

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 307 (2016), 49 – 60

**THEORETICAL CALCULATION OF THE MAIN PARAMETERS  
OF WHITE DWARF STARS****K.A. Boshkayev, B.A. Zhami\*, Zh.A. Kalymova, G.Sh. Balgimbekov,  
A.S. Taukenova, Zh.N. Brisheva and N. Koyshybaev**

IETP, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, 050040, Kazakhstan

\*E-mail: [zhami.bakvtzhan@gmail.com](mailto:zhami.bakvtzhan@gmail.com)

**Key words:** static white dwarfs, equation of structure, degenerate electron gas, equation of state, classical physics, general theory of relativity.

**Abstract.** In this work, the main parameters of static and zero temperature white dwarfs such as mass, radius, central density, central pressure, gravitational potential and compactness have been theoretically determined both in classical physics and general relativity. For this purpose, the system of differential equations which consists of the equation of state of the degenerate electron gas within Chandrasekhar approximation, the mass balance equation and the hydrostatic equilibrium equation has been reduced to a dimensionless form and has been solved by the methods of numerical integration. The mass-central density, mass-radius, mass-compactness parameter and gravitational potential-radius relations have been constructed both in classical physics and general relativity, and their results have been compared with each other. It has been shown that the effects of general relativity play an important role near the Chandrasekhar limit, more precisely, for large masses and small radii, i.e. in strong gravitational fields. However, it is also shown that the difference between classical physics and general relativity decreases for small masses and large radii due to the weakness of the gravitational field. In addition, the analytical expression for the classical and relativistic mass-radius relation has been found and its accuracy has been estimated. The importance of the simple analytical expression has been clarified in theoretical calculations, studies of the dynamics of a binary star system and practical analyses. The work pursues scientific-pedagogical, theoretical and practical aims. The obtained results can be directly used to explain the observational data in the analysis and the study of physical processes in astronomy, celestial mechanics, relativistic astrophysics, physics of compact objects and cosmology.

**АҚ ЕРГЕЖЕЙЛІ ЖҮЛДЫЗДАРДЫҢ НЕГІЗГІ ПАРАМЕТРЛЕРІН  
ТЕОРИЯЛЫҚ ТҮРГЫДАН АНЫҚТАУ****Қ.А. Бошқаев, Б.А. Жәми\*, Ж.А. Қалымова, Г.Ш. Балгимбеков,  
А.С. Тауқенова, Ж.Н. Бришева, Н. Қойшыбаев**

ЭТФҒЗИ, Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, Алматы, 050040, Қазақстан

**Түйін сөздер:** статикалық ақ ергежейлі жұлдыздар, құрылым теңдеуі, айныған электрондық газ, күй теңдеуі, классикалық физика, жалпы салыстырмалық теориясы.

**Аннотация.** Жұмыста теориялық тұрғыдан статикалық және температурасы нөлге тең ақ ергежейлі жұлдыздардың масса, радиус, орталық тығыздық, орталық қысым, гравитациялық потенциал және компакттылық сияқты негізгі параметрлері классикалық физика және жалпы салыстырмалық теориясында анықталды. Осы мақсатта Чандрасекар жуықтауында айныған электрондық газдың күй теңдеуі, массаның баланс және гидростатикалық тепе-теңдік теңдеулерінен тұратын дифференциалдық теңдеулер жүйесі өлшемсіз түрге келтіріліп, сандық интегралдау әдістері арқылы шешілді. Есептеулер барысында, классикалық физика және жалпы салыстырмалық теориясы аясында масса-орталық тығыздық, масса-радиус, масса-компактылық параметрі және гравитациялық потенциал-радиус қатынастары тұрғызылды және нәтижелері өзара салыстырылды. Жалпы салыстырмалық теориясының эффектілері Чандрасекар шегіне жақындағанда, дәлірек айтсақ, үлкен массалар мен кіші радиустарда, яғни күшті гравитациялық өрісте маңызды рөл атқаратыны анықталды. Ал аз массалар мен үлкен радиустарда гравитациялық өрістің әлсіз

