N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 2, Number 306 (2016), 147–152

UDC 517.956.32

CRITERIA VOLTERRA OF NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE WAVE EQUATION

M.B. Saprygina, A.Sh. Shaldanbayev, I.O. Orazov, U.S. Bayseytova

South Kazakhstan state university, Shymkent

Keywords:wave equation, not local regional task, voterrovy operator, formula Gaala, formula of a trace of the operator.
Abstract: In the work it is established criteria of a Volterra of the return operator of nonlocal boundary value problem of the wave equation, by means of Gaal's formula, and Nersesyan and Lidsky's theorems.

УДК 517.956.32

ТОЛҚЫН ТЕҢДЕУІНІҢ ШАРТАРАПТЫ ЕСЕБІНІҢ ВӨЛТЕРЛІ БОЛУЫНЫҢ ҮЗІЛДІ – КЕСІЛДІ ШАРТЫ

М.Б. Сапрыгина, А.Ш. Шалданбаев, И.О. Оразов, У.С. Байсейтова

ОҚМУ, Шымкент қ, Қазақстан

Түйін сөздер: толқын теңдеуі, шартарапты есеп, вөлтерлі оператор, әсіре үзіксіздік.
Аннотация. Бұл еңбекте Гаалдың формуласы мен Нерсесян, Лидскидің теоремалары арқылы, толқын теңдеуінің шартарапты есебіне сәйкес кері оператордың вөлтерлі болуының үзілді-кесілді шарты табылды.

1. Кіріспе. Гиперболалық теңдеулердің шекаралық есептері өте аз зерттелген, мұның, бір себебі, Ж. Адамардың [1] әйгілі пікірі болса керек, оның байқауынша гиперболалық теңдеулерге бастапқы есептер, ал эллипстік теңдеулерге шекаралық есептер жайлы қойылған. Бастапқы есептерлің волтерлігі белсененедені белгілі, сондықтан, мұндай есептердің спектрәлдік таралымы жоқ десек-те болады. Осы орайда Хәрковтің зерттеушісі М. С Лившицтің [2] еңбектерін атап өткенді жөн көрдік, сол сияқты М.С. Бродскиидің еңбектерін [3] айтып кетейік.

Олар, өз еңбектерінде, вөлтерлі оператордың үшбұрышты мөделін жасады. Бұл мөделдің кемшілігі қосымша мүшесінің болуында, сондықтан, бұл теория кең тарамады.

Вөлтерлі операторды индефинитті кеңістікте жіктеуге болатын Ә.Ш. Шалданбаевтың [4] еңбектерінен көруге болады.

Гурса есебі мен Коши есебі толқын теңдеуінің классикалық есептері қатарына жатады. Сол сыйақты Дарбудың есебі-де солардың қатарында. Бұл есептер қазіргі заман әдістері мен ұғымдары тұрғысынан Т.Ш. Калменовтың [5] кітабында сараланған, олардың вөлтерлі болатыны көрсетелген. Осы орайда, толқын теңдеуінің барлық жайлы есептері вөлтерлі екен деген ой туындайды, осыған жауап ретінде А.М. Нахушев [6] пен Т.Ш. Калменовтың [7], [8] еңбектері пайда болды. Сонымен бірге, Бияров Б.Н. мен Т.Ш. Калменовтың [9] еңбегін айта кетейік. Өзінің осы бағыттағы еңбектерін Т.Ш. Калменов [10] еңбегінде бір арнаға тоғыстыруға әрекет жасады. Сондай – ақ М.А. Садыбековтың [11], [12] екі еңбегі осы бағытқа арналған.

Десек-те, бұл саланы толық зерттеліп бітті деп айта алмаймыз. Айтпақшы, жоғарыдағы зерттеулердің барлығы характеристикалық үшбұрыш ішінде жүргізілген, мұның басты себебі, авторлардың араластекті теңдеулер теориясының мамандары болғанынан, басқа себеп жоқ. Толқын тең теңдеуінің біргейлік аймағы характеристикалық тіктөрт бұрыш екені белгілі, сондықтан, оның екінші жағы неге бос қалды деген заңды сұрақ туындайды. Міне, осы жайлар, біздің толқын теңдеуінің шартарапты (нелокольный) есебімен айнасуымызға түрткі болды, және бұған негіз-де жоқ емес еді [13]. Біздің түпкі мақсатымыз, шартарапты толқын операторының спектрәлдік таралымен алу, ал әзірше, оның вөлтерлі болуының үзілді кеселді шартын анықтаумен шектелмекпіз.

