

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 159–168

UDC 622.276

## NUMERICAL SOLUTION OF THE ONE DIMENSIONAL MODEL OF GAS-LIFT PROCESS

N. M. Temirbekov<sup>1</sup>, A. K. Turarov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> D. Serikbayev East Kazakhstan State Technical University  
Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan  
temirbekov@rambler.ru, t010183@gmail.com

**Key words:** interfacial contact discontinuity, gas-liquid mixture, gas lift.

**Abstract.** We consider and conduct a numerical simulation of a one-dimensional model of gas-lift process, where the movement in gas-lift well is described by partial differential equations of hyperbolic type. Difference schemes for the gas-lift model of the process on a non-uniform grid condensing near the boundaries of subdomains with gas, liquid and a gas-liquid mixture are developed.

In this paper, the mathematical model of gas lift wells is developed. A one-dimensional model of gas-lift wells is examined in which it is assumed that the flow is two-phase and isothermic in the annular portion and in the well. The system, which describes the process under study, consists of the equations of motion and continuity equations of thermodynamic state, concentration, and hydraulic resistance. At the interface, matching conditions for pressure, velocity and concentration are set that allows to obtain a formula for determining the density of the liquid phase in an explicit form. Finite-difference scheme on adaptive non-uniform grid condensing on the boundaries of the gas, liquid and liquid-gas phase, is developed. When building a grid, cubic spline function is used. The results of the proposed algorithm is illustrated by the example of a real well.

УДК 622.276

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ГАЗЛИФТНОГО ПРОЦЕССА

Н. М. Темирбеков<sup>1</sup>, А. К. Тураров<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева,  
Усть-Каменогорск, Казахстан

**Ключевые слова:** контактный разрыв, границы разделов фаз, газожидкостная смесь, газлифт.

**Аннотация.** Рассматривается и проводится численное моделирование одномерной модели газлифтного процесса, где движение в газлифтной скважине описывается уравнениями в частных производных гиперболического типа. Разработаны разностные схемы для модели газлифтного процесса на неравномерной сетке сгущающихся вблизи границ подобластей занятых газом, жидкостью и газожидкостной смесью.

В данной работе разработана математическая модель газлифтной скважины. Рассмотрена одномерная модель газлифтной скважины, в которой предполагается, что поток в кольцевой части и скважине двухфазный и изотермический. Система, описывающая изучаемый процесс, состоит из уравнений движения, неразрывности и уравнений термодинамического состояния, концентраций, гидравлического сопротивления. На границах разделов фаз ставятся условия согласования для давления, скорости и концентрации, которые позволяют получить формулу для определения плотности жидкой фазы в явном виде. Разработана конечно-разностная схема на адаптивной неравномерной сетке, сгущающаяся на границах газовой, жидкостной и газожидкостной фаз. При построении сетки используется кубическая сплайн-функция. Результаты предложенного алгоритма иллюстрируются на примере отдельно взятой нефтяной скважины.

## Введение

Применение динамических моделей газожидкостных потоков для описания добычи и транспортировки нефти началось сравнительно недавно. В них используются нестационарные уравнения баланса массы, импульса и энергии для жидкой и газообразной фаз. Основной сложностью является наличие разрывов в распределении плотности в скважине. Для этого на основании экспериментальных данных были подобраны непрерывные функции от газосодержания для скорости всплытия газа и параметра профиля потока.

Первые динамические модели газожидкостных потоков пришли в нефтегазовую отрасль именно из области тепловой и атомной энергетики. Имеются работы крупных ученых Нигматулина Р.И. [1], Кутатладзе С.С. [2], Накорякова В.Е. [5, 6] связанные с движением газожидкостных смесей в трубах и более детальные и разносторонние исследования в теоретическом плане.

В 1980-1990-ых годах появился ряд моделей и программных пакетов для моделирования нестационарных потоков углеводородов: OLGA [7], TASCITE [8], TUFFP [9, 10].

В основе модели OLGA [7] применяются отдельные уравнения баланса массы для жидкой и газовой фазы. Сохранение импульса системы также описываются отдельными уравнениями для газа и жидкости. Модель OLGA предназначена для расчета нестационарных газожидкостных потоков в системах сбора углеводородной продукции и в нефтепроводах.

Модель TASCITE также предназначен для расчета неустановившихся и стационарных потоков в системах транспортировки нефти и газа.

В общем виде уравнения массы аналогичны уравнениям модели OLGA. Вместо двух уравнений импульса для фаз в модели TASCITE используется одно уравнение для газожидкостной смеси. Поскольку в модели число неизвестных больше числа уравнений используются эмпирические соотношения между скоростью газа и скоростью смеси. В модели TASCITE для численной реализации используется явная схема второго порядка точности. Разностная схема обладает хорошими консервативными свойствами и имеет второй порядок точности, однако как и большинство схем второго порядка характеризуется рассеивающим качеством. Это особенно проявляется при резких разрывах и фронтах, когда при резких разрывах и фронтах в результате расчетов возникает рябь в соседних с фронтом ячейках.

Во избежание данного явления была предложена гибридная схема, сочетающая схему второго порядка и схему первого порядка. Для сильных разрывов потоковый член имеет аппроксимацию первого порядка, за пределом фронта аппроксимацию второго порядка точности.

В модели TUFFP газожидкостный поток описывается двухфазной моделью с упрощающими предположениями. Уравнение баланса массы для жидкой фазы аналогично как в модели OLGA, а для газа используется упрощенное квазистационарное уравнение. Уравнения баланса импульса так же записываются в квазистационарном виде.