болуына байланысты классикалық физика мен жалпы салыстырмалық теориясының арасындағы айырмашылықтың азаятыны айқын көрсетілді. Сонымен бірге, классикалық және релятивтік масса-радиус қатынастары үшін аналитикалық өрнек табылды және оның қолдану дәлдігі бағаланды. Теориялық есептеулерде, қос жұлдызды жүйелердің динамикасын зерттеуде және практикалық анализ жасау барысында қарапайым аналитикалық өрнектердің маңызы айқындалды. Жұмыс ғылыми-педагогикалық, теориялық және практикалық сипатқа ие. Алынған нәтижелерді астрономияда, аспан механикасында, релятивтік астрофизикада, шағын объектілер физикасында және космологияда бақылаудан алынған мәліметтерді талдап түсіндіру үшін және физикалық үрдістерді зерттеу үшін тікелей қолдануға болады.

**Кіріспе.** Ақ ергежейлі (АЕ) жұлдыздар массасы Күн массасына  $M_{\odot}$  жуық, ал радиусы шамамен Күн радиусынан  $R_{\odot}$  жүз есе кіші, яғни көлемі Жер шамалас шағын жұлдыздар. Өлшемдері кіші, массасы үлкен болғандықтан ақ ергежейлі жұлдыздардың орташа тығыздығы ( $10^6 \text{г/см}^3 = 1 \text{т/см}^3$ ) әдеттегі жұлдыздардың тығыздығынан миллион есе жоғары [1]. Осындай үлкен тығыздықта атомдағы электрондық қабықшалар бұзылып, атомдар иондалады. Электрондар белгілі бір ядроға тиісті болмай, жұлдыздың ішінде барлық көлем бойынша қозғалып, айныған электрондық газды түзеді. Айныған электрондық газ кванттық табиғатқа ие және классикалық физикада оның баламасы жоқ. Ол кванттық механикадағы фермиондар үшін орындалатын Ферми-Дирак статистикасымен сипатталады.

Паули принципі бойынша барлық кванттық сандары бірдей екі электрон бір кванттық деңгейде (күйде) бола алмайды. Яғни, Паули принципі әрбір электрон алатын фазалық кеңістіктегі шекті кіші көлемді бекітеді. Дәл осындай жағдай ақ ергежейлі жұлдыздардың тепе-теңдік конфигурацияларына тән: электрондар ең кіші көлемді алған және гравитациялық сығылу осы электрондық газдың қысымымен теңгерілген [1-4].

Сонымен қатар, ақ ергежейлі жұлдыздардың ішкі қысымы ондағы айныған электрондық газдың қысымымен анықталады. Осы себептен ақ ергежейлі жұлдыздар кейде айныған ергежейлілер немесе айныған жұлдыздар деп те аталады. Ақ ергежейлідегі ақ сөзі осы кластағы бірінші ашылған жұлдыздардың (40 Эридиан және Сириус В – ыстық ақ ергежейлі жұлдыздар) түсімен байланысты. Жұлдыздың түсі оның беткі температурсына байланысты. Егер ақ ергежейлі жұлдыздар өте ыстық болса, олар көгілдір-ақ түс шығарады, ал суыған сайын қызыл түске қарай өзгере бастайды [1].

Қалыпты (бас тізбектегі) жұлдыздарда өздік гравитациялық тартылу күші термоядролық реакциядан бөлінетін жылулық энергиямен және газдың қысымымен теңгеріледі. Ақ ергежейлі жұлдыздар массасының жоғарғы шегі  $8M_{\odot}$  дейін болатын бас тізбектегі жұлдыздар эволюциясының соңғы сатысына жатады. Оларда ядролық синтез реакциясы жүрмейді. Сондықтан жеке ақ ергежейлі жұлдыздарда қосымша энергия көзі болмайды, тек пайда болғаннан қалған жылулық энергия қорының үлесінен жарық шығарады. Ал оларды гравитациялық коллапстан сақтап, орнықты күйде ұстап тұратын кәдімгі газдың жылулық қысымы емес, тек кванттық айныған электрондық газдың қысымы. Массасы үлкен ақ ергежейлі жұлдыздарда температураның рөлі мардымсыз. Сол себепті бірінші жуықтауда жұлдыз затының температурасын ескермеуге болады, тек қысым мен тығыздықтың өзара тәуелділігін қарастыру жеткілікті. Қысым мен тығыздық арасындағы біртәнді байланыстың нәтижесінде, теория масса мен радиустың арасында біртәнді қатынас болатынын көрсетеді. Алайда ақ ергежейлі жұлдыздың қалыпты жұлдыздардан тағы бір айырмашылығы олардың массасы өскен сайын, радиусы кішірейе береді. Бұл күй теңдеуінің кванттық және релятивистік сипатқа ие болғанның салдары болып табылады [1].

