N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 2, Number 306 (2016), 180–190

UDC 517.929

ABOUT THE CONTINUOUS RANGE OF THE OPERATOR OF THE SEMI-FIXED REGIONAL TASK FOR THE HEAT CONDUCTIVITY EQUATION WITH THE DEVIATING ARGUMENT

M. T. Shomanbayeva, A.Sh.Shaldanbayev, S.T.Achmetova

YuKGU of M. Auyezov, Shymkent

Keywords: the deviating arguments, a continuous range, a singular range, absolutely continuous range, spectral decomposition, function of the Cantor.

Abstract. In this work the spectral theory of the operator corresponding to the semi-fixed regional task for the heat conductivity equation with the deviating argument is constructed, own functions are found, their completeness and a bazisnost is shown, spectral decomposition is received, the structure of a range is in details investigated, in particular, absence absolutely continuous components and presence singular function components of the Cantor predicted earlier by N. Winer is proved.

УДК 517.929

О НЕПРЕРЫВНОМ СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА ПОЛУЗАКРЕПЛЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

М.Т.Шоманбаева, А.Ш.Шалданбаев, С.Т.Ахметова

ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент

Ключевые слова: отклоняющиеся аргумент, непрерывный спектр,сингулярный спектр,абсолютно непрерывный спектр,спектральное разложение, функция Кантора.

Аннотация. В данной работе построена спектральная теория оператора соответствующего полузакрепленной краевой задаче для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом,найдены собственные функции,показана их полнота и базисность,получено спектральное разложение,детально исследован состав спектра,в частности, доказано отсутствие абсолютно непрерывной компоненты и присутствие сингулярной компоненты типа функции Кантора,предсказанного ранее Н.Винером.

1.Введение.

Спектральную теорию линейных операторов можно считать, завершенной,поскольку, для таких операторов получено спектральное разложение ,следующего вида

$$A=\int \lambda dE(\lambda),$$

где $dE(\lambda)$ −так называемая спектральная функция,которая разлагается на сумму трех функции

$$dE(\lambda) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)\,, (*)$$

где f_1 - скачкообразная функция, f_2 абсолютно непрерывна, а f_3 сингулярно непрерывна. Функция f_2 равна интегралу Лебега от своей производной, а производная f_3 равна нулю почти для всех t (функция Кантора является функцией типа f_3). В интервалах, где f_1 и f_3 - константы, f является абсолютно непрерывной. Пусть теперь $\{E_t\}$ - разложение единицы для самосопряженного оператора A. Для любого v в гильбертовом пространстве $(v, E_t v)$ является неубывающей функцией t, а значит, для нее возможна декомпозиция (*). Скачки f_1 происходят в собственных значениях оператора A. Спектр A называется абсолютно непрерывным в интервале I, если $(v, E_t v)$ - абсолютно непрерывная функция в I для каждого v в гильбертовом пространстве; в противном случае спектр будет кусочным.

Кажется разумным предположение, что спектры гамильтониана атомов и молекул, исключая собственные значения, всегда абсолютно непрерывны, иначе говоря, декомпозиция произведения $(v, E_t v)$ всегда состоит из первых двух членов (*). Однако, это не доказано, кроме некоторых случаев, подобных атому водорода, для которых известно явное выражение для E_t.

Хотелось бы иметь возможность сказать, что для атома нет никаких собственных значений в непрерывном спектре, т.е. выше уровня ионизации. Для некоторых атомов не существует истинных собственных значений полного гамильтониана для энергии λ выше уровня ионизации. Всегда ли это верно – вопрос открытый .

Точечным спектром $P\sigma(A)$ называют множество собственных значений оператора A, т.е.

$P\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: Au = \lambda u$ для некоторого ненулевого $u \in$ H }.

Непрерывным спектром $C\sigma(A)$ оператора A называется множество

$C\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: A - \lambda I$ имеет неограниченный обратный оператор с плотной в H областью определения}, а остаточным спектром Rσ(A) – множество

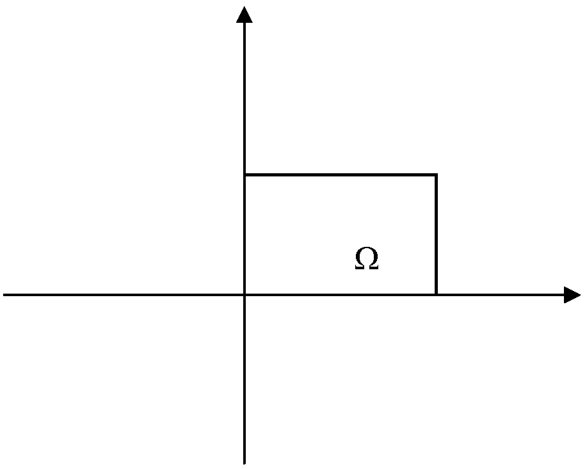
$R\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: A - \lambda I$ - имеет обратный (ограниченный или неограниченный) оператор, область определения которого не плотна в H }.

