N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 3, Number 307 (2016), 12 – 22

ON THE PERIODIC SOLUTIONS FOR THE SYSTEM OF PARTIAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

A.T. Assanova

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: assanova@math.kz, anarasanova@list.ru

Key words: integro-differential, period, problem, algorithm, solvability.

Abstract. The periodic problem for a system of partial integro-differential equations is considered. The questions of the existence unique periodic solution of the considering problem and ways of its construction are investigated. The problem is reduced to the Cauchy problem for a system of integral-differential equations and system of Volterra integral equations of the second kind by introducing an additional parameter. An algorithm for finding a solution obtained an equivalent problem is constructed and the conditions for its convergence are formulated. The conditions of the existence unique solution to the considered periodic problem for the system of partial integro-differential equations in the terms of initial data. The periodic problem on the plane for a system of hyperbolic equations with mixed derivatives is considered which leads to the investigated problem. The periodic problem on the plane is reduced to a periodic boundary value problem in a rectangle under the periodicity of the data. For the solve of periodic boundary value problem for the system of hyperbolic equations of second order is applied a method of introducing functional parameters. This problem is reduced to an equivalent problem, consisting of a periodic problem for the system of partial integro-differential equations with functional parameters and a periodic boundary value problem for a system of ordinary differential equations. The algorithms of finding solution to setting equivalent problem are proposed. The conditions of feasibility and convergence of the constructed algorithm are proved in the terms of the data to problem. The conditions of the unique solvability to the periodic boundary value problem for the system of ordinary differential equations are formulated in the terms of initial data. Sufficient coefficient conditions of the unique solvability to the periodic boundary value problem for the system of hyperbolic equations are established. Theorem of the existence unique classical solution to the periodic problem on the plane for system of hyperbolic equations is formulated.

This results are supported by grant of the Ministry education and science of the Republic Kazakhstan No 0822 / ГФ4.

ӘОЖ 517.956

ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛЫ ИНТЕГРАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІНІҢ КЕЗЕҢДІ ШЕШІМДЕРІ ТУРАЛЫ

А.Т. Асанова

ҚР БҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан

Түйін сөздер: интегралдық-дифференциалдық, кезең, есеп, алгоритм, шешілімділік.

Аннотация. Дербес туындылы интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді есеп қарастырылады. Қарастырылып отырған есептің жалғыз кезеңі шешімінің бар болуы мәселелері және оны құру тәсілдері зерттеледі. Қосымша функционалдық параметр енгізу арқылы зерттеліп отырған есеп интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебі мен екінші текті Вольтерра интегралдық теңдеулер жүйесіне келтіріледі. Алынған пара-пар есептің шешімін табу алгоритмі тұрғызылады және оның жинақтылық шарттары тұжырымдалады. Қарастырылып отырған дербес туындылы интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді есептің жалғыз шешімінің бар болуының шарттары бастапқы берілімдер терминінде тағайындалады. Зерттеліп отырған есепке келтірілетін аралас туындылары бар гиперболалық теңдеулердің жүйесі үшін жазықтықтағы кезеңді есеп қарастырылады. Берілімдері кезеңді болған жағдайда зерттелінетін жазықтықтағы кезеңді есеп тіктөртбұрыштағы кезеңді шеттік есепке келтіріледі. Екінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді шеттік есепті шешу үшін функционалдық параметрлер енгізу әдісі қолданылады. Қарастырылып отырған есеп функционалдық параметрлері бар интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді есептен және жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді шеттік есептен тұратын пара-пар есепке келтіріледі. Осы пара-пар есептің шешімін табудың алгоритмдері ұсынылған. Құрылған алгоритмнің жүзеге асырылымдығы мен жинақтылығы шарттары есептің берілімдері терминінде алынған. Жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді шеттік есептің бірмәнді шешілімділігінің шарттары бастапқы берілімдер терминінде тұжырымдалады. Гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді шеттік есептің бірмәнді шешілімділігінің коэффициенттік жеткілікті шарттары тағайындалған. Гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін жазықтықтағы кезеңді есептің жалғыз классикалық шешімінің бар болуы туралы теорема тұжырымдалған.

Гиперболалық тектес дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер нақты физикалық процестердің математикалық моделі ретінде қолданыстарда жиі кездеседі және дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің қазіргі замангы теориясының ауқымды әрі белсенді дамып жатқан бөлігін құрайды. Екінші ретті гиперболалық тектес теңдеулер теориясында көптеген физикалық есептерді шешу барысында туындайтын дербес туындылы интегралдық-дифференциалдық теңдеулер мацызды орын алады. Екінші ретті гиперболалық теңдеулер теориясыныц басты және көп зерттелген есептерінің бірі – кезеңді шеттік есеп болып саналады, оны шешу үшін Фурье әдісі, біртіндеп жуықтау әдісі, функционалдық талдау әдістері мен вариациялық әдіс қолданылды, шолу мен еңбектер библиографиясын [1-16] жұмыстарынан көруге болады. Екінші ретті гиперболалық тектес теңдеулер үшін кезеңді есептерді қарастыру және шешу барысында дербес туындылы интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін кезеңді есептерді шешу мәселесі көптеген еңбектерде кездеседі.

Екінші жагынан, гиперболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін кезеңді шеттік есептерді зерттеудің қажеттілігі практиканың сұраныстармен де анықталады: физика, химия, биология радио мен электротехниканың әралуан мәселелерін шешуге қолданыстары бар. Ауа агындары арқылы кептіру және газдық динамикадагы изоэнтропиялық бірөлшемді жазық агыстың процестерін қарастыру кезінде, сызықты және бейсызық изотермадагы газдардың сорбциясының динамикасы мен кинетикасында, су тазалагыш сүзгілердегі аз концентрацияланган су суспензияларын фильтрациялық агартудың кинетикасын сипаттаганда, серпінді және тұтқыр ортадагы соққылық толқындарды зерттеу кезінде екінші ретті аралас туындылы гиперболалық теңдеулер жүйесі дербес туындылы интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесімен тыгыз байланыста қолданылады. Осыларды ескерсек, дербес туындылы интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есептерді зерттеудің көкейкесті екендігі шыгады.