Бұл еңбекте толқындық теңдеудің шартарапты шекаралық есебінің операторы қай кезде волтерлі болатынын үзілді - кесілді анықталады.

Зерттеу барысында Brislawn C. [14], Лидскии В.Б [15] , және Нерсян А.Б. [16] еңбектері пайдаланылады.

Есептің қойылуы. $\Omega -$ дегеніміз XOY жазықтығында жатқан қабырғалары

AB: $y = 0, 0 \leq x \leq 1$; BC: $x = 1\,, 0 \leq y \leq 1$, CD: $y = 1, 0 \leq x \leq 1$;

DA: $x = 0\,, 0 \leq y \leq 1$, болатын тік төртбұрыш болсын делік . Осы тік төртбұрыш ішінде , мынадай ,

$$Lu = u_{xy} = f(x,y)\,, (x,y)\ \in \Omega \tag{1}$$

$$u|_{AB} = \alpha u_{CD}\,, u|_{AD} = \beta \cdot u\big|_{BC} \tag{2}$$

шартарапты есепті қарастырамыз, мұндағы,

α мен β бірден өзгеше кезкелген комплекс сандар, яғни

$$(1-\alpha)(1-\beta) \neq 0. \tag{3}$$

Жоғарыдағы, [13] еңбекте, мынадай, теорема дәләлденген

Теорема Егер (3) шарт орындалса, онда кез-келген $f(x,y) \in C(\overline{\Omega})$ үшін (1)+(2) есептің бірегейлі шешімі бар, және ол $C^2_{1.1}(\Omega)$ класына тиісті, сонымен бірге, ол , мына

$$\|u\|_1 \leq k\|f\|_0 \tag{4}$$

теңсіздікті қанағаттандырады, мұндағы $\|\cdot\|_1$ −Соболевтің нормасы, ал $\|\cdot\|_{0-}$ кәдімгі L_2 норма , ал К-дегеніміз $u(x,y)$ пен $f(x,y)$ -ке тәуелсіз тұрақты шама . Сондай –ақ

$$u(x,y) = L^{-1}f(x,y) = \int_0^1\int_0^1 K(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta\,,$$

мұндағы, (5)

$$K(x,y;\xi,\eta) = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\theta(x-\xi) + \frac{\beta}{1-\beta}\theta(y-\eta) + \theta(x-\xi)\theta(y-\eta),$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, \text{егер } x > 0 \\ 0, \text{егер ч} \leq 0 \end{cases} \tag{6}$$

Жоғарыдағы, [4] теңсіздіктен Реллихтың ([17]. с.183), немесе, Соболевтың ([18], 106б) теоремасы бойынша, (5) оператордың $L^2(\Omega)$ кеңістігінде әсіре үздіксіз (вполне непрерывный) екенін көреміз, ал мұндай операторлардың спектрі нөл мен онан өзгеше меншікті мәндерден тұратын белгілі, кейде олардың болмауы –да мүмкін, ондай сәтте, ол операторды вөлтерлі дейді. Бұл атау Италияның көрнекті математигі Вөлтерраның құрметіне қойылған.

Анықтама. Нөлден өзгеше меншікті мәндері жоқ, әсіре үздіксіз операторды вөлтерлі оператор деп атайды.

2.Есептің қойылуы. Мына,

$$u(x,y) = L^{-1}f(x,y) = \int_0^1\int_0^1 K(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta \qquad \text{мұндағы (5)}$$

$$K(x,y;\xi,\eta) = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\theta(x-\xi) + \frac{\beta}{1-\beta}\theta(y-\eta) + \theta(x-\xi)\theta(y-\eta),$$

$$\theta(x)=\begin{cases}1, \text{егер } x>0\\ 0, \text{егер } x\le 0\end{cases} \tag{6}$$

интегралдық оператор қай кезде $L^2(\Omega)$ кеңістігінде вөлтерлі болады?

3.Зерттеу әдістері.

Жоғарыдағы, (5), (6) формулаларын L^{-1} операторының Гильберт –Шмидт класына тиісті екенін байқаймыз, яғни, мына,

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 K(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)dxdyd\xi d\eta<\infty$$

шарт орындалады (163.170). Онда $L^{-2}=(L^{-1})^2$ операторы $L^2(\Omega)$ – кеңістігінде ядролық оператор, сондықтан, оған В.В Лидскийдің [15] теоремасын қолдануға болады.