Для большинства представляющих интерес операторов (включая все самосопряженные, унитарные и вообще нормальные) остаточный спектр пуст, и поэтому непрерывный спектр можно представить себе состоящим из таких λ, для которых можно построить с наперед заданной точностью приближенный собственный вектор, не являющийся, однако, точным собственным вектором.[1.с.174-175].

К теме настоящей работы посвящены много численные иследования отечественных и зарубежных ученных,подробные сведения о которых можно найти в монографиях [2-9].

В данной работе,мы покажем,что абсолютный спектр отсутствует,поэтому спектр состоит из собственных значений и сингулярной компоненты,вроде функции Кантора.

Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2$ – прямоугольник ограниченный отрезками: AB: $0 \le t \le T$, $x = 0$; BC: $0 \le x \le l$, $t = T$; CD: $0 \le t \le T$, $x = l$; DA: $0 \le x \le l$, $y = 0$; /см. Рис. 1/.



Через $C^{1,2}(\Omega)$ – обозначим множество функции $u(x,t)$ единожды непрерывно дифференцируемых по t и дважды непрерывно дифференцируемых по x в области Ω. Под границей области понимаем совокупность отрезков $\Gamma = AB \cup AD \cup CD$.

Полузакрепленная задача. Найти решения уравнения

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t) = f(x,t) \tag{1}$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$u\big|_{t=0} = u\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=l} = 0; \tag{2}$$

Определение 1.1. Регулярным решением задачи (1)+(2) будем понимать функцию $u(x,t) \in C^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, обращающую в тождество уравнения (1) и краевые условия (2).

Определение 1.2. Функция $u \in L^2(\Omega)$ называют сильным решением задачи, если существует последовательность функции $\{u_n\} \in C^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ и удовлетворяющая краевым условиям задачи такая, что $\{u_n\}$ и $\{Lu_n\}$ сходятся в $L^2(\Omega)$ соответственно к u и f.

Определение 1.3. Краевая задача (1)+(2) называется сильно разрешимой, если сильное решение задачи существует для любой правой части $f(x,t) \in L^2(\Omega)$ и единственно.

Определение 1.4.Точечным спектром $P\sigma(A)$ называют множество собственных значений оператора A, т.е.

$P\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: Au = \lambda u$ для некоторого ненулевого $u \in$ H $\}$.

Непрерывным спектром $C\sigma(A)$ оператора A называется множество

$C\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: A - \lambda I$ имеет неограниченный обратный оператор с плотной в H областью определения$\}$, а остаточным спектром Rσ(A) – множество

$R\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: A - \lambda I$ - имеет обратный (ограниченный или неограниченный) оператор, область определения которого не плотна в H $\}$.

Целью данной работы является, исследование спектральных свойств линейного оператора соответствующего краевой задаче (1)+(2),изучение структуры спектра этого оператора,и с помощью спектрального разложения показать сильную разрешимость краевой задачи (1)+(2) в пространстве $L^2(\Omega)$.

2.Методы исследований.

Краевая задача (1)+(2), не относится к числу классических краевых задач математической физики, поэтому широко известные методы не применимы.

Для решения поставленной задачи применяем методы теории линейных операторов [2,3]и анализ Фурье [10-12],при исследовании непрерывного спектра была существенно использованы результаты одной работы Вейля об равномерном распределении [13].Следуеть отметить,что теорию возмущения непрерывного спектра линейных операторов посвящены многочисленные работы []

3.Результаты исследований.

Теорема 3.1.

(a) Если $\dfrac{T\pi}{2l^2}$ – иррациональное число, то спектр оператора

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t),$$

$$u\big|_{t=0} = u\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=l} = 0$$

совпадает с числовой осью $(-\infty, +\infty)$. Спектр состоит из бесконечного числа собственных значений отличных от нуля и из предельных точек собственных значений. Оператор $\overline{L}$ – самосопряжен и обратим, но $\overline{L}^{-1}$ – неограничен.