Ұсынылып отырган мақалада интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді шеттік есеп қарастырылады

$$\frac{\partial v}{\partial t}=A(t,x)v+B(t,x)\int_0^x \frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t}d\xi+C(t,x)\int_0^x v(t,\xi)d\xi+F(t,x), \tag{1}$$

$$v(0,x)=v(T,x),\ x\in[0,\omega], \tag{2}$$

мұнда $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$ $(n\times n)$-матрицалары, $F(t,x)$ n - вектор-функциясы $\Omega=[0,T]\times[0,\omega]$ облысында үзіліссіз деп жорамалданады.

(1) теңдеулер жүйесі t айнымалысы бойынша дифференциалдық, ал x айнымалысы бойынша интегралдық болып табылады. (2) кезеңді шарты барлық $x\in[0,\omega]$ үшін орындалуы керек.

(1), (2) есебінің *шешімі* деп Ω облысында үзіліссіз әрі t айнымалысы бойынша үзіліссіз дифференциалданатын, барлық $(t,x)\in\Omega$ үшін (1) теңдеулер жүйесін және барлық $x\in[0,\omega]$ үшін (2) кезеңді шартын қагаттандыратын $v(t,x)$ n- вектор-функциясын атаймыз.

Бұл жұмыста (1), (2) есебінің шешімінің бар болуы және жалгыздыгы мәселелері зерттеледі. Осы есептің жуық шешімін табу алгоритмі ұсынылады және оның жинақтылыгы дәлелденеді. (1), (2) есебінің жалгыз шешімінің бар болуының шарттары бастапқы берілімдер терминдерінде тагайындалады.

(1), (2) кезеңді есебін шешу үшін параметрлеу әдісін [17] пайдаланамыз.

$\lambda(x) = \widetilde{v}(0,x)$ белгілеуін енгізейік. (1), (2) есебінде $v(t,x) = \widetilde{v}(t,x) + \lambda(x)$ алмастыруын жасайық. Онда келесі пара-пар есепке келеміз

$$\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial t} = A(t,x)\widetilde{v} + B(t,x)\int_0^x \frac{\partial \widetilde{v}(t,\xi)}{\partial t} d\xi + C(t,x)\int_0^x \widetilde{v}(t,\xi)d\xi +$$

$$+ A(t,x)\lambda(x) + C(t,x)\int_0^x \lambda(\xi)d\xi + F(t,x), \qquad (3)$$

$$\widetilde{v}(0,x) = 0, \qquad x \in [0,\omega], \qquad (4)$$

$$\widetilde{v}(T,x) = 0, \qquad x \in [0,\omega]. \qquad (5)$$

(3)-(5) есебінің шешімі деп $(\lambda(x), \widetilde{v}(t,x))$ функциялар жұбын атаймыз, мұнда $\widetilde{v}(t,x)$ функциясы Ω облысында үзіліссіз және t айнымалысы бойынша үзіліссіз дифференциалданады, $\lambda(x)$ функциясы $[0,\omega]$ аралығында үзіліссіз, (3) теңдеулер жүйесін және (4), (5) шарттарын қанағаттандырады.

Бекітілген $\lambda(x)$ үшін (3), (4) есебі интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебі болады. Ал (5) шарт $\lambda(x)$ белгісіз параметрін табуға мүмкіндік береді.

(3), (4) Коши есебінің шешімі келесі Вольтерра интегралдық теңдеулер жүйесіне пара-пар болады

$$\widetilde{v}(t,x) = \int_0^t A(\tau,x)\widetilde{v}(\tau,x)d\tau + \int_0^t B(\tau,x)\int_0^x \frac{\partial \widetilde{v}(\tau,\xi)}{\partial \tau} d\xi d\tau + \int_0^t C(\tau,x)\int_0^x \widetilde{v}(\tau,\xi)d\xi d\tau +$$

$$+ \int_0^t A(\tau,x)d\tau \cdot \lambda(x) + \int_0^t C(\tau,x)d\tau \cdot \int_0^x \lambda(\xi)d\xi + \int_0^t F(\tau,x)d\tau, \quad (t,x) \in \Omega. \qquad (6)$$

(6) $\widetilde{v}(t,x)$ функциясының кейіптемесінен $t = T$ болғандағы мәнін тауып (5) шартына қоятын болсақ төмендегі өрнекті аламыз

$$\int_0^T A(\tau,x)d\tau \cdot \lambda(x) + \int_0^T C(\tau,x)d\tau \cdot \int_0^x \lambda(\xi)d\xi = -\int_0^T F(\tau,x)d\tau -$$

$$- \int_0^T A(\tau,x)\widetilde{v}(\tau,x)d\tau - \int_0^T B(\tau,x)\int_0^x \frac{\partial \widetilde{v}(\tau,\xi)}{\partial \tau} d\xi d\tau - \int_0^T C(\tau,x)\int_0^x \widetilde{v}(\tau,\xi)d\xi d\tau, \quad x \in [0,\omega]. \qquad (7)$$

$\widetilde{v}(t,x)$ функциясы бекітілген жағдайда бұл теңдік $\lambda(x)$ функциясына қатысты Вольтерра интегралдық теңдеулер жүйесі болады.

Егер $\lambda(x)$ белгілі болатын болса, (3), (4) интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебінен $\widetilde{v}(t,x)$ функциясын табамыз, ал керісінше, $\widetilde{v}(t,x)$ функциясы белгілі болса (7) Вольтерра интегралдық теңдеулер жүйесінен $\lambda(x)$ функциясын табамыз.