Система дифференциальных уравнений решается полуявным конечно-разностным методом, для расчета применяется равномерная сетка. Общими недостатками имеющихся динамических моделей является большое количество и качество входных данных, численная неустойчивость. Несмотря на это динамические модели применяются для моделирования транспортировки газожидкостных смесей.

В последние годы стали появляться работы, в которых динамические модели применяются для изучения нестационарных процессов в скважинах.

В работах Tang, Schmidt, Blais [10], Avest and Oudeman [11], Asheim [12] изучается запуск газлифтной скважины и нестабильные режимы работы газлифтного подъемника. В данных моделях газлифта рассматривается совместная гидрогазодинамика нефтяного пласта, скважины и закачиваемого газа.

Изучение процессов разработки месторождений имеет важное практическое значение в нефтегазовой отрасли в связи с необходимостью совершенствования методов увеличения добычи. Математическому моделированию этих процессов посвящено очень большое количество работ [12-18]. Одним из наиболее эффективных и экономичных методов нефтедобычи является метод газлифта, который играет важную роль после фонтанного процесса. Основной характеристикой газлифтных скважин является зависимость дебита скважины от объемного расхода закачиваемого газа. Все исследования посвящены нахождению оптимального режима работы газлифтных

скважин, т.е. определению минимального значения удельного расхода газа и анализу этих характеристик. Работы Алиева Ф.А. и его учеников [12-14], а также работы [15,16] посвящены моделированию работы газлифтной скважины. В их работах приводится большой обзор научных работ, посвященных известным методам исследования и оптимизации работы газлифтных скважин. В работе [14] решена комплексная задача оптимизации работы газлифтных скважин. Предложенный подход дает возможность создать принципиально новую автоматизированную систему, которая позволит прогнозировать показатели газлифтной скважины. В статье [15] предложена дискретная минимаксная задача, и с помощью уравнения Эйлера-Лагранжа находится оптимальный режим газлифта.

В работе Барашкина Р.Л. [17] разработана динамическая математическая модель газлифтной скважины с учетом передвижения границ фаз, их образования, смены периода работы скважины и относительной скорости газа.

Во всех вышеперечисленных работах при численном решении используется равномерная сетка по пространственным переменным и в каждой подобласти задача решается отдельно, тогда как на границе раздела фаз имеются большие градиенты скорости, плотности и давления. Поэтому в данной работе разработаны разностные схемы для модели газлифта во всех подобластях и на неравномерной сетке, которая сгущается в подобластях с большими градиентами, т.е. на границах раздела фаз. Для сгущения сетки используется кубическая функция, т.к. процесс интерполирования кубическими сплайн-функциями является сходящимся. Разработанной разностной схемой и алгоритмом ее реализации проведены многочисленные расчеты газлифтной скважины. Результаты численных расчетов приведены в виде графиков.

#### Система дифференциальных уравнений в частных производных для математического моделирования газлифтной скважины

В работе [17] разработана структура газлифтной скважины, приведены допущения математической модели. В скважине выделены объемы для моделирования дифференциальными уравнениями в частных производных. Потoki в выделенных объемах могут быть однофазными или двухфазными. Однофазные потоки состоят из газа или жидкости, а двухфазный поток образует газожидкостную смесь (ГЖС).

При разработке математической модели сделаны следующие допущения (рис.1):

- поток в скважине двухфазный;
- процесс движения изотермический;
- подача рабочего агента осуществляется через кольцо;
- добыча нефти осуществляется через насосно-компрессорную трубу (НКТ);
- силы сопротивления пористой среды и вязкости описываются в виде суммарного гидравлического сопротивления.

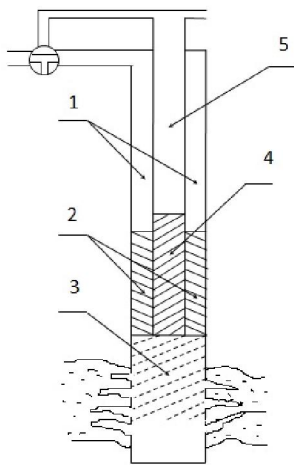


Рисунок 1 – Газлифтная скважина: 1 – газ в кольце ; 2 – жидкость в кольце ;  
3 – газожидкостная смесь в эксплуатационной колонне; 4 – жидкость в НКТ; 5 – газ в НКТ

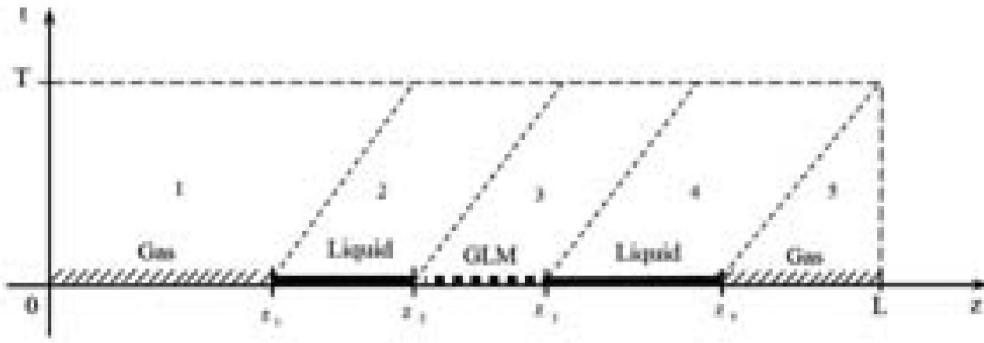


Рисунок 2 – Расчетная область газлифтной скважины

Рассмотрим системы уравнений, описывающих движение в газлифтных скважинах [17] (рис. 2).