(б) Если $\frac{T\pi}{2l^2}$ – рациональное число и $\frac{1}{4} \notin \left(\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 \frac{T\pi}{2l^2}\right)$, $m = 0,1,2,\ldots$, то оператор $\overline{L}$ – самосопряжен и ограниченно обратим. Спектр оператора $\overline{L}$ состоит из бесконечного множества собственных значений и их предельных точек, которые также бесконечны и не имеет предельных точек, точнее на каждом ограниченном сегменте содержится лишь конечное число предельных точек множества собственных значений $\{\lambda_{mn}\}$, $m,n = 0,1,2,\ldots$ Оператор $\overline{L}^{-1}$ – ограничен, но не компактен.

(в) Если $\frac{T\pi}{2l^2}$ – рациональное число и $\frac{1}{4} \in \overline{\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 \frac{T\pi}{2l^2}\right)}$, $m = 0,1,2,\ldots$, то обратный оператор $\overline{L}^{-1}$ не существует, $\lambda = 0$ является собственным значением (возможно бесконечнократным). Спектр состоит из бесконечного множества собственных значений и их предельных точек, которые также бесконечны и разбросаны от $-\infty$ до $+\infty$. Каждый ограниченный замкнутый сегмент содержит лишь конечное число предельных точек собственных значений $\{\lambda_{mn}\}$, $m,n = 0,1,2,\ldots$.

Предельный спектр состоит из бесконечнократных собственных значений.

Теорема 3.2. Для существования и единственности сильного решения краевой задачи

$$Lu = u_t(x,T-t) + u_{xx}(x,t) = f(x,t),$$

$$u\big|_{t=0} = u\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=l} = 0$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$\frac{\pi T}{l^2} \neq \frac{2n+\frac{1}{2}}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2},\ m,n = 0,1,2,\ldots$$

При выполнений этого условия сильное решение задачи существует и имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f,u_{mn})}{\lambda_{mn}} \cdot u_{mn}(x,t)$$

для всех $f(x,t) \in L^2(\Omega)$ удовлетворяющих условию

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{(f,u_{mn})}{\lambda_{mn}}\right|^2 \prec +\infty,$$

где

$$\lambda_{mn} = (-1)^n \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T} - \left(m+\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2},\ m,n = 0,1,2,\ldots;$$

$$u_{mn}(x,t) = \frac{2}{\sqrt{Tl}} \sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l} \cdot \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{T},\ m,n = 0,1,2,\ldots$$

4. Обсуждение результатов исследований.

Лемма 4.1.

(a) Оператор L соответствующии,краевой задаче (1)+(2) симметричный.

(b) Спектральная задача

$$\dot{v}(T-t) = \mu \cdot v(t),$$

$$v(0)=0;$$

имеет бесконечное множество собственных значений:

$$\mu_n=(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{T},\ n=0,1,2,...$$

и соответствующих им собственных функций

$$v_n(t)=\sqrt{\frac{2}{T}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{T},\ n=0,1,2,...$$

которые образуют ортонормированный базис пространства $L^2(0,T)$.

(c) Полузакрепленная спектральная задача

$$-w''(x)=\nu^2 w(x),$$
$$w(0)=w'(l)=0$$

имеет бесконечное множество собственных значений:

$$\nu_m=\left(m+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{l},\ m=0,1,2,...$$

и соответствующих им собственных функций

$$w_m(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l},\ m=0,1,2,...$$

которые образуют ортонормированный базис пространства $L^2(0,l)$.

(d) Если система функций $\{\varphi_m(x)\}, m=1,2,...$ образует ортонормированный базис пространства $L^2(0,l)$, а система функций $\{\psi_n(t)\}, n=1,2,...$ образует ортонормированный базис пространства $L^2(0,T)$, то система функций $u_{mn}(x,t)=\varphi_m(x)\cdot\psi_n(t), m,n=1,2,...$ образует ортонормированный базис пространства $L^2(\Omega)$, где $\Omega=[0,l]\times[0,T]$.

Из полученных выше формул следует, что собственными функциями спектральной задачи (4)+(5) являются функций

$$u_{mn}(x,t)=\frac{2}{\sqrt{Tl}}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{T},\ m,n=0,1,2,...$$

которые в силу леммы 4.4 образуют ортонормированный базис пространства $L^2(\Omega)$, $\Omega=[0,l]\times[0,T]$.