Бұл жерде $\widetilde{v}(t,x)$ функциясы да, $\lambda(x)$ функциясы да белгісіз болғандықтан,

(3)-(5) есебінің шешімі - $(\lambda(x), \widetilde{v}(t,x))$ функциялар жұбын табу үшін итерациялық процесс пайдаланылады.

(3)-(5) есебінің шешімі - $(\lambda^*(x), \widetilde{v}^*(t,x))$ жұбын $(\lambda^{(k)}(x), \widetilde{v}^{(k)}(t,x))$ жұптарынан тұратын тізбектің шегі ретінде, мұнда $k = 0,1,2,\dots$, келесі алгоритм бойынша табамыз:

0-қадам. 1) (4) шартын пайдаланып, (7) интегралдық теңдеулер жүйесінің оң жағында $\widetilde{v}(t,x) = 0$, $\dfrac{\partial \widetilde{v}(t,x)}{\partial t} = 0$, деп есептеп, $\lambda^{(0)}(x)$ алғашқы жуықтауын барлық $x \in [0,\omega]$ үшін табамыз; *2)* (3), (4) интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебінен, теңдеудің оң жағында $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$ деп санап, $\widetilde{v}^{(0)}(t,x)$ алғашқы жуықтауын барлық $(t,x) \in \Omega$ үшін табамыз;

1-қадам. 1) (7) интегралдық теңдеулер жүйесінің оң жағында $\widetilde{v}(t,x)=\widetilde{v}^{(0)}(t,x)$, $\dfrac{\partial\widetilde{v}(t,x)}{\partial t}=\dfrac{\partial\widetilde{v}^{(0)}(t,x)}{\partial t}$, деп есептеп, $\lambda^{(1)}(x)$ жуықтауын барлық $x\in[0,\omega]$ үшін табамыз; *2*) (3), (4) интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебінен, теңдеудің оң жағында $\lambda(x)=\lambda^{(1)}(x)$ деп санап, $\widetilde{v}^{(1)}(t,x)$ жуықтауын барлық $(t,x)\in\Omega$ үшін табамыз;

Одан әрі жалғастыра береміз.

k *-қадам. 1*) (7) интегралдық теңдеулер жүйесінің оң жағында $\widetilde{v}(t,x)=\widetilde{v}^{(k-1)}(t,x)$, $\dfrac{\partial\widetilde{v}(t,x)}{\partial t}=\dfrac{\partial\widetilde{v}^{(k-1)}(t,x)}{\partial t}$, деп есептеп, $\lambda^{(k)}(x)$ жуықтауын барлық $x\in[0,\omega]$ үшін табамыз; *2*) (3), (4) интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебінен, теңдеудің оң жағында $\lambda(x)=\lambda^{(k)}(x)$ деп санап, $\widetilde{v}^{(k)}(t,x)$ жуықтауын барлық $(t,x)\in\Omega$ үшін табамыз.

Ұсынылған алгоритмнің жүзеге асырылымдығы және жинақтылығы шарттары, оған қоса (3)-(5) есебінің бірмәнді шешілімділігі шарттарын тұжырымдау үшін келесі белгілеулерді енгізейік

$$\alpha=\max_{(t,x)\in\Omega}\|A(t,x)\|,\ \beta=\max_{(t,x)\in\Omega}\|B(t,x)\|,\ \chi=\max_{(t,x)\in\Omega}\|C(t,x)\|,\ \widetilde{\alpha}=\alpha+\omega e^{\beta\omega}[\alpha+\omega\chi]+\omega\chi .$$

Келесі теорема орынды болады.

1 теорема. *Төмендегі шарттар орындалсын:*

i) $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$ $(n\times n)$*-матрицалары,* $F(t,x)$ n*- вектор-функциясы* Ω *облысында үзіліссіз болсын;*

ii) $\widetilde{A}(x)=\int\limits_0^T A(\tau,x)d\tau$ *матрицасы барлық* $x\in[0,\omega]$ *үшін қайтарымды және* $\gamma=\max\limits_{x\in[0,\omega]}\|[\widetilde{A}(x)]^{-1}\|$ *болсын;*

iii) $e^{\gamma\theta T\omega}\gamma\left\{\left[e^{\widetilde{\alpha}T}-1-\widetilde{\alpha}T\right]+\left[e^{\beta\omega}-1\right](\alpha+\omega\theta)T\right\}<1$ *теңсіздігі орынды болсын.*

Онда (3)-(5) есебінің жалғыз шешімі - $(\lambda^*(x),\widetilde{v}^*(t,x))$ *функциялар жұбы бар болады және келесі теңсіздікті қанағаттандырады*

$$\max_{(t,x)\in\Omega}\|\widetilde{v}^*(t,x)|+\max_{x\in[0,\omega]}\|\lambda^*(x)\|\le K(T,\omega)\max_{(t,x)\in\Omega}\|F(t,x)\|, \tag{8}$$

мұндағы $K(T,\omega)$ *- бастапқы берілімдер арқылы өрнектелетін оң сан.*

1 теореманың дәлелдеуі жоғарыдағы алгоритмге сәйкес, [11] жұмыстағы 1 теореманың дәлелдеуіне ұқсас жүргізіледі.

Табылған $\widetilde{v}^*(t,x)$ және $\lambda^*(x)$ функциялары арқылы (1), (2) есебінің шешімі - $v^*(t,x)$ функциясын құрамыз: $v^*(t,x)=\widetilde{v}^*(t,x)+\lambda^*(x)$.

(1), (2) есебі мен (3)-(5) есебі пара-пар болғандықтан, 1 теоремадан келесі тұжырым шығады.