Сонымен қатар, ақ ергежейлі жұлдыздың массасының жоғарғы шегі бар. Ол Чандрасекар шегі  $M_{Ch} \approx 1.457 M_{\odot}$  деп аталады [5, 6]. Оны Субраманьян Чандрасекар 1931 жылы өзінің жұмысында көрсетті. Басқаша айтсақ, бұл шек ақ ергежейлі жұлдыз болудың жоғарғы шегі. Яғни ядросының массасы осы шектен аспайтын жұлдыздар өмірінің соңғы кезін ақ ергежейлі жұлдыз ретінде өткізеді. Мәселен, Күн де өмірінің соңында ақ ергежейлі жұлдызға айналады.

Егер ақ ергежейлі жұлдыздар басқа типтегі жұлдыздармен қос жүйеде болса, жағдай мүлдем басқаша орын алуы мүмкін. Мысалы, ақ ергежейлі жұлдыз бен бас тізбектегі жұлдыз қос жүйеде болса, ақ ергежейлі серігінің массасын аккреция арқылы алуы мүмкін. Мұндай жағдайда оның

массасы Чандрасекар шегінен артып Ia типті асқын жаңа жарылысқа алып келеді. Осы іспетті мысалдар өте көп [7, 8].

Жұмыстың 1-ші бөлімінде классикалық физика (КФ) және жалпы салыстырмалық теориясындағы (ЖСТ) гидростатикалық тепе-теңдік теңдеулері (Толмен-Оппенгеймер-Волков теңдеуі [9, 10, 11]); 2-ші бөлімінде айныған электрондық газдың күй теңдеуі; 3-ші бөлімінде теңдеулерді өлшемсіз түрге келтірудің жолдары; 4-ші бөлімінде дифференциалдық теңдеудің бастапқы шарттары беріліп, сандық шешімдері көрсетіледі және масса-радиус қатынасы үшін аналитикалық өрнек ұсынылып, дәлдігі бағаланады; 5-ші бөлімде жұмыстың нәтижелері қорытындыланып, болшағы және маңызы туралы талқыланады.

**Гидростатикалық тепе-теңдік теңдеуі.** Кез-келген статикалық жұлдызға әсер ететін екі күш бар: біріншісі өздік гравитациялық (тартылыс) күші және екіншісі ішкі қысым күші. Тепе-теңдіктегі жұлдыздарда өздік гравитациялық тартылу күші шамасы жағынан тең, ал бағыты жағынан қарама-қарсы жұлдыз затының ішкі қысым күшімен теңгеріледі. Мысалы қалыпты жұлдыздарда бұл газдың жылулық қозғалыс қысым күші, ақ ергежейлі жұлдыздар үшін бұл айныған электрондық газдың қысым күші, ал нейтрондық жұлдыздарда бұл айныған нейтрондық газдың қысым күші. Осы екі күштің теңдігі негізінде жұлдыздың құрылым теңдеулері қорытылып алынады [1-5]. Ньютондық сфералық-симметриялық және статикалық жұлдыздар үшін ішкі құрылым теңдеулері келесі түрде беріледі:

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad (1)$$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\rho(r) \frac{Gm(r)}{r^2}, \quad (2)$$

мұндағы,  $m(r)$  – жұлдыздың ішіндегі  $r$  радиуспен шектелген сфераның массасы,  $P(r)$  – жұлдыз затының қысымы,  $\rho(r)$  – жұлдыз затының тығыздығы және  $G$  – гравитациялық тұрақты. (1)-ші теңдеу жұлдыз массасының, ал (2)-ші теңдеу қысымның радиус бойынша қалай өзгеретіндігін көрсетеді. Сонымен қатар, (1)-ші теңдеу массалық баланс, ал (2)-ші теңдеу гидростатикалық тепе-теңдік теңдеуі деп аталады.