Теорема 4.1. Спектральная задача

$$u_t(x,T-t)+u_{xx}(x,t)=\lambda u(x,t) \tag{3}$$

$$u\big|_{t=0}=u\big|_{x=0}=u_x\big|_{x=l}=0 \tag{4}$$

имеет бесконечное множество собственных значений

$\lambda_{mn}=\mu_n-\nu_m^2=(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T}-\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{l^2},\quad m,n=0,1,2,...$ и соответствующих им собственных функций:

$$y_{mn}(x,t)=\frac{2}{\sqrt{Tl}}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{T},\ m,n=0,1,2,...$$

которые образуют ортонормированный базис пространства $L^2(\Omega)$, где $\Omega=[0,l]\times[0,T]$.

Лемма 4.2. Если симметрический оператор A имеет полную систему собственных векторов, то замыкание этого оператора $\overline{A}$ самосопряжен в H, иначе говоря, оператор A самосопряжен в существенном.

Теорема 4.2.

(a) Оператор

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t),$$
$$u\big|_{t=0} = u\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=l} = 0$$

самосопряжен в существенном, в пространстве $H = L^2(\Omega)$, где $\Omega = [0,l]\times[0,T]$ прямоугольник ,лежащий на верхней полуплоскости $(x,t)\in R^2$;

(b) Если

$$\frac{\pi T}{l^2} \neq \frac{2n+\frac{1}{2}}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2},\ m,n = 0,1,2,...$$

то существует обратный оператор $\overline{L}^{-1}$, который также самосопряжен.

Доказательство теоремы 3.1.

Пусть на вещественной прямой отличено бесконечное число точек

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...;$$

мы покручиваем прямую на некоторую окружность длины 1 и ставим вопрос о том, будут ли при этом находящиеся на отмеченных местах точки α_n покрывать окружность с равномерной плотностью. Так будет в том случае, когда число n_α тех из первых n отмеченных точек $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, которые при накручивании попадают на дугу α, асимптотически задается в виде $|\alpha| n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\alpha}{n} = |\alpha|;$$

при этом $|\alpha|$ означает длину дуги α. О равномерной плотности распределения отмеченных точек на окружности мы будем говорить в том и только в том случае, когда это предельное равенство будет выполняться для каждой дуги α. Накручивание прямой на окружность означает, что вещественные числа рассматриваются по модулю 1, т.е. что два числа считаются равными в том случае, когда они отличаются на некоторые целое число. Среди чисел x, которые сравнимы по модулю 1 с некоторым заданным числом α имеется одно и только одно такое для которого выполняется неравенство $0 \le x \le 1$; это число сравнимое с α по модулю 1, будет обозначаться (α).

Первая теорема Вейля. Если ξ – некоторое иррациональное число, то последовательность точек

$$1\cdot\xi,\ 4\cdot\xi,\ 9\cdot\xi,\ 16\cdot\xi,\ 25\cdot\xi, ...$$

при накручивании числовой прямой на окружность длины 1 покрывает ее всюду равномерно плотно. То же самое будет выполняться, если квадраты чисел заменить на их кубы или четвертые степени и.т.д.

В связи с этой теоремой Вейля возникает вопрос: "А не уплотняются ли собственные значения нашего оператора с ростом индексов m,n".

Найденные нами собственные значения имеют вид

$$\lambda_{mn} = (-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T} - \left(m+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{l^2},\ m,n = 0,1,2,...$$

Нас особо интересует окрестность нулевой точки, если она окажется предельной точкой для множества собственных значений, то обратной оператор $\overline{L}^{-1}$ окажется неограниченным.

Если, $n = 2k+1, k = 0,1,2,...$ т.е. является нечетным числом, то

$$\lambda_{m,2k+1} = -\left(2k+\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{T} - \left(m+\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2},\ k,m = 0,1,2,...$$

Поэтому $\left|\lambda_{m,2k+1}\right| \ge \frac{3\pi}{2T},\ k,m = 0,1,2,...$

Если $n = 2k$, $k,m = 0,1,2,...$ т.е. является четным числом, то

$$\lambda_{m,2k} = \left(2k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T} - \left(m+\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2},\ k,m = 0,1,2,...$$

Тогда $\left|\lambda_{m,2k}\right| = \frac{\pi}{T}\left|2k+\frac{1}{2}-\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\frac{T\pi}{l^2}\right| = \frac{2\pi}{T}\left|k+\frac{1}{4}-\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\frac{T\pi}{2l^2}\right|$.