Уравнение движения

$$\varphi \rho^g \frac{dv^g}{dt} + (1 - \varphi) \rho^l \frac{dv^l}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\lambda_c}{2 \cdot d_r} (\varphi \rho^g v^g |v^g| + (1 - \varphi) \rho^l v^l |v^l|) + (\varphi \rho^g + (1 - \varphi) \rho^l) g \sin \theta. \quad (1)$$

Уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \varphi \rho^g}{\partial t} + \frac{\partial \varphi \rho^g v^g}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial (1 - \varphi) \rho^l}{\partial t} + \frac{\partial (1 - \varphi) \rho^l v^l}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Термодинамические уравнения состояния

$$\begin{cases} \text{для газа:} & p = \rho^g RT / M, \\ \text{для жидкости:} & p = p_0 + \frac{1}{\beta} \left( \frac{\rho^l}{\rho_0^l} - 1 \right). \end{cases} \quad (4)$$

Уравнение концентраций

$$\varphi(z, t) = \begin{cases} b, & 0 \leq z \leq z_1 - \varepsilon, \\ \frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2} th R_\varphi(z - z_1), & z_1 - \varepsilon \leq z \leq z_1 + \varepsilon, \\ a, & z_1 + \varepsilon \leq z \leq z_2 - \varepsilon, \\ \frac{b_1+a}{2} + \frac{b_1-a}{2} th R_\varphi(z - z_2), & z_2 - \varepsilon \leq z \leq z_2 + \varepsilon, \\ b_1, & z_2 + \varepsilon \leq z \leq z_3 - \varepsilon, \\ \frac{b_1+a}{2} - \frac{b_1-a}{2} th R_\varphi(z - z_3), & |z - z_3| \leq \varepsilon, \\ a, & z_3 + \varepsilon \leq z \leq z_4 - \varepsilon, \\ \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} th R_\varphi(z - z_4), & |z - z_4| \leq \varepsilon, \\ b, & z_4 + \varepsilon \leq z \leq L, \end{cases} \quad (5)$$

где  $b = 1$ ,  $a = 0$ ,  $b_1 = \frac{0.83 v^g - v^l}{v^g - v^l}$ ,  $th z$ - гиперболический тангенс;  $\varepsilon$ -малый параметр,  $z_k = z_k(t)$ - функции времени, границы разделов фаз.

Уравнение для коэффициента гидравлических сопротивлений

$$\lambda_c = \lambda_c(p, \rho^\Gamma, \rho^{\text{ж}}, v^\Gamma, v^{\text{ж}}, \varphi, \mu), \quad (5)$$

Здесь,  $t$  - время,  $z$  - координата по глубине скважины,  $\varphi$  - истинное объемное содержание фазы,  $\rho^\Gamma$  - плотность газа,  $\rho^{\text{ж}}$  - плотность жидкости,  $p$  - давление,  $v_\Gamma$  - средняя скорость газовой фазы,  $v^{\text{ж}}$  - средняя скорость жидкой фазы,  $\lambda_c$  - коэффициент гидравлического сопротивления,  $d_\Gamma$  - гидравлический диаметр канала,  $g$  - ускорение свободного падения,  $\theta$  - угол наклона скважины,  $R$  - универсальная газовая постоянная,  $T$  - абсолютная температура,  $M$  - молярная масса,  $p_0$  - начальное давление жидкости,  $\rho_0^{\text{ж}}$  - соответствующая начальному давлению плотность,  $\beta$  - коэффициент сжимаемости жидкости,  $\mu$  - коэффициент динамической вязкости.

Уравнение (1) с учетом (2), (3) можно записать и в дивергентном виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\varphi \rho^\Gamma v^\Gamma + (1 - \varphi) \rho^{\text{ж}} v^{\text{ж}}) + \frac{\partial}{\partial z} (\varphi \rho^\Gamma (v^\Gamma)^2 + (1 - \varphi) \rho^{\text{ж}} (v^{\text{ж}})^2) = \\ & = - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\lambda_c}{2 \cdot d_\Gamma} (\varphi \rho^\Gamma v^\Gamma |v^\Gamma| + (1 - \varphi) \rho^{\text{ж}} v^{\text{ж}} |v^{\text{ж}}|) + (\varphi \rho^\Gamma + (1 - \varphi) \rho^{\text{ж}}) g \sin \theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Коэффициент динамической вязкости для ГЖС определяется следующим образом

$$\mu = \varphi \mu^\Gamma + (1 - \varphi) \mu^{\text{ж}}. \quad (7)$$

Расходное газосодержание  $\alpha$  определяется так

$$\alpha = \frac{Q^\Gamma}{Q^\Gamma + Q^{\text{ж}}}, \quad (8)$$

где  $Q^\Gamma$ ,  $Q^{\text{ж}}$  - расходы газа и жидкости.

