of the aperiodic quasi-conical motion, and an influence of the point P_1 gravity on this motion is analyzed. Long-term evolution of the orbital elements is determined by the differential equations written in the Hill approximation and averaged over the mean anomalies of points P_1 and P_2.

As a result it was obtained curves describing the solutions of differential equations in the critical values. All relevant symbolic calculations and visualizations are done with the computer algebra system Mathematica.

ЖОК 521.1

МАССАЛАРЫ АЙНЫМАЛЫ ШЕКТЕЛГЕН ҮШ ДЕНЕ МӘСЕЛЕСІНІҢ ЭВОЛЮЦИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУІНІҢ НАҚТЫ ШЕШІМДЕРІ

М.Ж. Минглибаев [1,3], А.Н. Прокопеня [2], Б.А. Бекетауов [1]

[1] Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ. Алматы. Қазақстан
[2] Варшава Жаратылыстану Ғылымдар Университеті. Варшава. Польша
[3] В.Г. Фесенков атындағы Астрофизика институты. Алматы. Қазақстан

Түйін сөздер: шектелген үш дене мәселесі, айнымалы масса, ғасырлық ұйтқу, ерекше шешім, квазишеңбер орбита.

Аннотация. Жұмыста массалары әртүрлі қарқында айнымалы шектелген үш дене мәселесінің Хилл жуықтауында эволюциялық дифференциалдық теңдеулердің ерекше шешімдері табылды. Эволюциялық теңдеулерінің критикалық мәндерінде байланысты шешімдер саласын сипаттайтын қисық алынды.

Кіріспе. Массалары айнымалы шектелген үш дене мәселесіндегі P_2 нүктесінің эволюциялық ұйтқытушу элементтері P_0 және P_1 нүктелерінің орташа аномалиясы бойынша орташаланған Хилл жуықтауындағы дифференциалдық теңдеумен сипатталады [1,2].

Автономды – стационар теңдеулер жүйесін Гаусс сұлбесі бойынша орташалап белгілі интегралданатын жағдайға келтірілген. Осы интегралданатын жүйе Хилл жуықтауында қарапайым ықшам түрге келеді және толық зерттеуге болады.

Жұмыста қарастырылған есептеулер мен визуализациялар Mathematica программасында жүргізілді.

Ғасырлық ұйытқыған негізгі теңдеулері. Лагранждың ғасырлық ұйтқу теңдеулер жүйесінен мына $e^2 = z$ түрлендіруді қолданып, әрі қарай зерттеуге қажетті мына теңдеулерді жазамыз [1,2]:

$$\frac{dz}{dn} 20z\sqrt{1-z}\cdot\sin^2 i \sin 2\omega, \tag{1}$$

$$\frac{di}{dn} = -\frac{10z}{\sqrt{1-z}}\sin i \cos i \sin 2\omega, \tag{2}$$

$$\frac{d\omega}{dn} = \frac{2}{\sqrt{1-z}}\left[5\cos^2 i - 5 + 5z + 5\cos 2\omega\left(\sin^2 i - z\right) + 4(1-z)N\right], \tag{3}$$

мұндағы N – P_0 және P_1 денелерінің массасының уақыт бойынша өзгеруінен туындайтын қосымша параметр [2].

Сәйкесінше (1)-(3) теңдеулер жүйесінің бірінші интегралдар мына түрде болады

$$(1-z)\cos^2 i = c_1 = const, \tag{4}$$

$$z\left(\frac{2}{5}N - \sin^2\omega\sin^2 i\right) = c_2 = const. \tag{5}$$

Келтірілген (5) өрнегіндегі $N = 1$, жағдайы денелердің массалары тұрақты кезінде [1], [3] жұмыстарында қарастырылған, ал бұл жұмыстың ерекшелігі массалары айнымалы шектелген үшдене мәселесі деп қарастырамыз. Алынған (4)-(5) интегралдардың $N = 0$ және $N = \frac{5}{2}$ критикалық мәндерінде ерекше шешімдерді қарастырамыз [4].