Пусть $[x]$ – означает целую часть числа x, тогда имеет место неравенство

$$\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\frac{T\pi}{2l^2}\right] \le \left(m+\frac{1}{2}\right)^2\frac{T\pi}{2l^2} \le \left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\frac{T\pi}{2l^2}\right]+1.$$

Полагая, $k = \left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\frac{T\pi}{2l^2}\right]$ имеем

$$\left|\lambda_{m,2k}\right| = \frac{2\pi}{T}\left\|\frac{1}{4}-\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\frac{T\pi}{2l^2}\right)\right\|,$$

где (x) – означает дробную часть числа x. Имеет место следующая теорема (вторая теорема Вейля).

Вторая теорема Вейля. Если $\varphi(z)$ – некоторый многочлен со свободным членом α_0 и у $\varphi(z)-\alpha_0$ не все коэффициенты рациональны, то последовательность чисел

$$\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3)...$$

распределена всюду равномерно плотно.

Если $\frac{T\pi}{2l^2}$ иррациональное число в силу теоремы Вейля числа $\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\frac{T\pi}{2l^2}\right)$ всюду плотны в отрезке $[0,1]$, а это означает, что существует подпоследовательность последовательности $\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\frac{T\pi}{2l^2}\right)$, $m = 0,1,2,...$ которая сходится к $\frac{1}{4}$, т.е. $\{\lambda_{m,2k}\} \to 0$. Следовательно, обратный оператор $\overline{L}^{-1}$ неограничен в пространстве $L^2(\Omega)$. Более того замыкание множества $\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\frac{T\pi}{2l^2}\right)$, $m = 0,1,2,...$ совпадает с отрезком $[0,1]$. Таким образом, оператор $\overline{L}$ обладает непрерывным спектром который содержит отрезок $\left[-\frac{3\pi}{2T}, \frac{\pi}{2T}\right]$.

Полагая, $k = \left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\frac{T\pi}{2l^2}\right]+1$ имеем

$$\lambda_{m,2k} = \frac{2\pi}{T}\left[\frac{1}{4}+1-\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\frac{T\pi}{2l^2}\right)\right] \succ \frac{\pi}{2T},\ m = 0,1,2,...$$

Замыкание этого множества $\{\lambda_{m,2k}\}$, $m = 0,1,2,...$; $k = \left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\frac{T\pi}{2l^2}\right]+1$ совпадает с отрезком $\left[\frac{\pi}{2T},\frac{5\pi}{2T}\right]$.

Далее полагая $k = \left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\frac{T\pi}{2l^2}\right]+2$, $k = \left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\frac{T\pi}{2l^2}\right]+3$ и.т.д. видим, что замыкание множество $\{\lambda_{m,2k}\}$, $m = 0,1,2,...$ покрывает всю полуось $\left[-\frac{3\pi}{2T},+\infty\right)$.

Пусть теперь $\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\frac{T\pi}{2l^2}\right]-1 \succ 0$, очевидно, что начиная с некоторого номера это неравенство выполняется.

Полагая

$$k = \left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\frac{T\pi}{2l^2}\right]-1$$

имеем

$$\lambda_{m,2k} = \frac{2\pi}{T}\left[\frac{1}{4}-1-\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\frac{T\pi}{2l^2}\right)\right],\ m = 0,1,2,...$$

Следовательно $\overline{\{\lambda_{m,2k}\}} = \left[-\frac{7\pi}{2T},\frac{-3\pi}{2T}\right]$, где

$$k = \left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\frac{T\pi}{2l^2}\right]-1,\ m = 0,1,2,...$$

От прибавления или отнятия конечного числа элементов, множества не изменится, поэтому имеет место равенства

$$\overline{\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\frac{T\pi}{2l^2}\right)} = \overline{\left(\left(m+\frac{1}{2}+i\right)^2\frac{T\pi}{2l^2}\right)},\ m = 0,1,2,...$$

для любого натурального числа i. При выводе последнего равенства мы воспользовались этим фактом.

Полагая ,

$$k = \left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\frac{T\pi}{2l^2}\right]-2 \succ 0,\ k = \left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\frac{T\pi}{2l^2}\right]-3 \succ 0,...$$

и.т.д. мы видим, что $\overline{\{\lambda_{m,2k}\}} = (-\infty,+\infty)$, $k,m = 0,1,2,...$

Спектр оператора $\overline{L}$ состоит из собственных значений $\{\lambda_{mn}\}$, $m,n = 0,1,2,...$ и непрерывного спектра покрывающего всю числовую ось.