Обозначим через  $F^\Gamma$ ,  $F^{\text{ж}}$  - площади в сечении трубы занятые газом и жидкостью. Расходы газа и жидкости через скорости выражаются формулой

$$Q^\Gamma = v^\Gamma F^\Gamma, \quad Q^{\text{ж}} = v^{\text{ж}} F^{\text{ж}} \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8) и разделив числитель и знаменатель на  $F$ , и учитывая что  $\varphi = \frac{F^\Gamma}{F}$ ,  $1 - \varphi = \frac{F^{\text{ж}}}{F}$  получим

$$\alpha = \frac{\varphi v^\Gamma}{\varphi v^\Gamma + (1 - \varphi) v^{\text{ж}}}. \quad (10)$$

Уравнения (1)-(5) решаются в подобластях 1-5 (рис. 2) со следующими начальными и граничными условиями:

$$\rho_\Gamma(z, 0) = \psi_\rho(z), \quad p(z, 0) = \psi_p(z), \quad v_\Gamma(z, 0) = \psi_v(z), \quad \text{при } 0 \leq z \leq L, \quad (11)$$

$$\rho_\Gamma(0, t) = \rho(0, 0), \quad v_\Gamma(0, t) = v(0, 0), \quad p(0, t) = p(0, 0), \quad \text{при } z = 0, \quad 1 \leq t \leq T, \quad (12)$$

$$\rho_\Gamma(L, t) = \rho(L, 0), \quad v_\Gamma(L, t) = v(L, 0), \quad p(L, t) = p(L, 0), \quad \text{при } z = L, \quad 1 \leq t \leq T, \quad (13)$$

где функции  $\psi_\rho(z)$ ,  $\psi_p(z)$ ,  $\psi_v(z)$  задаются в подобластях в зависимости от фазы среды.

Уравнения (1) - (4) представляют собой общую форму соотношений, связывающих параметры по обе стороны раздела фаз (гидродинамические разрывы) и скорость ее распространения. Поэтому на границах разделов фаз выполняются следующие соотношения Гюгонио, которые выражают законы сохранения потоков массы, импульса и энергии через поверхность разрыва.

$$m = \rho^\Gamma (v^\Gamma - D) = \rho^{\text{ж}} (v^{\text{ж}} - D), \quad (14)$$

$$\rho^\Gamma (v^\Gamma)^2 + p^\Gamma = \rho^{\text{ж}} (v^{\text{ж}})^2 + p^{\text{ж}}, \quad (15)$$

где  $D(t)$  - скорость перемещения границ фаз.

Так как на границах разделов фаз контактный разрыв имеем, что  $\bar{m} = 0$ . По физическому смыслу  $\rho^\Gamma$  и  $\rho^{\text{ж}}$  не равны нулю, равно  $m = 0$  может быть выполнено лишь при  $\rho^\Gamma = \rho^{\text{ж}} = D(t)$ .

Итак, на поверхности контактных разрывов должны быть непрерывны нормальная составляющая скорости газа или жидкости давление [3]

$$[\varphi]_{z=z_k} = 0, \quad [p]_{z=z_k} = 0, \quad [v]_{z=z_k} = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (16)$$

На границах разделов фаз для определения плотности используем условия  $[p]_{z=z_k} = p(z_k - 0, t) - p(z_k + 0, t) = 0$ . Например на границе  $z = z_1$  газа и жидкости имеем две формулы для давления

$$p(z_k - 0, t) = \rho_r(z_k - 0, t)RT/M, \quad p(z_k + 0, t) = p_0 + \frac{1}{\beta} \left( \frac{\rho^{\text{ж}}(z_k+0, t)}{\rho_0^{\text{ж}}} - 1 \right).$$

Приравнивая эти уравнения для плотности жидкости имеем формулу

$$\rho^{\text{ж}}(z_k + 0, t) = \rho_0^{\text{ж}} + \rho_0^{\text{ж}} \beta \left( \frac{\rho^{\text{г}}(z_k-0, t)RT}{M} - p_0 \right). \quad (17)$$

### Построение разностной схемы

Для численного решения начально-граничной задачи определим неравномерную по  $z$  и равномерную по  $t$  разностную сетку в следующем виде:

$W_h = \{z_j = jh_j, j = 0, 1, \dots, N_1, h_j N_1 = L\}$ ,  $W_\tau = \{t_i = i\tau, i = 0, 1, \dots, N_2, \tau N_2 = T\}$ , где  $\tau$  и  $h$  - шаги расчетной сетки по  $t$  и  $z$ , соответственно.

Интегро-интерполяционным методом построена разностная схема, аппроксимирующая дифференциальные уравнения (1)-(5). Нелинейные слагаемые аппроксимированы с помощью схемы против потока.

Разностный аналог уравнения движения

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi_{j,i+1} \rho_{j,i+1}^{\text{г}} v_{j,i+1}^{\text{г}} + (1 - \varphi_{j,i+1}) \rho_{j,i+1}^{\text{ж}} v_{j,i+1}^{\text{ж}}}{\tau} - \frac{\varphi_{j,i} \rho_{j,i}^{\text{г}} v_{j,i}^{\text{г}} + (1 - \varphi_{j,i}) \rho_{j,i}^{\text{ж}} v_{j,i}^{\text{ж}}}{\tau} + \frac{p_{j+1,i} - p_{j,i}}{h_j} = \\ & = -\varphi_{j,i} \rho_{j,i}^{\text{г}} \left[ \frac{1}{2h_j} (v_{j,i}^{\text{г}} + |v_{j,i}^{\text{г}}|) (v_{j,i}^{\text{г}} - v_{j-1,i}^{\text{г}}) + \frac{1}{2h_j} (v_{j,i}^{\text{г}} - |v_{j,i}^{\text{г}}|) (v_{j+1,i}^{\text{г}} - v_{j,i}^{\text{г}}) \right] - \\ & - (1 - \varphi_{j,i}) \rho_{j,i}^{\text{ж}} \left[ \frac{1}{2h_j} (v_{j,i}^{\text{ж}} + |v_{j,i}^{\text{ж}}|) (v_{j,i}^{\text{ж}} - v_{j-1,i}^{\text{ж}}) + \frac{1}{2h_j} (v_{j,i}^{\text{ж}} - |v_{j,i}^{\text{ж}}|) (v_{j+1,i}^{\text{ж}} - v_{j,i}^{\text{ж}}) \right] - \\ & - \frac{\lambda_{j,i}}{2 \cdot d_\tau} (\varphi_{j,i} \rho_{j,i}^{\text{г}} v_{j,i}^{\text{г}} |v_{j,i}^{\text{г}}| + (1 - \varphi_{j,i}) \rho_{j,i}^{\text{ж}} v_{j,i}^{\text{ж}} |v_{j,i}^{\text{ж}}|) + (\varphi_{j,i} \rho_{j,i}^{\text{г}} + (1 - \varphi_{j,i}) \rho_{j,i}^{\text{ж}}) g \sin \alpha, \quad (18) \\ & j = 1, 2, \dots, N_1 - 1; i = 1, 2, \dots, N_2. \end{aligned}$$