(4) және (5) интегралдарды пайдаланып

$$\sin^2 i = \frac{1-z-c_1}{1-z},\ \sin^2\omega = \frac{(1-z)(2Nz-5c_2)}{5z(1-z-c_1)}, \tag{6}$$

(6) өрнектегі i мен ω ескеріп (1) теңдеуден $z(n)$-ге қатысты келесі дифференциалдық теңдеуді аламыз:

$$\frac{dz}{dn} = 8\,\mathrm{sgn}(\sin(2\omega_0))\sqrt{Q(z)}, \tag{7}$$

мұндағы $\mathrm{sgn}(x)$, бастапқы $(\omega_0 = \omega(t_0))$ уақыт мезетінде $\sin(2\omega_0)$ таңбасын анықтайды. Ал $Q(z)$ көпмүшелігі жалпы түрде келесідей болады

$$Q(z) = (2Nz - 5c_2)\left(5c_2 + z(5 - 2N - 5c_1 - 5c_2) - z^2(5 - 2N)\right), \tag{8}$$

Бізге P_2 нүктесінің квазиэллипстік қозғалысын қарастырғандықтан орбита эксцентриситеті 1-ден аспауы қажет. Сәйкесінше (4) өрнектегі интеграл тұрақтысы c_1 мына аралықта жатады $0 \le c_1 < 1$, бұдан мынаны аңғару қиын емес $0 \le z < 1 - c_1$. Осыны ескеріп (5) интегралдың және (7) дифференциалдық теңдеудің $N = \frac{5}{2}$ және $N = 0$ критикалық мәндеріндегі шешімдеріне талдау жүргіземіз. (5) интегралдағы c_2-тұрақтысының таңбасы N параметрінен қатаң түрде тәуелді болады, яғни $N = 0$ болғанда $-1 < c_2 \le 0$. Сәйкесінше $N = 5/2$ болса $0 \le c_2 < 1$ шарты орындалады. Сондықтан $N = 0$, $N = 5/2$ кезінде критикалық мәндері деп айтуға болады, өйткені бұл жағдайда интеграл тұрақтысы c_2-нің таңбасы оң және теріс бола алады [4].

$N = \frac{5}{2}$ **жағдайы**

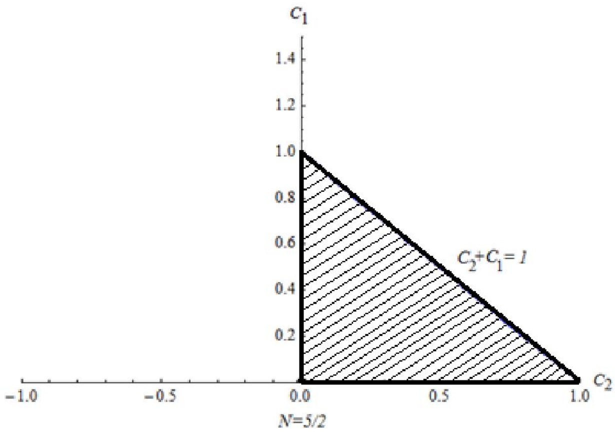
I) Бұл жағдайда (4)-(5) интегралдардан келесі өрнектерді аламыз

$$\cos^2 i = \frac{c_1}{1 - z} \text{ және } \sin^2 \omega = \frac{5(1 - z)(z - c_2)}{5z(1 - z - c_1)} \tag{9}$$

(9) өрнектен мына шарттарды аламыз $z \ge c_2$ және $0 \le z < 1 - c_1$. Осы алынған шарттарды (8) теңдеумен берілген көпмүшеліктен $c_2 - z(c_1 + c_2) \ge 0$ теңсіздігі шығады, бұдан c_1 және c_2-дің арасындағы байланысты табамыз:

$$0 \le c_2 \le z \le \frac{c_2}{c_1 + c_2},\; c_1 + c_2 = 1,\; 0 \le c_1 < 1. \tag{10}$$

(10) шарттардан c_1 мен c_2 тұрақтыларының арасындағы тәуелділіктері Oc_1c_2 жазықтығында $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_1 + c_2 = 1$ түзулерімен шектелген үшбұрышты береді (1-сурет):



1-сурет – $N = \frac{5}{2}$ критикалық мәніндегі c_1 және c_2 жазықтықтағы тәуелділік кескіні

Енді осы үшбұрыш қабырғаларындағы шешімдерді көрсетелік.