2 теорема. *1 теореманың i)-iii) шарттары орындалсын.*

Онда (1), (2) интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді есебінің жалғыз шешімі - $v^*(t,x)$ *функциясы бар болады және келесі теңсіздікті қанағаттандырады*

$$\max_{(t,x)\in\Omega}\|v^*(t,x)\|\le K(T,\omega)\max_{(t,x)\in\Omega}\|F(t,x)\|. \tag{9}$$

Енді (1), (2) кезеңді есебін зерттеу қажеттілігі туындайтын екінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді есепке көшейік.

R^2 жазықтығында кезеңді шарттары бар аралас туындылары бар екінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйесі қарастырайық

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}=A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}+B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t}+C(t,x)u+f(t,x), \tag{10}$$

$$u(t+T,x)=u(t,x), \quad (t,x)\in R^2, \tag{11}$$

$$u(t,x+\omega)=u(t,x), \quad (t,x)\in R^2, \tag{12}$$

мұнда $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$ $(n\times n)$-матрицалары, $f(t,x)$ n- вектор-функциясы R^2 жазықтығында үзіліссіз, әрі $(T,\omega)-$кезеңді, яғни мына теңдіктер орын алады $A(t+T,x)=A(t,x)$, $A(t,x+\omega)=A(t,x)$, $B(t+T,x)=B(t,x)$, $B(t,x+\omega)=B(t,x)$, $C(t+T,x)=C(t,x)$, $C(t,x+\omega)=C(t,x)$, $f(t+T,x)=f(t,x)$, $f(t,x+\omega)=f(t,x)$, $(t,x)\in R^2$.

R^2 жазықтығында үзіліссіз $u(t,x)$ функциясы, үзіліссіз $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\partial x}$ туындылары бар болып, (10) жүйесінің классикалық $(T,\omega)-$кезеңді шешімі деп аталады, егер ол (3) теңдеулер жүйесін барлық $(t,x)\in R^2$ үшін және (11), (12) кезеңділық шарттарын қанағаттандыратын болса.

$C(\Omega,R^n)$ (сәйкесінше $C([0,T],R^n)$, $C([0,\omega],R^n)$ арқылы Ω ($[0,T]$, $[0,\omega]$) облысында үзіліссіз $u:\Omega\to R^n$ ($\psi:[0,T]\to R^n, \varphi:[0,\omega]\to R^n$) функцияларының кеңістігін белгілейміз, нормасы төмендегідей

$$\|u\|_0=\max_{(t,x)\in\Omega}\|u(t,x)\| \ (\|\psi\|_1=\max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|, \|\varphi\|_2=\max_{x\in[0,\omega]}\|\varphi(x)\|),$$

мұнда $\|u(t,x)\|=\max_{i=1,n}|u_i(t,x)|$, $\|A(t,x)\|=\max_{i=1,n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}(t,x)|$.

Қарастырылып отырған (10-(12) есебі үшін

$$u(0,x)=u(T,x), \quad x\in[0,\omega], \tag{13}$$

$$u(t,0)=u(t,\omega), \quad t\in[0,T], \tag{14}$$

теңдіктері (t,x) бойынша Пуанкаре кезеңділық шартының баламасы болады

$u(t,x)\in C(\Omega,R^n)$ функциясы, $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}\in C(\Omega,R^n)$, $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\in C(\Omega,R^n)$, $\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\partial x}\in C(\Omega,R^n)$ дербес туындылары бар болып, (10), (13), (14) есебінің классикалық шешімі деп аталады, егер ол (10) теңдеулер жүйесін барлық $(t,x)\in\Omega$ үшін қанағаттандыратын болса және (13), (14) шеттік шарттары орындалатын болса.

$u(t,x)$ - (10), (13), (14) есебінің классикалық шешімі болсын. Онда $t=kT$, $x=m\omega$, $k,m\in Z$, характеристикаларының қасиеттеріне орай және (13), (14) теңдіктері бойынша, $u(t,x)$ функциясының t,x бойынша R^2 жазықтығына сәйкесінше T мен ω кезеңдерімен жалғасы болып табылатын $u^*(t,x)$ функциясы (10) жүйесінің классикалық $(T,\omega)-$кезеңді шешімі болады, яғни екі айнымалы бойынша кезеңділық шарттары орындалады $u^*(t+T,x)=u^*(t,x)$, $u^*(t,x+\omega)=u^*(t,x)$, $(t,x)\in R^2$.

(10) жүйесінің дербес жағдайлары үшін жазықтықтағы кезеңді есеп [18-20] жұмыстарында функционалдық параметрлер енгізу әдісімен [21-23] зерттелген болатын. Жаңа белгісіз функциялар енгізу арқылы қарастырылып отырған есеп жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді шеттік есептер әулетіне және функционалдық қатынастарға келтірілген еді. Есептің берілімдері терминдерінде шешілімділік шарттары тағайындалған болатын. Енді екінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін жазықтықтағы кезеңді есептің бірмәнді шешілімділігі мәселесі (1), (2) дербес туындылы интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді есептің бірмәнді шешілімділігі мәселесіне әкелінеді. Жаңа белгісіз функциялар енгізу арқылы (10), (13), (14) есебі дербес туындылы интеґралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді шеттік есепке және жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді шеттік есепке

келтіріледі. Алынған есептердің шешімін табу алғоритмдері құрылады және жинақтылығы шарттары келтіріледі. (10), (13), (14) есебінің жалғыз классикалық шешімінің бар болуы шарттары бастапқы берілімдер терминдерінде алынған.