Для уравнение неразрывности газа и жидкости применено схема TVD (Total Variation Diminition) на примере схемы Лакса-Вендроффа.

Уравнение неразрывности газа

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi_{j,i+1} \rho_{j,i+1}^{\text{г}} - \varphi_{j,i} \rho_{j,i}^{\text{г}}}{\tau} + \frac{1}{2h_j} [(v_{j,i}^{\text{г}} + |v_{j,i}^{\text{г}}|) (\varphi_{j,i} \rho_{j,i}^{\text{г}} - \varphi_{j-1,i} \rho_{j-1,i}^{\text{г}}) + \\ & + (v_{j,i}^{\text{г}} - |v_{j,i}^{\text{г}}|) (\varphi_{j+1,i} \rho_{j+1,i}^{\text{г}} - \varphi_{j,i} \rho_{j,i}^{\text{г}})] + \frac{v_{j,i}^{\text{г}}}{h_j} (f_{i+\frac{1}{2},i} - f_{i-\frac{1}{2},i}) = 0, \quad (19) \end{aligned}$$

где  $f_{i+\frac{1}{2},i} = \psi(r_j) \left( 1 - \frac{\tau |v_{j,i}^{\text{г}}|}{h_j} \right) (\varphi_{j+1,i} \rho_{j+1,i}^{\text{г}} - \varphi_{j,i} \rho_{j,i}^{\text{г}})$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_1 - 1; i = 1, 2, \dots, N_2$ .

Уравнение неразрывности жидкости

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - \varphi_{j,i+1}) \rho_{j,i+1}^{\text{ж}} - (1 - \varphi_{j,i}) \rho_{j,i}^{\text{ж}}}{\tau} + \frac{1}{2h_j} [(v_{j,i}^{\text{ж}} + |v_{j,i}^{\text{ж}}|) ((1 - \varphi_{j,i}) \rho_{j,i}^{\text{ж}} - (1 - \varphi_{j-1,i}) \rho_{j-1,i}^{\text{ж}}) + \\ & + (v_{j,i}^{\text{ж}} - |v_{j,i}^{\text{ж}}|) ((1 - \varphi_{j+1,i}) \rho_{j+1,i}^{\text{ж}} - (1 - \varphi_{j,i}) \rho_{j,i}^{\text{ж}})] + \frac{v_{j,i}^{\text{ж}}}{h_j} (f_{i+\frac{1}{2},i} - f_{i-\frac{1}{2},i}) = 0, \quad (20) \end{aligned}$$

где  $f_{i+\frac{1}{2},i} = \psi(r_j) \left( 1 - \frac{\tau |v_{j,i}^{\text{ж}}|}{h_j} \right) ((1 - \varphi_{j+1,i}) \rho_{j+1,i}^{\text{ж}} - (1 - \varphi_{j,i}) \rho_{j,i}^{\text{ж}})$ ,

$$j = 1, 2, \dots, N_1 - 1; i = 1, 2, \dots, N_2.$$

Ограничитель (лимитер) схемы TVD (Total Variation Diminition), т.е. схемы с уменьшением полной вариации выбирается следующим образом

$$0 < \psi(r_j) \leq \min(2r_j, 2), \quad r_j > 0, \quad \psi(r_j) = 0, \quad r_j \leq 0,$$

где  $r_j = \frac{\rho_{j,i}^\gamma - \rho_{j-1,i}^\gamma}{\rho_{j+1,i}^\gamma - \rho_{j,i}^\gamma}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_1 - 1$ ;  $i = 1, 2, \dots, N_2$   $\gamma = \text{г, ж}$ .

Давление газа определим с помощью формулы

$$p_{j,i+1} = \rho_{j+1,i}^\gamma RT/M, \quad (21)$$

давление жидкости

$$p_{j,i+1} = p_0 + \frac{1}{\beta} \left( \frac{\rho_{j,i+1}^*}{\rho_0^*} - 1 \right). \quad (22)$$

Поскольку в модели (18) число неизвестных  $v_{j,i+1}^\gamma$ ,  $v_{j,i+1}^*$  больше числа уравнений, поэтому необходимы замыкающие соотношения. Для распределенного потока используется следующая взаимосвязь скоростей газа и жидкости [16].

$$v_{j,i+1}^\gamma (0,83 - \varphi_{j,i+1}) = (1 - \varphi_{j,i+1}) v_{j,i+1}^*, \quad (23)$$