Массалық тығыздық пен энергиялық тығыздық арасындағы байланыс төмендегідей көрсетілген:

$$\rho(r) = \frac{\varepsilon(r)}{c^2}, \quad (3)$$

мұндағы,  $\varepsilon(r)$  – энергиялық тығыздық  $c$  – жарық жылдамдығы. Жоғарыдағы (1) және (2) ішкі құрылым теңдеулерін (3) қатынасын ескеріп, энергиялық тығыздық арқылы жазуға болады.

Ньютондық сфералық-симметриялық жұлдыздың ішкі гравитациялық потенциалы келесі өрнекпен анықталады:

$$\frac{d\varphi(r)}{dr} = \frac{Gm(r)}{r^2}, \quad (4)$$

ал сыртқы потенциал

$$\varphi(r) = -\frac{GM}{r}, \quad (5)$$

мұндағы,  $M = m(r = R)$  – жұлдыздың толық массасы,  $R$  – жұлдыздың толық радиусы.

Жалпы салыстырмалық теориясында сфералық-симметриялық статикалық жұлдыздардың ішкі құрылым теңдеулері келесі түрде беріледі:

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad (6)$$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\rho(r) \frac{Gm(r)}{r^2} \left( 1 + \frac{P(r)}{\rho(r)c^2} \right) \left( 1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r)c^2} \right) \left( 1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right)^{-1}, \quad (7)$$

мұндағы (7)-ші теңдеу жалпы салыстырмалық теориясындағы идеал сұйық сфераның гидростатикалық тепе-теңдік теңдеуі, әдебиетте Толмен-Оппенгеймер-Волков (ТОВ) теңдеуі деген атпен белгілі [9]. Бұл теңдеуді Эйнштейннің ғравитациялық өріс теңдеулерінен немесе энергияның локальды сақталу заңынан қорытып алуға болады. Теңдеудің толық қорыту жолы [3, 11] әдебиеттерде көрсетілген. (7) теңдеуінің классикалық шегінде (2) теңдеуі шығады.

Жалпы салыстырмалық теориясындағы сфералық-симметриялық жұлдыздың ішкі ғравитациялық потенциалы мына түрде берілген

$$\frac{d\varphi(r)}{dr} = \frac{Gm(r)}{r^2} \left( 1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r)c^2} \right) \left( 1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right)^{-1}, \quad (8)$$

ал жұлдыздың сыртқы потенциалы

$$\varphi(r) = \frac{c^2}{2} \ln \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right). \quad (9)$$

Сәйкестік принципі бойынша, (8) және (9) теңдеулерінің классикалық шегінде белгілі (4) және (5) теңдеулері алынады.

Ақ ергежейлі жұлдыздардың негізгі параметрлерін анықтау жоғарыдағы (1), (2) теңдеулер жүйесін шешу арқылы табылады (ЖСТ ақ ергежейлі жұлдыздары үшін (6), (7) теңдеулерді шешу қажет). Алайда белгісіз саны үшеу ( $m$ ,  $\rho$ ,  $p$ ) болғандықтан, жүйеге кіретін теңдеулер саны да сәйкесінше үшеу болуы қажет. Сол себепті, Чандрасекар жуықтауы бойынша, ақ ергежейлі жұлдыздардың заттын сипаттайтын айныған электрондық ғаздың күй теңдеуі үшінші теңдеу ретінде қолданылады.