(10), (13), (14) есебінен пара-пар есепке көшу жолын көрсетейік. Бұл жерде қосымша функционалдық параметр енгіземіз: $\mu(t) = u(t,0)$ деп белгілейік. (10), (13), (14) есебінде ізделінді $u(t,x)$ функциясын $u(t,x) = \widetilde{u}(t,x) + \mu(t)$ түрінде алмастырайық. Онда біз келесі пара-пар есепке көшеміз

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + C(t,x)\widetilde{u} + B(t,x)\dot{\mu}(t) + C(t,x)\mu(t) + f(t,x), \tag{15}$$

$$\widetilde{u}(0,x) = \widetilde{u}(T,x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{16}$$

$$\widetilde{u}(t,0) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{17}$$

$$\widetilde{u}(t,\omega) = 0, \qquad t \in [0,T]. \tag{18}$$

Оған қоса, (13) шарттан $\mu(0) = \mu(T)$ теңдігі туындайды.

(15)-(18) есебінің шешімі деп $(\mu(t), \widetilde{u}(t,x))$ функциялар жұбын атаймыз, мұнда $\widetilde{u}(t,x)$ функциясының Ω облысында бірінші ретті және аралас екінші ретті үзіліссіз туындылары бар, $\mu(t)$ функциясы $[0,T]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданады, (15) теңдеулер жүйесін және (16)-(18) шарттарын қанағаттандырады.

(15)--(18) есебі бекітілген $\mu(t)$ үшін Ω облысында $\widetilde{u}(t,x)$ функциясына қатысты бейлокал жартылай кезеңді шеттік есеп болып саналады. Ал (18) қатынасы кезеңді шартты қанағаттандыратын белгісіз $\mu(t)$ функционалдық параметрін табуға мүмкіндік береді.

Жаңа белгісіз $V(t,x) = \dfrac{\partial \widetilde{u}(t,x)}{\partial x}$ функциясын енгізейік. Сонда (17) шартты ескере отырып, келесі теңдіктерді аламыз:

$$\widetilde{u}(t,x) = \widetilde{u}(t,0) + \int_0^x V(t,\xi)d\xi = \int_0^x V(t,\xi)d\xi, \quad \frac{\partial \widetilde{u}(t,x)}{\partial t} = \int_0^x \frac{\partial V(t,\xi)}{\partial t} d\xi.$$

Ендеше (15)-(18) есебін келесі түрде жазуға болады

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A(t,x)V + B(t,x)\int_0^x \frac{\partial V(t,\xi)}{\partial t}d\xi + C(t,x)\int_0^x V(t,\xi)d\xi + B(t,x)\dot{\mu}(t) + C(t,x)\mu(t) + f(t,x), \tag{19}$$

$$V(0,x) = V(T,x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{20}$$

$$\widetilde{u}(t,\omega) = \int_0^\omega V(t,\xi)d\xi = 0, \qquad t \in [0,T]. \tag{21}$$

$$\mu(0) = \mu(T). \tag{22}$$

(20) шарт (16) және (17) шарттарына пара-пар болады.

(19) теңдеулер жүйесі $V(t,x)$ функциясына қатысты $\mu(t)$ функционалдық параметрі бар интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі болып табылады. (20) шарты уақыт бойынша кезеңділық шарты болады. (21) қатынасы (22) шартымен бірге белгісіз $\mu(t)$ параметрін анықтауға мүмкіндік береді.

(19)–(22) есебінің шешімі деп $(V(t,x), \mu(t))$ функциялар жұбын атаймыз, мұнда $V(t,x)$ функциясының Ω облысында t бойынша бірінші ретті үзіліссіз туындысы бар, $\mu(t)$ функциясы $[0,T]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданады, (19) интеғралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесін, (20) шартын, (21) қатынасы мен (22) шартын қанағаттандырады.

(21) теңдігін t бойынша дифференциалдасақ, $\int_0^\omega \frac{\partial V(t,\xi)}{\partial t} d\xi = 0$ теңдігі шығады. Одан кейін, (19) теңдеулер жүйесінің оң жағын осы интегралға $x=\xi$ мәнінде қоятын болсақ, келесі теңдеулер жүйесін аламыз

$$\int_0^\omega B(t,\xi)d\xi \cdot \dot{\mu}(t) = -\int_0^\omega C(t,\xi)d\xi \cdot \mu(t) - \int_0^\omega f(t,\xi)d\xi -$$

$$-\int_0^\omega A(t,)V(t,\xi)d\xi - \int_0^\omega B(t,\xi)\int_0^\xi \frac{\partial V(t,\xi_1)}{\partial t} d\xi_1 d\xi - \int_0^\omega C(t,\xi)\int_0^\xi V(t,\xi_1)d\xi_1 d\xi . \qquad (23)$$

(23) теңдеулер жүйесі (22) кезеңді шартымен бірге, $V(t,x)$ функциясы бекітілген жағдайда, $\mu(t)$ функциясына қатысты жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді шеттік есеп болады.

Сонымен, $(V(t,x),\mu(t))$ функциялар жұбына қатысты (19), (20) және (23), (22) есептеріне келдік. Егер $\mu(t)$ функциясы (әрі туындысы $\dot{\mu}(t)$) белгілі болса, онда (19), (20) интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді шеттік есептен $V(t,x)$ функциясын табуға болады. Керісінше, егер $V(t,x)$ функциясы (әрі дербес туындысы $\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}$) белгілі болса, онда (23), (22) жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді шеттік есебінен $\mu(t)$ функциясы табылады. Бұл жерде $V(t,x)$ функциясы да, $\mu(t)$ функциясы да белгісіз, сондықтан (19), (20), (23), (22) есебінің шешімі болатын $(V(t,x),\mu(t))$ функциялар жұбын анықтау үшін итерациялық процесті пайдаланамыз.