коэффициент гидравлического сопротивления определяется в зависимости от числа Рейнольдса

$$\lambda_{j,i} = \frac{64}{Re_{j,i}}, \quad (24)$$

где число Рейнольдса определяется с помощью формулы

$$Re_{j,i} = \frac{LV}{\mu_{j,i}}. \quad (25)$$

В разностной задаче (18)-(24) используется неравномерная сетка [19, 20] с шагами  $h_j, j = 0, 1, \dots, N_1$ . Неравномерная сетка сгущается на границе подобластей. Сгущение сетки осуществляется с помощью зависимости  $z_k = z_k(q, t)$  формулами

$$z_k(q, t) = a_k(q - q_{n_k})^3 + b_k(q - q_{n_k})^2 + c_k(q - q_{n_k}) + d_k, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (26)$$

где  $q$  - координатная ось на трезок  $[0; 1]$  которого отображается отрезок  $[0; 2]$  координатной оси  $z$ ; причем по оси  $q$  строится равномерная сетка соответствующая неравномерной сетке по оси  $z$ ;  $n_k$  - граница разделов фаз;  $a_k, b_k, c_k, d_k$  - коэффициенты кубической параболы.

Шаг неравномерной сетки определяется так  $h_j = z_k(q_j, t) - z_k(q_{j-1}, t)$ , где  $j = n_k - n_\varepsilon, n_k - n_\varepsilon + 1, \dots, n_k + n_\varepsilon$ ,  $n_\varepsilon = \left[ \frac{\varepsilon}{h_q} \right]$ ,  $h_q = \frac{1}{N_1}$  - шаг равномерной сетки по  $q$ .

Скорость ГЖС вычисляется по формуле

$$v_{j,i+1}^{\text{CM}} = \varphi_{j,i} v_{j,i+1}^\gamma + (1 - \varphi_{j,i}) v_{j,i+1}^*, \quad (27)$$

$$j = n_2 + 1, n_2 + 2, \dots, n_3 - 1, \quad i = 0, 1, \dots, N_2.$$

Границы разделов фаз  $z_k$  за один шаг по времени передвигаются на величину

$$\Delta l_k = v_{n_k,i} \cdot \tau, \quad (28)$$

где  $k = 1, 2, 3, 4$ . Номера узлов сетки соответствующие границам разделов фаз определяются так

$$n_k = n_k + [\Delta l_k / h_j]. \quad (29)$$

### Результаты численного моделирования

Используя вышеприведенный алгоритм, была составлена программа для вычисления основных технологических характеристик газлифтной скважины. Были заданы следующие исходные данные:  $t = 3600$  с,  $L = 3496$  м,  $\rho^\gamma = 0,75$  м/кг<sup>3</sup>,  $\rho^{жс} = 950$  м/кг<sup>3</sup>,  $d_1 = 0,0889$  м,  $d_2 = 0,0759$  м,  $D = 0,168$  м,  $p_n = 9$  МПа,  $p_{nl} = 19$  МПа,  $p_y = 1,5$  МПа,  $T = 333$  К,  $g = 9,80665$  м/с<sup>2</sup>.

На рисунках 3, 4, 5, 6 приведены истинное содержание газа, плотность, давление и скорости. На рисунке 3 приведен график изменения истинного содержания газа вдоль скважины. На рисунке 4 приведен график изменения плотности газа, жидкости, ГЖС вдоль скважины. На рисунке 5 построен график функции давления. Из данного графика видно, что давление среды в пласте увеличивается вдоль течения до момента образования газожидкостной смеси, а затем

уменьшается. Из графика скорости (рисунок 6) наблюдается монотонное уменьшение скорости среды до образования ГЖС, за смесью скорость жидкости и газа в НКТ увеличивается.