**Айныған электрондық газдың күй теңдеуі.** Ақ ергежейлі жұлдыздың толық тығыздығы екі құраушыдан тұрады: нуклондардың тығыздығы және электрондардың тығыздығы. Электрондардың массасы нуклондардың массасымен салыстырғанда аз, сондықтан Чандрасекардың жуықтауы бойынша толық тығыздыққа қосатын үлесі ескерілмейді [1-5, 11, 12]. Яғни массалық тығыздық

$$\rho(r) = \frac{32}{3} \left( \frac{m_e}{m_n} \right)^3 \frac{K_n}{c^2} \left( \frac{A}{Z} \right) y^3(r). \quad (10)$$

Сонымен қатар нуклондардың кинетикалық энергиясы электрондардікімен салыстырғанда өте аз болғандықтан, толық қысымға қосатын үлесі де елеусіз, сондықтан толық қысым Ферми-Дирак статистикасымен сипатталатын релятивтік айныған электрондық ғаздың қысымымен анықталады [12]:

$$P(r) = \frac{4}{3} \left( \frac{m_e}{m_n} \right)^4 K_n \left[ y(r) (2y^2(r) - 3) \sqrt{1 + y^2(r)} + 3 \ln \left( y(r) + \sqrt{1 + y^2(r)} \right) \right], \quad (11)$$

мұндағы  $m_e$  – электронның массасы,  $m_n$  – нуклонның массасы,  $A$  – атомдық масса,  $Z$  – протондардың саны, ал  $K_n$  – тұрақты,  $y(r)$  – өлшемсіз Ферми импульсі

$$K_n = \frac{m_n^4 c^5}{32\pi^2 \hbar^3} \quad \text{және} \quad y(r) = \frac{p_F(r)}{m_e c}, \quad (12)$$

$p_F(r)$  – электронның Ферми импульсі,  $\hbar$  – келтірілген Планк тұрақтысы.

Жоғарыдағы жуықтауда, ақ ергежейлі жұлдыздер негізінен көміртегі  $^{12}_6\text{C}$ , оттегі  $^{16}_8\text{O}$  және магний  $^{24}_{12}\text{Mg}$  сияқты  $A/Z = 2$  болатын элементтерден тұрады және электрлік бейтарап деп есептелінеді [1, 3, 4]. Осыған орай, біз де  $A/Z = 2$  деп аламыз.

**Теңдеулерді өлшемсіз түрге келтіру.** (1)-(2) және (6)-(7) дифференциалдық теңдеулер жүйелерінің шешімдерін аналитикалық түрде алу мүмкін болмағандықтан, сандық интегралдау әдістеріне жүгінеміз. Есептеулерді жеңілдету үшін теңдеулерді өлшемсіз түрге келтіріп аламыз. Ол үшін физикалық шамаларды өлшемсіз шамалар арқылы өрнектейміз:

$$r = bx, \quad (13)$$

$$m(r) = \frac{c^2 b}{G} m^*(x), \quad (14)$$

$$\rho(r) = \frac{c^2}{Gb^2} \rho^*(x), \quad (15)$$

$$P(r) = \frac{c^4}{Gb^2} P^*(x), \quad (16)$$

$$\varphi(r) = c^2 \varphi^*(x), \quad (17)$$

мұндағы  $b$  – өлшем бірлігі ұзындыққа сәйкес келетін параметр,  $x$  – өлшемсіз радиал координат,  $m^*(x)$  – өлшемсіз масса,  $\rho^*(x)$  – өлшемсіз тығыздық,  $P^*(x)$  – өлшемсіз қысым және  $\varphi^*(x)$  – өлшемсіз потенциал.

Ары қарай, (13)-(16) өрнектерін (1)-(2) теңдеулеріне қойып, сәйкес ньютондық өлшемсіз құрылым теңдеулерін аламыз

$$\begin{cases} \frac{dP^*(x)}{dx} = -\rho^*(x) \frac{m^*(x)}{x^2} \\ \frac{dm^*(x)}{dx} = 4\pi x^2 \rho^*(x). \end{cases} \quad (18)$$

Дәл осылай (13)-(16) өрнектерін (6)-(7) теңдеулеріне қойып, өлшемсіз релятивті құрылым теңдеулерін жазамыз:

$$\begin{cases} \frac{dP^*(x)}{dx} = -\rho^*(x) \frac{m^*(x)}{x^2} \left[ 1 + \frac{P^*(x)}{\rho^*(x)} \right] \left[ 1 + \frac{4\pi x^2 P^*(x)}{m^*(x)} \right] \left[ 1 - \frac{2m^*(x)}{x} \right]^{-1} \\ \frac{dm^*(x)}{dx} = 4\pi x^2 \rho^*(x). \end{cases} \quad (19)$$