(19), (20), (23), (22) есебінің шешімі - $(V^*(t,x),\mu^*(t))$ жұбын $(V^{(m)}(t,x),\mu^{(m)}(t))$ жұптарынан тұратын тізбектің шегі ретінде, мұнда $m=0,1,2,\ldots$, келесі P алгоритмі бойынша табамыз:

0-қадам. а) (19), (20) интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді есебінен, теңдеудің оң жағында $\mu(t)=0$, $\dot{\mu}(t)=0$ деп санап, $V^{(0)}(t,x)$ алғашқы жуықтауын барлық $(t,x)\in\Omega$ үшін табамыз; ә) (23), (22) жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі кезеңді есебінен, оң жағында $V(t,x)=V^{(0)}(t,x)$, $\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial V^{(0)}(t,x)}{\partial t}$ деп санап, $\mu^{(0)}(t)$ функциясын барлық $t\in[0,T]$ үшін табамыз.

1-қадам. а) (19), (20) интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді есебінен, теңдеудің оң жағында $\mu(t)=\mu^{(0)}(t)$, $\dot{\mu}(t)=\dot{\mu}^{(0)}(t)$ деп санап, $V^{(1)}(t,x)$ функциясын барлық $(t,x)\in\Omega$ үшін табамыз; ә) (23), (22) жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді есебінен, оң жағында $V(t,x)=V^{(1)}(t,x)$, $\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial V^{(1)}(t,x)}{\partial t}$ деп санап, $\mu^{(1)}(t)$ функциясын барлық $t\in[0,T]$ үшін табамыз.

Одан әрі жалғастыра береміз.

m-қадам. а) (19), (20) интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді есебінен, теңдеудің оң жағында $\mu(t)=\mu^{(m-1)}(t)$, $\dot{\mu}(t)=\dot{\mu}^{(m-1)}(t)$ деп санап, $V^{(m)}(t,x)$ функциясын барлық $(t,x)\in\Omega$ үшін табамыз; ә) (23), (22) жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі

үшін кезеңді есебінен, оң жағында $V(t,x)=V^{(m)}(t,x)$, $\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial t}=\dfrac{\partial V^{(m)}(t,x)}{\partial t}$ деп санап, $\mu^{(m)}(t)$ функциясын барлық $t\in[0,T]$ үшін табамыз.

Сонымен, ұсынылған P алгоритмінің әрбір қадамы екі кезецнен тұрады:

1) $V(t,x)$ функциясына қатысты (19), (20) кезецді есебі шешіледі; 2) $\mu(t)$ функциясына қатысты (23), (22) кезеңді есебі шешіледі.

(23), (22) жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді шеттік есебінің бірмәнді шешілімділік шарттары, $\widetilde{B}(t)=\int\limits_0^\omega B(t,\xi)d\xi$ матрицасы барлық $t\in[0,T]$ үшін қайтарымды болған жағдайда, [17] жұмыста екі нүктелі шеттік есептерге қатысты бастапқы берілімдер терминінде тағайындалған болатын. Ал (19), (20) интеғралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді шеттік есебі осы мақалада арнайы қарастырылып, жоғарыда қойылған (1), (2) есебінің бірмәнді шешілімділігінің шарттары анықталды.

Енді (23), (22) есебіне сәйкес келетін келесі жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесін қарастырайық

$$\int\limits_0^\omega B(t,\xi)d\xi\cdot\dot{\mu}(t)=-\int\limits_0^\omega C(t,\xi)d\xi\cdot\mu(t)-g(t), \tag{24}$$

мұнда $g(t)$ - $n-$өлшемді $[0,T]$ аралығында үзіліссіз функция.

Оған қоса $\widetilde{B}(t)=\int\limits_0^\omega B(t,\xi)d\xi$, $\widetilde{\beta}=\max\limits_{t\in[0,T]}\left\|[\widetilde{B}(t)]^{-1}\right\|$, $\widetilde{C}(t)=\int\limits_0^\omega C(\tau,\xi)d\xi$, $\widetilde{\chi}=\max\limits_{t\in[0,T]}\left\|[\widetilde{B}(t)]^{-1}\widetilde{C}(t)\right\|$ белгілеулерін енгізейік және $D(T)=\int\limits_0^T[\widetilde{B}(\tau)]^{-1}\widetilde{C}(\tau)d\tau$ матрицасы қайтарымды болсын.

Келесі тұжырым (24), (22) жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді есептің бірмәнді шешілімділігі шарттарын береді.

3 теорема. *Төмендегі шарттар орындалсын:*

i) $B(t,x)$, $C(t,x)$ *$(n\times n)$-матрицалары Ω облысында, $g(t)$ n- вектор-функциясы $[0,T]$ аралығында үзіліссіз болсын;*

ii) $\widetilde{B}(t)=\int\limits_0^\omega B(t,\xi)d\xi$ *матрицасы барлық $t\in[0,T]$ үшін қайтарымды болсын;*

iii) $D(T)=\int\limits_0^T[\widetilde{B}(\tau)]^{-1}\widetilde{C}(\tau)d\tau$ *матрицасы қайтарымды болсын және*

$\|[D(T)]^{-1}\|\le\sigma$ *болсын, мұнда σ - оң сан;*

iv) $\sigma\left|e^{\widetilde{\chi}T}-1-\widetilde{\chi}T\right|<1$ *теңсіздігі орынды болсын.*

Онда (24), (22) жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді есебінің жалғыз шешімі - $\mu^*(t)$ функциясы бар болады және келесі теңсіздікті қанағаттандырады

$$\max_{t\in[0,T]}\|\mu^*(t)\|\le k(T)\max_{t\in[0,T]}\|g(t)\|, \tag{25}$$

мұндағы $k(T)$ - бастапқы берілімдер арқылы өрнектелетін оң сан.

2 теореманың дәлелдеуі [17] жұмыстағы 1 теореманың дәлелдеуіне ұқсас жүргізіледі.

Жоғарыда келтірілген 2 теореманың және осы 3 теореманың негізінде (10), (13), (14) есебінің классикалық шешімінің бар болуы мен жалғыздығы шарттары тұжырымдалады. Бұл тұжырым жоғарыда тұрғызылған P алгоритмінің жинақтылық шарттарын да орнатады.