Теорема [15]. Егер А операторы Гильберттің А кеңістігінде ядролы болса, онда осы кеңістіктің кезкелген $\varphi_{i\ (i=1,2,\dots)}$ ортанормаланған базисы үшін, мына,

$$S_pA=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{\varphi_n,}\varphi_n\right)_H=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(A),$$

теңдік орындалады,мұндағы $\lambda_n(A)-$ дегеніміз А операторының меншікті мәндері, егер олар жоқ болса яғни А- вөлтерлі болса, онда

$$SpA=0.$$

Сондай-ақ, егер А ядролы операторы, Гильберт –Шмидт класының, мынадай,

$$(Kf)(x)=\int_\Omega K(x,y)\,f(y)dy,$$
$$(Gf)(x)=\int_\Omega G(x,y)\,f(y)dy,$$

екі операторының композициясы болса, яғни $A=K\cdot G$ онда оның ізі Гаалдың [14] формуласы арқылы табылатыны белгілі.

Біздің жағдайда

$$K(x,y;\xi,\eta)=\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}+\frac{\alpha}{1-\alpha}\theta(x-\xi)+\frac{\beta}{1-\beta}\theta(y-\eta)+\theta(x-\xi)\theta(y-\eta),$$

Демек

$$K(x,y;\xi^*,\eta^*)=\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}+\frac{\alpha}{1-\alpha}\theta(x-\xi^*)+\frac{\beta}{1-\beta}\theta(y-\eta^*)+\theta(x-\xi^*)\theta(y-\eta^*),$$

$$K(\xi^*,\eta^*;x,y)=\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}+\frac{\alpha}{1-\alpha}\theta(\xi^*-x)+\frac{\beta}{1-\beta}\theta(\eta^*-y)+\theta(\xi^*-x)(\eta^*-y)$$

$$K(x,y;\xi^*,\eta^*)-K(\xi^*,\eta^*;x,y)$$
$$=\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}\left[\!\!\left[\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}+\frac{\alpha}{1-\alpha}\theta(\chi-\xi^*)+\frac{\beta}{1-\beta}\theta(y-\eta^*)+\theta(\chi-\xi^*)-\theta(y-\eta^*)\right.\right.$$
$$+\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2-\frac{\beta}{1-\beta}\,\theta(\xi^*-x)$$
$$+\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}\theta\,(y-\eta^*)\theta(\xi^*-x)\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)^2\theta(\eta^*-y)+\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}\theta(\chi-\xi^*)\theta(\eta^*-y)$$
$$\left.\left.+\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}\theta(\xi^*-x)\theta(\eta^*-y)\right]\!\!\right]$$

$$= \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}\left[\!\left[\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\theta(\chi-\xi^*) + \frac{\beta}{1-\beta}\theta(y-\eta^*) + \theta(\chi-\xi^*)\cdot\theta(y-\eta^*)\right]\!\right]$$
$$= \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}\left[\!\left[\frac{\alpha}{1-\alpha}\theta(\xi^*-x) + \frac{\beta}{1-\beta}\theta\,(\eta^*-y) + \theta(x-\xi^*)\cdot\theta\,(\eta^*-y)\right.\right.$$
$$\left.\left. + \theta(\xi^*-x)\cdot\theta\,(\eta^*-y) = \right]\!\right]$$
$$= \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}\left[\!\left[\begin{array}{c}\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} + \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{\beta}{1-\beta} + \theta(\chi-\xi^*) + \theta(\xi^*-x)\\ +\theta(\xi^*-x)\end{array}\right]\!\right] =$$
$$= \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}\left[\!\left[\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} + \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{\beta}{1-\beta} + 1\right]\!\right]$$
$$= \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}+1\right)\left(\frac{\beta}{1-\beta}+1\right) = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)^2(1-\beta)^2}$$

$K^2(x\,,y;\;\xi\,,\eta)$ – арқылы, мына, L^{-2} - оператордың ядросын белгілесек, онда

$$K^2(x\,,y;\;\xi\,,\eta) = \int_0^1\int_0^1 K(x,y,\xi^*\eta^*)\cdot K(\xi^*,\eta^*,x,y)\,d\xi^* d\eta^* = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)^2(1-\beta)^2},$$

боларын көреміз.

Егер L^{-1} операторы вөлтерлі болса, онда L^{-2} операторы-да вөлтерлі, онда Лидскийдің [15] теоремасы бойынша ,

$$trL^{-2} = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)^2(1-\beta)^2} = 0,$$

яғни $\alpha\cdot\beta = 0$.