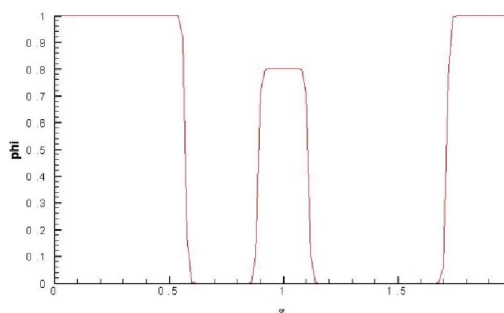


Рисунок 3 – Истинное содержание газа

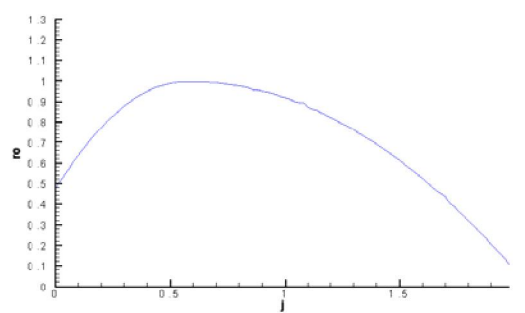


Рисунок 4 – Плотность

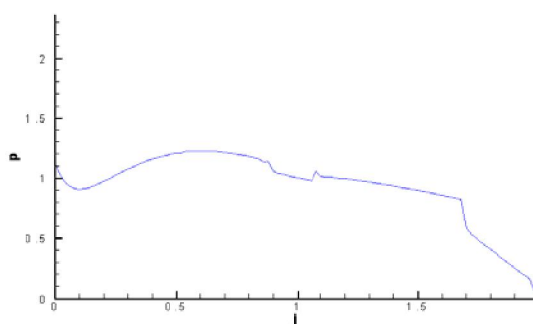


Рисунок 5 – Давление

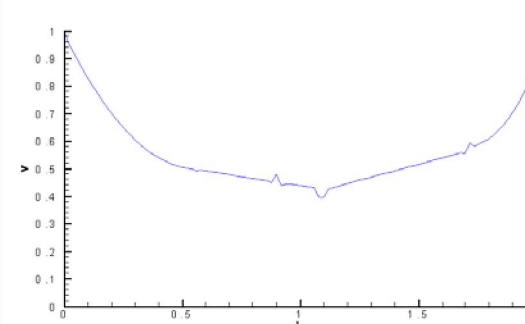


Рисунок 6 – Скорость

### Заключение.

В данной работе разработана математическая модель газлифтной скважины и рассмотрена одномерная модель газлифтной скважины, в которой предполагается, что поток в кольцевой части и скважине двухфазный и изотермический. Описывающий изучаемый процесс состоит из уравнений движения, неразрывности и уравнений термодинамического состояния, концентраций, гидравлического сопротивления. На границах разделов фаз ставятся условия согласования для давления, скорости и концентрации, которые позволяют получить формулу для определения плотности жидкой фазы в явном виде. Разработана конечно-разностная схема на адаптивной неравномерной сетке, сгущающаяся на границах газовой, жидкостной и газожидкостной фаз. При построении сетки используется кубическая сплайн-функция. Используя предложенный алгоритм численного решения одномерной задачи для газлифтной скважины, составлена программа для расчета на компьютере. Предложенными численными алгоритмами решения задачи определения плотности, давления, скорости для газлифтной скважины проведены многочисленные методические расчеты. Из результатов расчетов можно сделать вывод, что разработанная математическая модель, разностная схема и компьютерная программа позволяют изучать физический процесс в газлифтной скважине и решать вопросы оптимального эксплуатации нефтяных месторождений.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред, Т.1,2, М., Наука, 1987 (in Russ.)
- [2] Кутателадзе С.С. Стырикович М.А. Гидродинамика газожидкостных систем. М.: Энергия, 1976. (in Russ.)
- [3] Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992. – 424 с. (in Russ.)
- [4] Шокин Ю.И. Первое дифференциальное приближение. - Новосибирск: Наука, 1979 (in Russ.)



- [5] Накоряков В.Е., Соболев В.В., Шрейбер И.Р. Длинноволновые возмущения в газожидкостной смеси *Известия АН СССР. МЖТ*, **1972**, № 5. (in Russ.)
- [6] Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Распространение волн в газожидкостных и парожидкостных средах Новосибирск.ИТФ, 1983, 238 с. (in Russ.)
- [7] Bendiksen K., Malnes D., Moe R., Nuland S. The dynamic two-fluid model OLGA: theory and application *SPE Production Engineering*. May, **1991**. P. 171. (in Eng.)
- [8] Minami K., Shoham O. Transient two-phase flow behavior in pipelines-experiment and modeling *Int. J. of Multiphase Flows*. **1994**. V. 20. № 4. P. 739. (in Eng.)
- [9] Pauchon C., Dhulesia H., Binh-Cirlot G., Fabre J. TACITE: A transient tool for multiphase pipeline and well simulation *paper SPE 28545*. **1994**. (in Eng.)
- [10] Tang Y., Shmidt Z., Blais R. Transient dynamic characteristics of the gaslift unloading process *paper SPE 38814*. **1997**. (in Eng.)
- [11] D. ter Avest, Oudeman P. A dynamic simulator to analyse and remedy gas-lift problems *paper SPE 30639*. **1995**. (in Eng.)
- [12] Asheim H. Verification of transient multi-phase flow simulator for gas lift applications *paper SPE 56659*. **1999**. (in Eng.)
- [13] Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А. Моделирование работы газлифтной скважины. *Доклад НАН Азерб.*, №4, **2008**, с. 107-116. (in Russ.)
- [14] Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А., Задачи управления газлифтным процессом при минимальных потерях дебита в подъемнике Институт Прикладной Математики **2013**, с.111-119. (in Russ.)
- [15] Алиев Ф.А., Есадуллаев Р., Исмаилов Н.А., Алгоритм решения цифровой минимаксной задачи определения оптимального режима газлифта *труды института прикладной математики* Т.1 №1 **2012** – С. 4-14. (in Russ.)
- [16] Шуруп В.И. Технология и техника добычи нефти *М., «Недра»*, **1983**, 510с. (in Russ.)
- [17] Барашкин Р.Л., Разработка модели и алгоритмов функционирования газлифтной скважины как объекта системы оперативного управления Российский государственный университет нефти и газа имени И.М. Губкина - Москва: **2011.**, 152 с. (in Russ.)
- [18] Данаев Н.Т., Корсакова Н.К., Пеньковский В.И. "Многофазная фильтрация и электромагнитное зондирование скважин", *Издательство "Эверо"*, **2014** г., 280 с. (in Russ.)
- [19] Жумагулов Б.Т., Темирбеков Н.М., Ермагамбетов Т.К. Численная реализация разностной схемы для модели неравновесной фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости. *Вестник НИИ ПК*, №1 (35) **2010**. - С.20-27. (in Russ.)
- [20] Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. "Вычислительная гидромеханика и теплообмен" Т2, *Издательство "Мир"*, **1990** г., 336 с. (in Russ.)