4 теорема. *i)* $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$ $(n\times n)$*-матрицалары,* $F(t,x)$ n*- вектор-функциясы* Ω *облысында үзіліссіз болсын;*

ii) 1 теореманың шарттары орындалсын;

iii) 2 теореманың шарттары орындалсын;

iv)

$$\max\left(\tilde{\chi}k(T)+1, k(T)\right)\tilde{\beta}\cdot\left[\tilde{\alpha}\omega+(\beta+\chi)\frac{\omega^2}{2}\right]\max\left(e^{\beta\omega}\left[(\alpha+\chi\omega)K(T,\omega)+1\right], K(T,\omega)\right)\cdot\{\beta+\chi\}<1$$

теңсіздігі орындалсын.

Онда (10), (13), (14) гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді шеттік есебінің $u^*(t,x)=\int_0^x V^*(t,\xi)d\xi+\mu^*(t)$ *жалғыз классикалық шешімі бар болады.*

Бастапқы берілімдердің $(T,\omega)-$кезеңділігін және сипаттамалардың қасиеттерін ескерсек, келесі тұжырым орынды болады.

5 теорема. *i)* $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$ $(n\times n)$*-матрицалары,* $f(t,x)$ n*- вектор-функциясы* R^2 *жазықтығында үзіліссіз және* $(T,\omega)-$*кезеңді болсын;*

және 4 теореманың ii)-iv) шарттары орындалсын.

Онда (10), (11), (12) гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін жазықтықтағы кезеңді есептің $u^*(t,x)$ *жалғыз классикалық* $(T,\omega)-$*кезеңді шешімі бар болады.*

Қорытынды. Сонымен, (1), (2) интеғралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді есеп зерттелді. (1), (2) интеғралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді есептің шешімін табу алғоритмі параметрлеу әдісі арқылы тұрғызылды. (1), (2) интеғралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін кезеңді есептің бірмәнді шешілімділігі шарттары бастапқы берілімдер терминінде тағайындалды. Мұндай есеп ғиперболалық теңдеулер жүйесі үшін жазықтықтағы кезеңді есепті қарастыру барысында туындайтыны көрсетілді. Бұл ғиперболалық теңдеулер жүйесі үшін жазықтықтағы кезеңді есептің шешімін табу алғоритмін құруға және оның жинақтылығын дәлелдеуге мүмкіндік берді. Оған қоса ғиперболалық теңдеулер жүйесі үшін жазықтықтағы кезеңді есептің жалғыз шешімінің бар болуы шарттарын бастапқы берілімдер арқылы орнатылды.

ӘДЕБИЕТ

[1] Vejvoda O. Herrmann L., Lovicar V. et al. Partial differential equations: time - periodic solutions. Prague: Martinus Nijhoff Publ, Hague, Boston, London, 1982. - 358 p.

[2] Перов А.И. Вариационные методы в теории нелинейных колебаний. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1981. - 196с.

[3] Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев: Наук. думка, 1984. - 264с.

[4] Митропольский Ю.А., Хома Г.П., Громяк М.И. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. Киев: Наук. думка, 1991. - 232с.

[5] Самойленко А.М., Ткач Б.П. Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. Киев: Наук. думка, 1992. - 208с.

[6] Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений. М.: Наука, 1998. - 191 с. - (Тр. МИАН; Т. 222)

[7] Cesari L. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Proc. Internat. Sympos. Non-linear Vibrations (Kiev 1961), Izd. Akad. Nauk Ukrain. SSR. Kiev. 1963. Vol. 2. P. 440-457.

[8] Cesari L. A criterion for the existence in a strip of periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1965. Vol. 14. No 2. P. 95-118.

[9] Aziz A.K. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations. // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 17. No 3. P. 557-566.

[10] Hale J.K. Periodic solutions of a class of hyperbolic equations containing a small parameter // Arch. Rational Mech. Anal. 1967. Vol. 23. No 5. P. 380-398.

[11] Lakshmikantham V., Pandit S.G. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Comput. and Math. 1985. Vol. 11. No 1-3. P. 249-259.

[12] Жестков С.В. О двоякопериодических решениях нелинейных гиперболи-ческих систем в частных производных //Украинский математический журнал. 1987. Т. 39. No 4. С. 521-523.

[13] Kiguradze T. Some boundary value problems for systems of linear partial differential equations of hyperbolic type //Mem. Differential Equations Math. Phys. 1994. Vol. 1. P. 1-144.

[14] Kiguradze T. On periodic in the plane solutions of second order hyperbolic systems // Archivum mathematicum. 1997. Tomus 33. No 4. P. 253-272.

[15] Kiguradze T. On periodic in the plane solutions of nonlinear hyperbolic equations // Nonlinear Analysis. 2000. Vol. 39. No 1. P. 173-185.

[16] Kiguradze T., Lakshmikantham V. On doubly periodic solutions of fourth-order linear hyperbolic equations // Nonlinear Analysis. 2002. Vol. 49. No 1. P. 87-112.

[17] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // USSR Computational mathematics and mathematical Physics. 1989. Vol. 29. No 1. P.34-46.

[18] Асанова А.Т. Периодическая краевая задача для систем гиперболических уравнений // Доклады НАН РК. 2002. No 4. С. 5-11.

[19] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Periodic solutions of systems of hyperbolic equations bounded on a plane // Ukranian Mathematical Journal. 2004. Vol. 56. No 4. P.682-694.

[20] Асанова А.Т. Аралас туындылары бар гиперболалық теңдеулердің арнайы түрдегі жүйесі үшін жазықтықтағы кезеңді есеп туралы // ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математика сер. 2015. No 4 (302). 104-117 Б.