a) $c_1 + c_2 = 1$ түзуін алайық (1-сурет). $0 \le c_2 \le z \le \dfrac{c_2}{c_1 + c_2}$ екенін жоғарыда көрсеттік, бұдан $z = c_2 = const$ байқауға болады. Ол үшін (5) теңдеу $\sin^2\omega \sin^2 i = 0$ шартын қанағаттандыру қажет. Ол екі жағдайда болуы мүмкін $\sin^2\omega = 0$ немесе $\sin^2 i = 0$. Тексеріп көрейік, егер $\sin^2\omega = 0$ болсын делік, онда (1) және (2) теңдеулерді қанағаттандыратынын көреміз. Ал (3) теңдеуден келесі өрнекті аламыз:

$$\frac{d\omega}{dn} = 20\sqrt{1 - c_2}\,, \tag{11}$$

$\sin^2\omega = 0$ екенін ескерсек (11) теңдеудің оң жағы тұрақты болу қажет, ол тек $c_2 = 1$ болғанда болады. Біз квазиэллипстік қозғалысты қарастырғандықтан, орбита эксцентриситеті 1-ден аспау қажет, бұл жағдайта 1-ге тең болып қалды. Демек (5) теңдеудегі $\sin^2\omega = 0$ болу шарты бізге жарамайды, қайшылыққа әкеліп соқты, өйткені $z = c_2 = const$.

Олай болса $\sin^2 i = 0$ шартын қарастырайық. Бұл жағдайда да (1) және (2) теңдеулерді қанағаттандырады. Ал (3) теңдеуден

$$\omega(n) = -arctg\left(2a \cdot n - tg\omega_0\right), \tag{12}$$

өрнегін аламыз, яғни (3) теңдеуді де қанағаттандырады. Бұл жағдайда $0 \le c_2 \le z \le \dfrac{c_2}{c_1 + c_2}$ шарты бұзылмайды. Олай болса c_1 және c_2 интегралдар тұрақтыларының мүмкін болатын мәндеріндегі $c_1 + c_2 = 1$ түзуін аламыз.

Сонымен (1)-(3) теңдеулер жүйесінің шешімдері келесі түрде болады:

$$z = const\,, \tag{13}$$

$$i = const\,, \tag{14}$$

$$\omega(n) = -arctg\left(2a \cdot n - tg\omega_0\right). \tag{15}$$

b) $c_1 = 0$, $c_2 \in [0,1]$ түзуін қарастырайық, бұл жағдай $\cos^2 i = 0$ болғанда орындалады, демек $i = \dfrac{\pi}{2}$ (1-сурет). Онда (4) теңдеуден $c_1 = 0$ екенін аламыз. Ал (5) өрнектен $c_2 = z\left(1 - \sin^2\omega\right)$ теңдеуін аламыз, осы (5) теңдеуден $c_2 \le z \le 1$ шартын аламыз. Эволюциялық (1)-(3) теңдеулер шешімі қарапайым функциямен интегралданады [3,4].

c) Келесі жағдай $c_2 = 0$, $c_1 \in [0,1]$ түзуін көрсетелік (1-сурет). Ол үшін (5) теңдеуге талдау жасау қажет. $c_2 = 0$ болуы екі жағдайда орындалады:

1) қозғалыс траекториясы квазишеңбер орбита бойымен қозғалғанда, демек $z = 0$ болғанда. Эволюциялық ұйытқу (1)-(3) теңдеулер жүйесінің шешімі:

$$z = conts\,, \tag{19}$$

$$i = const\,, \tag{20}$$

$$\omega = \omega_0 + arctg\left(\frac{1}{c_1} \cdot tg\left(20\sqrt{c_1} \cdot n\right)\right) \tag{21}$$

2) $\sin^2 i \cdot \sin^2\omega = 1$ болуы $i = \dfrac{\pi}{2}$ және $\omega = \dfrac{\pi}{2}$ орындалады, бұл жағдайда (4)-(5) интегралдардан $c_2 = 0$, $c_1 = 0$ аламыз, ал (1)-(3) теңдеулер жүйесінің шешімдері келесідей болады:

$$z = conts\,, \tag{22}$$

$$i = const\,, \tag{23}$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{10z}{\sqrt{1-z}} n. \tag{24}$$