## REFERENCES

- [1] Nigmatulin R.I. The dynamics of multiphase media. V.1,2. M.: Nauka, **1987** (in Russ.)
- [2] Kutateladze S.S., Styrikovich M.A. The hydrodynamics of gas-liquid systems. M.: Energy, **1976** (in Russ.)
- [3] Samarsky A.A., Popov Y.M. Difference methods for solving problems of gas dynamics. M.: Nauka, **1992** - 424 p. (in Russ.)
- [4] Shokin Y.I. The first differential approximation. - Novosibirsk: Nauka, **1979** (in Russ.)
- [5] Nakoryakov V.E., Sokolov V.V., Schreiber I.R. Long-wave perturbations in the gas-liquid mixture Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. Fluid Dynamics, **1972**, number 5. (in Russ.)
- [6] Nakoryakov V.E. Pokusaev B.G., Schreiber I.R. Wave propagation in gas-liquid and vapor-liquid media *Novosibirsk.ITF*, **1983**, 238 p. (in Russ.)
- [7] Bendiksen K., Malnes D., Moe R., Nuland S. The dynamic two-fluid model OLGA: theory and application *SPE Production Engineering*. May, **1991**. P. 171. (in Eng.)
- [8] Minami K., Shoham O. Transient two-phase flow behavior in pipelines-experiment and modeling *Int. J. of Multiphase Flows*. **1994**. V. 20. № 4. P. 739. (in Eng.)
- [9] Pauchon C., Dhulesia H., Binh-Cirlot G., Fabre J. TACITE: A transient tool for multiphase pipeline and well simulation, *paper SPE 28545*, **1994**. (in Eng.)
- [10] Tang Y., Shmidt Z., Blais R. Transient dynamic characteristics of the gaslift unloading process, *paper SPE 38814*, **1997**. (in Eng.)
- [11] D. ter Avest, Oudeman P. A dynamic simulator to analyse and remedy gas-lift problems, *paper SPE 30639*, **1995**. (in Eng.)
- [12] Asheim H. Verification of transient multi-phase flow simulator for gas lift applications, *paper SPE 56659*, **1999**. (in Eng.)

- [13] Aliev F.A., Ilyasov M.H., Dzhamalbekov M.A. Simulation of gas lift wells. *The report of the Azerbaijan National Academy of Sciences*, №4, **2008**, p. 107-116. (in Russ.)
- [14] Aliev F.A., Ismailov N., gas-lift process management tasks with minimal loss of flow rate in a lift, Institute of Applied Mathematics **2013** p.111-119. (in Russ.)
- [15] Aliev F.A. Sadullaev R., N. Ismailov, An algorithm for solving digital minimax problem of determining the optimal mode gas-lift, *Proceedings of the Institute of Applied Mathematics Vol.1 №1*, **2012**, pp 4-14. (in Russ.)
- [16] Shurov V.I. Technology and engineering of oil Moscow, Nedra, **1983**, 510 p. (in Russ.)
- [17] Barashkin R.L., The development of models and algorithms for operation of gas-lift well as the object of an operational management system, Russian State University of Oil and Gas named after IM Gubkin, Moscow, **2011**, 152 pp. (in Russ.)
- [18] Danaev N.T., Korsakova N.K., Penkovsky V.I. Multiphase flow and electromagnetic sounding wells, Publisher, Avery, **2014**. 280 p. (in Russ.)
- [19] Zhmagulov B.T., Temirbekov N.M., Ermagambetov T.K. Numerical realization of a difference scheme for model of nonequilibrium filtration of two-phase incompressible fluid, *Herald NIA RK*, №1 (35), **2010** - P.20-27. (in Russ.)
- [20] Anderson D., Tanehill J., Pletcher P. Computational hydrodynamics and heat exchange. Vol. 1, *Mir*, **1990**, 385 p. (in Russ.)

## ГАЗЛИФТ ҮРДСІНІҢ БІР ӨЛШЕМДІ МОДЕЛІНІҢ САНДЫҚ ШЕШІМІ

Н.М. Темірбеков<sup>1</sup>, А.К. Тураров<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Д. Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан мемлекеттік техникалық университеті Өскемен, Қазақстан

**Түйін сөздер:** байланысты ажырау, фазалардың бөліну шекарасы, газ-сұйық қоспасы, газлифт.

**Аннотация.** Қозғалысы газлифт ұңғымасында гипреболалық типтегі дербес туындылы дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын газлифт үрдісінің бір өлшемді моделіне сандық үлгілеу жүргізіледі және қарастырылады. Ішкі облыстары газ, сұйық және газ-сұйық қоспа шекараларының маңында қоюланатын біркелкі емес торда газлифт үрдісінің моделіне айырымдық сұлбалар құрастырылды.

Бұл мақалада, газлифт ұңғымасының математикалық моделі құрастырылды. Ұңғыма мен оның сақиналы бөлігінде ағыс екі фазалы және изотермиялық деп жорамалданатын газлифт ұңғымасының бір өлшемді моделі қарастырылады. Зерттелінді үрдісті сипаттайтын жүйе қоғалыс теңдеуі, үзіліссіздік теңдеуі мен термодинамикалық күй теңдеуі, концентрация және гидравликалық кедергілерден тұрады. Сұйық фазасының тығыздығын айқын түрде анықтайтын формуласын алуға мүмкіндік беретін фазалардың бөліну шекараларына газ, сұйық және газ-сұйық қоспаларына сәйкестік шарты қойылады. Газ, сұйық және газ-сұйық қоспа шекараларының маңында қоюланатын біркелкі емес адаптивті торда ақырлы-айырымдық сұлбасы құрастырылды. Ұсынылған алгоритмнің нәтижесі жеке алынған мұнай ұңғымасының мысалында көркемделген.

*Поступила 13.03.2016 г.*