Если $\frac{T\pi}{2l^2}$ – рациональное число, то множество $\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\frac{T\pi}{2l^2}\right)$, $m = 0,1,2,...$ состоит из конечного числа элементов, поэтому хотя бы один из них повторяется бесконечное число раз при изменений индекса m. Следовательно, множество $\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 \frac{T\pi}{2l^2}\right)$, $m=0,1,2,...$ имеет хотя бы одну предельную точку лежащую в сегменте $[0,1]$, тогда последовательность

$$\lambda_{m,2k}=\frac{2\pi}{T}\left[\frac{1}{4}-\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 \frac{T\pi}{2l^2}\right)\right],\ k=\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 \frac{T\pi}{2l^2}\right],\ m=0,1,2,...$$

имеет хотя бы одну и не более конечного числа предельных точек лежащих в сегменте $\left[-\frac{3\pi}{2T},\frac{\pi}{2T}\right]$.

Продолжая это рассуждение, аналогично иррациональному случаю, заметим, что в каждом сегменте длиной $\frac{2\pi}{T}$ содержится не более конечного и не менее одного числа предельных точек последовательности $\{\lambda_{m,2k}\}$, $m,k=0,1,2,...$ Это говорит о том, что предельный спектр состоит из счетного множества изолированных точек разбросанных на всей числовой оси от $-\infty$ до $+\infty$. В частности точка $\lambda=0$ может оказаться бесконечномерным собственным значением.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно заметить, что каждый элемент предельного спектра является в самом деле бесконечнократным собственным значением.

5.Выводы.

Для одноэлектронной задачи по физическим соображениям можно ожидать, что если $V(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$, то непрерывный спектр H также заполнит $[0,\infty)$, поскольку частица на очень больших расстояниях практически свободна, а свободная частица может иметь любую положительную энергию. Эта гипотеза подтверждена большим вычислительным опытом, но более точные утверждения нуждаются в некотором спектральном понятии. Именно, существенный спектр оператора состоит из всех точек спектра, за исключением изолированных собственных значений конечной кратности. Таким образом, мы добавляем к непрерывному спектру: (1) любые собственные значения, лежащие в нем или на его краях, (2) любые предельные точки спектра, (3) собственные значения бесконечной кратности, если они существуют.

Путем проверки различных случаев устанавливается, что точки существенного спектра можно характеризовать приближенными собственными векторами (возможно, включая истинные собственные векторы) следующим образом: λ принадлежит существенному спектру оператора H тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{v_j\}_1^\infty$ линейно независимых (или, если угодно, взаимно ортогональных) единичных векторов, таких, что $\|Hv_j-\lambda v_j\|\to 0$ при $j\to\infty$.

Теоремы, полученные до сего времени, не в состоянии дать вполне удовлетворительную характеристику спектра по следующей причине: можно определить некий самосопряженный оператор, собственные значения которого составят счетное всюду плотное множество в интервале I (конечном или бесконечном), а собственные векторы образуют полную систему. Ясно, это не то, что обычно называют «непрерывный спектр», так как, например, в разложении по собственным функциям не появится никаких «собственных функций непрерывного спектра», а спектральный проектор Et не будет непрерывным по t в любой точке I. Тем не менее, весь интервал I представляет собой существенный спектр (некоторые его участки принадлежат непрерывному спектру).

Известные до сего времени теоремы не исключают возможность того, что существенный спектр оператора Шредингера является спектром такого рода. Более того, теорема Вейля и фон Неймана утверждает, что чисто непрерывный спектр (т.е. такой, на котором Et непрерывен) может быть преобразован в спектр описанного вида при помощи произвольно малого относительно компактного возмущения (на самом деле с помощью возмущения V типа Гамильтона-Шмидта с произвольно малой нормой Гильберта-Шмидта).

Даже если Et непрерывен, спектр может все еще быть кусочным в некотором смысле. Напомним, что любая неубывающая функция (или любая функция $f(t)$ локально ограниченной вариации) может быть представлена в виде

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)\,, \qquad (*)$$

где f_1 - скачкообразная функция, f_2 абсолютно непрерывна, а f_3 сингулярно непрерывна. Функция f_2 равна интегралу Лебега от своей производной, а производная f_3 равна нулю почти для всех t (функция Кантора является функцией типа f_3). В интервалах, где f_1 и f_3 - константы, f является абсолютно непрерывной. Пусть теперь $\{E_t\}$ - разложение единицы для самосопряженного оператора H. Для любого v в гильбертовом пространстве $(v, E_t v)$ является неубывающей функцией t, а значит, для нее возможна декомпозиция (*). Скачки f_1 происходят в собственных значениях оператора H. Спектр H называется абсолютно непрерывным в интервале I, если $(v, E_t v)$ - абсолютно непрерывная функция в I для каждого v в гильбертовом пространстве; в противном случае спектр будет кусочным [1.с.268].