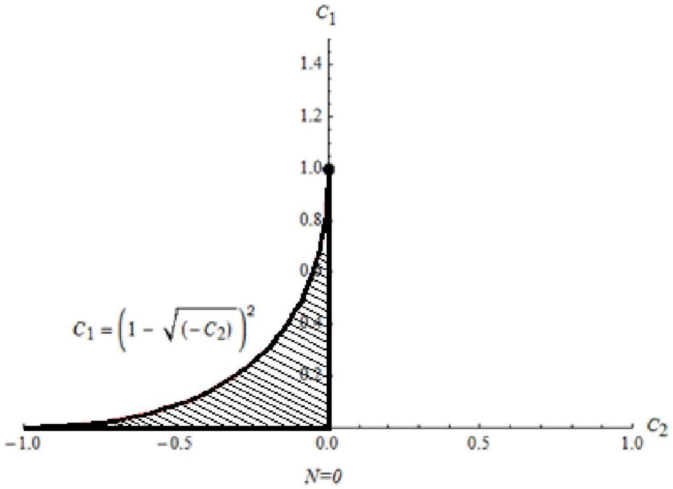
d) Жоғарыдағы көрсетілген жағдайлар Oc_1c_2 жазықтығындағы үшбұрыштың қабырғаларындағы шешімдерін сипаттайды, ал толығырақ қамту үшін сол Oc_1c_2 жазықтығындағы c_1 және c_2 интеграл тұрақтыларының мүмкін болатын мәндеріндегі алынған үшбұрыштың ішіндегі шешімін қарастырайық. Ол үшін $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$, $c_1 \leq 1 - \frac{5c_2}{2N}$ деп алсақ жеткілікті (1-сурет). Ал (1)-(3) теңдеулер жүйесі эллиптикалық квадратурада есептеледі [4].

$N = 0$ **жағдайы**

II) Егер $N = 0$ болса, онда $0 \leq z \leq 1 - c_1$, $0 \leq c_1 \leq 1$, $c_2 = -z\sin^2 i \sin^2 \omega \leq 0$ шарттарына сәйкес мына тәуелділікті аламыз:

$$c_1 \leq \left(1 - \sqrt{-c_2}\right)^2 \tag{25}$$

c_1 мен c_2 арасындағы тәуелділікті аламыз (2-сурет):



2-сурет – $N = 0$ критикалық мәніндегі c_1 және c_2 жазықтықтағы тәуелділік кескіні

c_1 және c_2 нақты мәндеріне сәйкес (1)-(4) – ғасырлық теңдеулер жүйесінен бірнеше ерекше шешімдер алынады.

a) Бұл жағдайда $c_1 = 0$ түзуін қарастырайық, ол $\cos^2 i = 0$ $\left(i = \frac{\pi}{2}\right)$ және квазишеңбер орбита бойымен қозғалғанда, яғни $z = 0$ болғанда орындалады, $\sin^2 i = 1$ $\left(i = \frac{\pi}{2}\right)$ болса, (6) өрнектен $-1 \leq c_2 \leq 0$ екеніне көз жеткізуге болады (2-сурет). Осы шарттарды ескеріп (1)-(3) теңдеулер жүйесін шешімдерін алу қиын емес.

b) $c_2 = 0$ түзуінен, $0 \leq c_1 \leq 1$, бұл жағдайды төмендегідей екі жағдайға бөліп қарастырамыз (2-сурет).

1) Егер $z \neq 0$ болса, онда (5) теңдеуден $\sin^2 \omega = 0$, $\cos^2 \omega = 1$ және (4) өрнектен $0 \leq c_1 \leq 1$ екені шығады, олай болса (5)-(6) интегралдан келесі өрнекті аламыз:

$$z = conts, \tag{29}$$

$$i = conts, \tag{30}$$

$$\omega = \omega_0 + arcctg\left(\frac{20(c_1 - 1)}{c_1} \cdot n\right). \tag{31}$$

2) Егер $z=0$ болса, онда $\sin^2\omega=0$, $\cos^2\omega=1$ және $\sin^2 i=1-c_1$, $0\le c_1\le 1$ шарттарын аламыз. Демек (5)-(6) интегралдан келесі өрнекті аламыз:

$$z=conts, \tag{32}$$

$$i=conts, \tag{33}$$

$$\omega=conts, \tag{34}$$

c) $c_1\le\left(1-\sqrt{-c_2}\right)^2$ қисығын алайық. (5) теңдеуден $z\left(-\sin^2\omega\sin^2 i\right)=c_2$ және (4) теңдеуден $\sin^2 i=\dfrac{1-z-c_1}{1-z}$ екенін ескерсек жеткілікті (2-сурет). Эволюциялық (1)-(3) теңдеулер шешімі қарапайым функциямен интегралданады [4].