Керісінше, $\alpha\beta = 0$,болсын деп жорылық, онда $\alpha = 0\,,\beta = 0$ болған сәтте, Гурсаның вөлтерлі есебін аламыз, ал $\alpha = 0\,,\beta \neq 0$; $\alpha \neq 0\,,\beta = 0$ болған сәттерде, L^{-1} операторының вөлтерлі екеніне Нерсесянның [16] немесе ([7] , с. 73) , теоремасы арқылы көз жеткіземіз.

4.Зерттеу нәтиежесі.

Теорема . Егер

$$(1-\alpha)(1-\beta) \neq 0$$

болса, онда мына,

$$Lu = u_{xy} = f(x,y)\,,(x,y)\;\in\Omega\,;$$
$$u|_{AB} = \alpha u_{CD}\,,\,u|_{AD} = \beta\cdot u\big|_{BC}$$

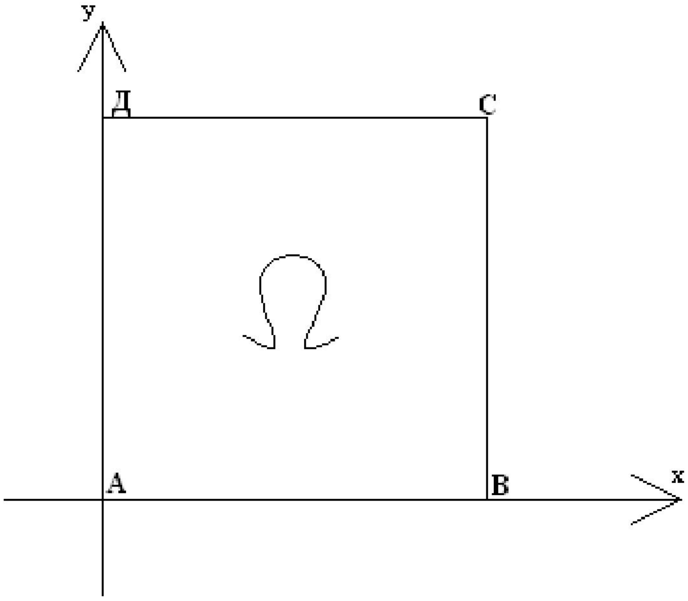
шекаралық есептің вөлтерлі болуы үшін, мына,

$$\alpha\cdot\beta = 0$$

шарттың орындалуы қажетті, әрі, жеткілікті.

5.Талқысы.

Толқын теңдеуінің шекаралық есептерін функционалдық әдістермен зерттеген кезде, оларға сәйкес кері операторлардың әсіре үзіксіз боларын Реллихтың теоремасы бойынша әпсәтте дәлелдеуге болады.Осы сәтте спектр туралы мәселе туындайды,сондықтан вөлерлілік белгісі аса маңызды болып саналады.



ӘДЕБИЕТ

[1] Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений частными производными . – М., Наука, 1978. -352 с.

[2] Ливщиц М.С. О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов . Матем. сб. 34(76): 1(1954). 145-199.

[3] Бродский М.С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М., Наука, 1909г.

[4] Шалданбаев А.Ш. Спектральные разложения корректных- некорректных начально краевых задач для некоторых классов дифференциальных уравнений. – монография, 193 с., LAP LAMRET Acfdemic Pyblishing. http; dob. d-nb. Dl. Emailinfa@lappyblishing com, Saarbruchen 2011.Germanu.

[5] Кальменов Т.Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в часных производных гиперболического типа. Шымкент: Гылым, 1993, 327 с.

[6] Нахушев А.М. Об одном классе линейных уравненых задач для гиперболического и смешного типов уравнении второго порядка. Нальчих, Эльбурс. 1992, 155с.

[7] Кальменов Т.Ш. О спектре одной самосопреженной задачи для волнового уравнения. Весник А.Н Каз. 1982. №2, с.63-66.

[8] Кальменов Т.Ш. Спектр краевых задачи со смещеннем для волнового уравнения , Диффенц. уравнения .1983, т19. №1. с.75-78.

[9] Бияров Б.Н., Кальменов Т.Ш. О нелокальной вольнерровой задаче для гиперболического уравнения. Известия АН Каз ССР, сер. физ-математ. 1988. №5. с.13-16.

[10] Кальменов Т.Ш. О регулярных краевых задачах для волнового уравнения, Диффенц. уравнения. 1981. т 17. №6. с.1105-1121.

[11] Садыбеков М.И, О задаче Дирихле для для волнового уравнения, Диффенц. уравнения . Функцион. анализ и по приложения Алма -Ата Каз. ГУ, 1988. т. 17. №6, с. 61-70.