Наконец, следует упомянуть другой пример, приведенный Винером [21] со ссылкой на К.Малера [22], в котором появляется так называемый сингулярный непрерывный спектр. Напомним, что неубывающая функция S(ω) может быть представлена в виде суммы трех слагаемых: функции скачков со счетным числом последних, абсолютно непрерывной функции и непрерывной функции, имеющей равную нулю производную почти всюду, как функция Кантора [1.с.88]

Наши результаты подтверждают точку зрения Н.Винера.Мы утверждаем,что в разложении $dE(\lambda) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$, отсутствует абсолютно непрерывная компонента и доминирует сингулярная составляющая,где $dE(\lambda)$ спектральная мера оператора,это резко контрастируеет с известными на сегоднящни день фактами.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. – М. Мир, 1982.

[2] Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 544с.

[3] Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы, спектральная теория. – М.: Мир, 1974.

[4] Friedrichs K.O. On the perturbation of continuous spectra, Comm. Pure Appl. Math., vol.III, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1965.

[5] Фаддеев Л.Д. Строение резольвенты оператора Шредингера системы трех частиц с парным взаимодействием, ДАН СССР,138:3 (1961), 565-567.

[6] Фаддеев Л.Д., Строение резольвенты оператора Шредингера системы трех частиц,и залача рассеяния, ДАН СССР,145:2(1962), 301-304.

[7] Фаддеев Л.Д.,Математические вопросы кванровой теории рассеяния для системы трех частиц,Тр.МИАН СССР им.Стеклова,69(1963),1-122.

[8] Lax P.D., Pillips R.S., Scattering theory. Academic Press, New York, 1967.

[9] Kato T.Perturbation theory for linear operators,Springer, New York, 1966.

[10] Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1977.

[11] Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. О полноте собственных векторов задачи Коши. - Республиканский научный журнал «Наука и образования ЮК» № 27, 2002. с. 58-62.

[12] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. К спектральной теории уравнения с отклоняющимися аргументами. - Институт математики МО и Н РК «Математический журнал».- Алматы 2004, т. 4, №3 (13) с. 41-48.

[13] Вейль Г. Избранные труды. - М.: Наука, 1984. – 510с.

[14] Кальменов Т.Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. – Шымкент: Ғылым, 1993. – 328с.

[15] Шалданбаев А.Ш., Рустемова К. О периодической задаче для уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом. - Научный журнал Мин Образ/я и Науки «Поиск», № 4/2009, г. Алматы, с. 204-209.

[16] Шалданбаев А.Ш. Критерии вольтерровости дифференциального оператора первого порядка с отклоняющимся аргументом. - Вестник Карагандинского Университета, серия «Математика», № 3(47)/2007, с.39-43.

[17] Марченко В.А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1977. – 332с.

[18] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма – Лиувилля на конечном отрезке времени.// Известия НАН РК, серия физ. – мат.– Алматы, 2000. – с.29-34.

[19] Шалданбаев А.Ш. Формулы следов для периодической и антипериодической задач Штурма–Лиувилля // Вестник МГУ. Серия 1. Математика-механика. 1982. - №3. - с. 6–11.

[20] Спектральные разложения корректных-некорректных начально краевых задач для некоторых классов дифференциальных уравнений. 193с. Монография. LAP LAMBEPT Academic Pyblishing. http://dnb.d-nb.de. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011,Germanu.

[21] Wiener N.,Generalized harmonic analysis.-Acta Math.,v.55,p.117-258.

[22] Mahler K. On the Translation Properties of a simple Class of Arithmetical Functions., Journ. Math. Phys. M.I.T.6 (1927). 158-164.