Қорытынды. Жұмыста массалары айнымалы шектелген үш дене мәселесіндегі Лагранждың ғасырлық ұйытқыған қозғалыс теңдеулерінің шешімі массалары өзгеру заңдылығын анықтайтын параметр – $N=0$ және $N=5/2$ критикалық мәніндегі ерекше шешімдері табылып олардың анықталу облыстары алынған.

ӘДЕБИЕТ

[1] Вашковьяк М.А. Эволюция орбит в ограниченной круговой двукратно осредненной задаче трех тел // Качественное исследование – 1981. – Т.19, – № 1. – С. 5-18.

[2] Минглибаев М. Дж. Динамика нестационарных гравитирующих систем. —Алматы: изд. КазНУ, 2009. — 209 с.

[3] Вашковьяк М.А. О научной деятельности профессора М.Л. Лидова и о развитии его работ по эволюции спутниковых орбит(к 80-летию со дня рождения). Дополнение в кн.: М.Л. Лидов. Курс лекций по теоретической механике. – 2-е изд., –М.: ФизМатЛит, 2010. – 496с.

[4] Prokopenya A.N., *Minglibayev M., Beketauov B.* On Integrability of Evolutionary Equations in the Restricted Three-Body Problem with Variable Masses// Computer Algebra in Scientific Computing/CASC2014, *V.P. Gerdt, W.Koepf, W. Sieler, E.V. Vorozhtsov (Eds.)*, LNCS8660.–2014, pp.375-389.

REFERENCES

[1] M.A Vashkovyak. Evoliutsya orbit v ogranichennoi krugovoi dvuhkratno osrednennoi zadache treh tel//Kachestvennoe issledovanie– 1981. – T.19, – № 1. – pp. 5-18. (in Russ.).

[2] M. Dzh. Mynglybayev. Dinamika nestatsionarnih gravitiruiushih system – Almaty: izd. KazNU, 2009. — 209 p. (in Russ.).

[3] M.A Vashkovyak. O nauchnoi deyatelnosti professora M.L. Lidova i o razvitii ego rabot po evoliutsi sputnikovih orbit (k 80-letiu so dnya rozhdeniya). Dopolnenie v kn.: M.L. Lidov. Kurs lektsii po teoreticheskoi mechanike. – 2-e izd., –M.: FizMatLit, 2010. – 496p. (in Russ.).

[4] Prokopenya A.N., *Minglibayev M., Beketauov B.* On Integrability of Evolutionary Equations in the Restricted Three-Body Problem with Variable Masses// Computer Algebra in Scientific Computing/CASC2014, *V.P. Gerdt, W.Koepf, W. Sieler, E.V. Vorozhtsov (Eds.)*, LNCS8660.–2014, pp.375-389. *(in Russ.).*

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ С ПЕРЕМЕННЫМИ МАССАМИ

М.Ж. Минглибаев [1, 3], А.Н. Прокопеня [2], Б.А. Бекетауов [1]

[1]КазНУ им аль-Фараби. Алматы. Казахстан; [2]Варшавский Университет естественных наук. Варшава. Польша; [3]Астрофизический институт им В.Г. Фесенков, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: ограниченная задача трех тел, переменная масса, вековое возмущение, точные решения, квазиконические движение, квазикруговая орбита.

Резюме. Рассматривается спутниковая ограниченная задача трех тел с переменными массами, сформулированная на основе классической задачи Гюльдена-Мещерского. Движение точки бесконечно малой массы P_2, относительно точки P_0 описывается в первом приближении оскулирующих элементов апериодического квазиконического движения и учитывается влияние гравитации на точку этого движения. Долгопериодическая эволюция орбитальных элементов определяется дифференциальными уравнениями, записанных в приближении Хилла и осредняется средней аномалией точек P_1 и P_2. В результате б*ыли получены* кривые, описывающие область решений дифференциальных уравнений в критических значениях. Все символические вычисления и визуализация были получены с помощью системы компьютерной алгебры Mathematica.

Поступила 13.03.2016 г.