[12] Садыбеков М.И, Кальменов Т.Ш. О задаче Дирихле и нелокольных краевых задачах для волнового уравнения, Диффенц. уравнения, 1990, т.26, №1, с. 60-65.

[13] Мелдебекова С., Шалданбаев А.Ш. О реулярной разрешимости одной нелокальной краевой задачи волнового уравнения, Наука и образования ЮК, 2005 №6(46), с. 105-109.

[14] Brislown C. Kernels of trace class operators, Proc . Amer. Nath. Soc, 1988, v.104 , №4, P.1181-1190.

15. Лидский В.Б. Несамосопреженные операторы имеющии след . Доклады АН ССР, 1959 , т. 105, №3. Р.485-488.

16. Нерсесян А.Б. К теории интегральных уравнений типа Вольтера. Доклады АН ССР. 1964. т. 155, №5. Р.1049-1051.

17. Мизохата С. Теория уравнений с частным производными, М. Мир, 1977, с. 504.

18. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, М., Наука, 1988.

REFERENCES

[1] Hadamard Ge. Cauchy problem for the linear equations private to derivatives. - M, Science, 1978, - 352p.

[2] Livshits M. S. About spectral decomposition of linear not self-conjugate operators. Matem. сб. 34(76): 1(1954). 145-199

[3] Brodsky of M. S. Triangle and Jordan representation of linear operators, M, Nauka1909g.

[4] Shaldanbaev A.Sh. Spectral Decomposition of correct-incorrect initial boundary value problems for some classes of differential equations, Germanu, Saarbruchen: LAP LAMRET Acfdemic Pyblishing. http; dob. d-nb. Dl. Emailinfa @ lappyblishing com, 2011 193p.
[5] Kalmenov T.Sh. Regional tasks for the linear equations in private derivatives of hyperbolic type, Shymkent, Gylym, 1993,327s.
[6] Nakhushev A.M. About one class of the linear balanced tasks for hyperbolic and ridiculous types the equation of the second order. Nalchikh, Эльбурс.1992, 155s.
[7] Kalmenov T.Sh. About a range of one interfaced task for the wave equation, Vesnik A.N Kaz.1982, No. 2, page 63-66.
[8] Kalmenov T.Sh. The spectrum of the boundary value problem with shift for the wave equation, Diffents. .1983 equation, V.19, №1, p.75-78.
[9] Biyarov B. N., Kalmenov T.Sh. About nonlocal boundary value problem for the hyperbolic equation, AN News Kaz SSR, is gray. physical-matemat, 1988, No. 5, page 13-16.
[11] Kalmenov T.Sh. About regular boundary value problem for the wave equation, Diffents. equations.1981, t 17, No. 6, page 1105-1121.
[12] Sadybekov M. About Dirichlet's task for for the wave equation, Diffents. equations. Funktsion. the analysis and on appendices Alma-Ata Kaz. GU, 1988, V 17, No. 6, page 61-70.
[13] Sadybekov M., Kalmenov T.Sh. About Dirichlet's task and the nonlocal boundary value problem for the wave equation, Diffents. equations, 1990, t.26, No. 1, page 60-65.
[14] Meldebekova S., Shaldanbayev A.Sh. About regular resolvability of one nonlocal boundary value problem of the wave equation, Science and formations of YuK, 2005 No. 6(46), page 105-109.
[15] Brislown C. Kernels of trace class operators, Proc. Amer 7 Nath. Soc, 1988, v.104, No. 4, P.1181-1190.
[16] Lidsky V.B. Nonselfadjoint operators have trail Reports of the USSR, 1959, Vol. 105, №3, P.485-488.
[17] Nersesyan A.B. To the theory of the integrated equations like Voltaire, Reports of A.N Soviet Socialist Republic, 1964, t. 155, No. 5, P.1049-1051.
[18] Mizokhata S. The theory of the equations with private derivatives, M. Mir, 1977, page 504.
[19] Sobolev S. L. Some applications of the functional analysis in mathematical physics, M, Science, 1988.

КРИТЕРИИ ВОЛЬТЕРРОВОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

М.Б. Сапрыгина, А.Ш. Шалданбаев, И.О. Оразов, У.С. Байсейтова

Южно-Казахстанский государственный университет им.М.Ауезова, г.Шымкент

Ключевые слова: волновое уравнение, нелокальная краевая задача, вольтерровый оператор, формула Гаала, формула следа оператора.

Аннотация. В настоящей работе установлен критерии вольтерровости обратного оператора нелокальной краевой задачи волнового уравнения с помощью формулы Гаала и теорем Нерсесяна и Лидского.

Поступила 13.03.2016 г.