[21] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique solvability of the boundary value problem for systems of hyperbolic equations with data on the characteristics // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2002. Vol.42. No 11. P. 1609-1621.

[22] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations // Differential Equations. 2003. Vol.39. No 10. P. 1414-1427.

[23] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations //Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2013. Vol. 402. No 1. P.167-178.

REFERENCES

[1] Vejvoda O. Herrmann L., Lovicar V. et al. Partial differential equations: time - periodic solutions. Prague : Martinus Nijhoff Publ, Hague, Boston, London, 1982. - 358p.

[2] Perov A.I. Variatsionnye metody v theorii nelineinyh kolebanii. Voronezh: Izd-vo Voronezh. Un-ta, 1981. -196s.

[3] Ptashnik B.I. Nekorrectnye granichnye zadachi dlia differentsial'nyh uravnenii s chastnymi proizvodnymi. Kiev: Nauk. dumka, 1984. - 264s.

[4] Mitropol'skii Yu.A., Khoma G.P., Gromiyak M.I. Asimptoticheskie metody issledovaniya kvazivolnovyh uravnenii giperbolicheskogo typa. Kiev: Nauk. dumka, 1991. - 232s.

[5] Samoilenko A.M., Tkach B.P. Chislenno-analiticheskie metody v teorii periodicheskih reshenii uravnenii s chastnymi proizvodnymi. Kiev: Nauk. dumka, 1992. - 208s.

[6] Kolesov A.Yu., Mishenko E.F., Rozov N.Kh. Asimptoticheskie metody issledovaniya periodicheskih reshenii nelineinyh giperbolicheskih uravnenii. M.: Nauka, 1998. - 191 s. - (Trudy MIAN; T.222)

[7] Cesari L. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Proc. Internat. Sympos. Nonlinear Vibrations (Kiev 1961), Izd. Akad. Nauk Ukrain. SSR. Kiev. 1963. Vol. 2. P. 440-457.

[8] Cesari L. A criterion for the existence in a strip of periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1965. Vol. 14. No 2. P. 95-118.

[9] Aziz A.K. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations. // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 17. No 3. P. 557-566.

[10] Hale J.K. Periodic solutions of a class of hyperbolic equations containing a small parameter // Arch. Rational Mech. Anal. 1967. Vol. 23. No 5. P. 380-398.

[11] Lakshmikantham V., Pandit S.G. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Comput. and Math. 1985. Vol. 11. No 1-3. P. 249-259.

[12] Zhestkov S.V. O dvoiyakoperiodicheskih resheniyah nelineinyh giperboli-cheskih system v chastnyh proizvodnyh //Ukrainskii matematicheskii journal. 1987. T. 39. No 4. S. 521-523.

[13] Kiguradze T. Some boundary value problems for systems of linear partial differential equations of hyperbolic type // Mem. Differential Equations Math. Phys. 1994. Vol. 1. P. 1-144.

[14] Kiguradze T. On periodic in the plane solutions of second order hyperbolic systems // Archivum mathematicum. 1997. Tomus 33. No 4. P. 253-272.

[15] Kiguradze T. On periodic in the plane solutions of nonlinear hyperbolic equations // Nonlinear Analysis. 2000. Vol. 39. No 1. P. 173-185.

[16] Kiguradze T., Lakshmikantham V. On doubly periodic solutions of fourth-order linear hyperbolic equations // Nonlinear Analysis. 2002. Vol. 49. No 1. P. 87-112.

[17] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // USSR Computational mathematics and mathematical Physics. 1989. Vol. 29. No 1. P.34-46.

[18] Asanova A.T. Periodicheskaiya kraevaiya zadacha dliya sistem giperbolicheskih uravnenii // Doklady NAN RK. 2002. No 4. S. 5-11.

[19] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Periodic solutions of systems of hyperbolic equations bounded on a plane // Ukranian Mathematical Journal. 2004. Vol. 56. No 4. P.682-694.

[20] Asanova A.T. About the periodic problem on the plane for the system of hyperbolic equations with mixed derivatives a special form // News of the NAS RK. Physico-mathematical series. 2015. No 4 (302). P.104-117.

[21] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique solvability of the boundary value problem for systems of hyperbolic equations with data on the characteristics // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2002. Vol.42. No 11. P. 1609-1621.

[22] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations // Differential Equations. 2003. Vol. 39. No 10. P. 1414-1427.

[23] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations //Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2013. Vol. 402. No 1. P.167-178.

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А.Т.Асанова

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: интегро-дифференциальное, период, задача, алгоритм, разрешимость.

Резюме. Рассматривается периодическая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. Исследуются вопросы существования единственного периодического решения рассматриваемой задачи и способы его построения. Путем введения дополнительного параметра исследуемая задача сводится к задаче Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений и системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Строится алгоритм нахождения решения полученной эквивалентной задачи и формулируются условия его сходимости. Устанавливаются условия существования единственного решения рассматриваемой периодической задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных в терминах исходных данных. Рассматривается периодическая задача на плоскости для системы гиперболических уравнений со смешанными производными, которая приводится к исследуемой задаче. При периодичности данных исследуемая периодическая задача на плоскости сводится к периодической краевой задаче в прямоугольнике. Для решения периодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений второго порядка применяется метод введения функциональных параметров. Рассматриваемая задача сводится к эквивалентной задаче, состоящей из периодической задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений с функциональными параметрами и периодической краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Предлагаются алгоритмы нахождения этой эквивалентной задачи. Получены условия осуществимости и сходимости построенного алгоритма в терминах данных задачи. Сформулированы условия однозначной разрешимости периодической краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в терминах исходных данных. Установлены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости периодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений. Сформулирована теорема о существовании единственного классического решения периодической задачи на плоскости для системы гиперболических уравнений.

Поступила 04.04.2016 г.