REFERENCES

[1] R. Rikhtmayer. Principles of modern mathematical physics. M. Mir, 1982.
[2] Akhiyezer N. I., Glazman I.M. The theory of linear operators in Hilbert space. M.: Science, 1966. 544 pages.
[3] Danford N., Schwartz Dzh. T. Linear operators, spectral theory. M.: World, 1974.
[4] Friedrichs K.O., On the perturbation of continuous spectra, Comm.Pure Appl.Math., vol.III, Amer.Math.Soc., Providence, R.I., 1965.
[5] Faddeev L.D., the Structure of a rezolventa of the operator Schrödinger of system of three particles with pair interaction, SSSR,138:3(1961),565-567 is GIVEN.
[6] Faddeev L.D., the Structure of a rezolventa of the operator Schrödinger of system of three particles, and a zalacha of dispersion, SSSR,145:2(1962),301-304 is GIVEN.
[7] Faddeev L.D., Mathematical questions of the kvanrovy theory of dispersion for system of three particles, Tr. MIAN USSR of Steklov, 69(1963),1-122.
[8] Lax P.D., Pillips R.S., Scattering theory, Academic Press, New York, 1967.
[9] Kato T.Perturbation theory for linear operators, Springer, New York, 1966.
[10] Mizokhata S. The theory of the equations with private derivatives. M.: World, 1977.
[11] Shaldanbayev A.Sh., Akhmetova S. T. About completeness of own vectors of a task of Cauchy. - Republican scientific magazine "Science and Formations of YuK" No. 27, 2002. page 58-62.
[12] Kalmenov T.Sh., Shaldanbayev A.Sh., Akhmetova S. T. To the spectral theory of the equation with the deviating arguments. Institute of mathematics of MO and N of RK "Mathematical Magazine". Almaty 2004, t. 4, No. 3 (13) of page 41-48.
[13] Veyl G. Chosen works. - M.: Science, 1984. – 510 pages.
[14] Kalmenov T.Sh. Regional tasks for the linear equations in private derivatives of hyperbolic type. Shymkent: □yly, 1993. – 328 pages.
[15] Shaldanbayev A.Sh., Rustemova K. About a periodic task for the equation of the first order with the deviating argument. Image Min scientific magazine / I and Sciences "Search", No. 4/2009, Almaty, page 204-209.
[16] Shaldanbayev A.Sh. Criteria of a volterrovost of the differential operator of the first order with the deviating argument. - Bulletin of the Karaganda University, Mathematics series, No. 3(47)/2007, page 39-43.
[17] Marchenko V.A. Operators of Storm – Liouville and their appendix. Kiev: Naukova thought, 1977. 332 pages.
[18] Kalmenov T.Sh., Shaldanbayev A.Sh. About structure of a range of a regional problem of Storm – Liouville on a final piece времени.//NAN RK'S News, a series physical. mat. Almaty, 2000. page 29-34.
[19] Shaldanbayev A.Sh. Formulas of traces for periodic and anti-periodic problems of Storm Liouville//the Bulletin of MSU. Series 1. Mathematician-mechanic. 1982. No. 3. page 6-11.
[20] Spectral decomposition of regional tasks correct-incorrect nachalno for some classes of the differential equations. - 193c, Monograph. LAP LAMBEPT Academic Pyblishing. http://dnb.d-nb.de. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011, Germanu.
[21] Wiener N., Generalized harmonic analysis. Acta Math., v.55, p.117-258.
[22] Mahler K.On the Translation Properties of a simple Class of Arithmetical Functions., Journ. Math. Phys. M.I. T.6 (1927). 158-164.

АРГУМЕНТІ АУЫТҚЫҒАН ЖЫЛУ ТЕҢДЕУІНІҢ ЖАРТАЛАЙ БЕКІТІЛГЕН ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕБІНЕ СӘЙКЕС ОПЕРАТОРДЫҢ ҮЗІКСІЗ СПЕКТРІ ТУРАЛЫ

М.Т.Шоманбаева, А.Ш.Шалданбаев,С.Т.Ахметова

ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент

Сырлы сөздер: ауытқыған аргумент, **үзіксіз** спектр, сингулярлы спектр, абсолютті үзіксіз спектр, спектрәлді таралым, Кантордың функциясы.

Аннотация.Бұл еңбекте аргументі ауытқыған жылу теңдеуінің жартылай бекіген шекаралық есебіне сәйкес оператордың спектрәлді теориясы тұрғызылды,меншікті мәндері табылды,оларға сәйкес меншікті функциялар табылып, олардың толымдылығы мен базистігі дәлелденді,спектрәлді таралымы алынды,сонымен бірге,спектрінің құрамы егжей-тегжей зерттелді,нәтиежесінде абсолютті мүшенің жоқ екені,оның есесіне сингуляр мүшенің басымдылығы айқындалды.Мұндай спектрдің болуы мүмкін екеніне алғаш рет Н.Винер назар аударған,ол Кантордың функциясына ұқсайды.

Поступила 13.03.2016 г.