Өзірге белгісіз  $b$  параметрін (13)-(16) өрнектерін (11)-ге қою арқылы анықтап аламыз. Сонда

$$\frac{c^4}{Gb^2} P^*(x) = \frac{4 m_e^4}{3} \frac{m_n^4 c^5}{32 \pi^2 \hbar^3} \left[ y(x) (2y^2(x) - 3) \sqrt{1 + y^2(x)} + 3 \ln \left( y(x) + \sqrt{1 + y^2(x)} \right) \right], \quad (20)$$

осыдан қажетті қысқартуларды жүргізгеннен кейін, бұл өрнек мынандай түрге келеді

$$P^*(x) = \frac{1}{3} \frac{m_e^4 G c b^2}{8 \pi^2 \hbar^3} \left[ y(x) (2y^2(x) - 3) \sqrt{1 + y^2(x)} + 3 \ln \left( y(x) + \sqrt{1 + y^2(x)} \right) \right], \quad (21)$$

егер мұндағы  $\frac{m_e^4 G c b^2}{\hbar^3} = 1$  деп тандап алсақ, онда  $b$  параметрінің мәні

$$b = \sqrt{\frac{\hbar^3}{G c m_e^4}} = \frac{\hbar}{c \sqrt{\hbar c / G}} \left( \frac{\sqrt{\hbar c / G}}{m_e} \right)^2 \quad (22)$$

тең болады. (13)-(16) және (22) өрнектерін (10)-(11) теңдеулеріне қоямыз да өлшемсіз күй теңдеуі табамыз

$$\begin{cases} P^*(x) = \frac{1}{24\pi^2} \left[ y(x) (2y^2(x) - 3) \sqrt{1 + y^2(x)} + 3 \ln \left( y(x) + \sqrt{1 + y^2(x)} \right) \right] \\ \rho^*(x) = \frac{1}{3\pi^2} \frac{m_n}{m_e} \left( \frac{A}{Z} \right) y^3(x). \end{cases} \quad (23)$$

Сонымен қатар, өлшемсіз ньютондық сыртқы ғравитациялық потенциал келесі түрге келтіріледі

$$\varphi^*(x) = -\frac{M^*}{x}, \quad (24)$$

ал өлшемсіз релятивтік сыртқы ғравитациялық потенциал

$$\varphi^*(x) = \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{2M^*}{x} \right). \quad (25)$$

**Шекаралық шарттар.** (18) және (19) дифференциалдық теңдеулер жүйелерін шешу үшін шекаралық шарттар берілуі қажет. Бірінші шарт жұлдыздың ортасында беріледі, яғни  $x = 0$ -де тығыздықтың мәні  $\rho^*(0) = \rho_c$  таңдалып алынады. Орталық тығыздықтан (23) өрнек арқылы орталық өлшемсіз Ферми импульсін анықтап аламыз  $y(0) = y_c$ . Сонымен орталық тығыздық берілсе, Ферми импульсі арқылы орталық қысымды тауып аламыз. Екінші шарт массаның регулярлық шарты деп аталады және ол жұлдыздың ортасында мына түрде беріледі:  $m^*(0) = 0$  [1, 3]. Үшінші шарт жұлдыздың бетінде  $P^*(x_s) = 0$  арқылы беріледі, мұндағы  $x = x_s$  жұлдыздың өлшемсіз толық радиусы.

Ал техникалық тұрғыдан дифференциалдық теңдеулерді сандық интегралдау  $x_i = 10^{-10}$  бастап  $x_f = 10^4$  дейін жүргізіледі және  $x_s$  осы аралықта жатады:  $x_i < x_s < x_f$ . Себебі, теңдеулерді  $x_i = 0$  бастап сандық интегралдау анықталмағандыққа алып келеді, сондықтан интегралдаудың төменгі шегі  $x_i = 10^{-10}$  басталады. Жұлдыздың  $x_i$  өлшемсіз радиусына сәйкес элементінің тығыздығы  $\rho_c(x_i) = 10^k G b^2 / c^2$  деп өзіміз аламыз, мұндағы  $k = 4, 5, 6, \dots, 12$  аралығында өзгереді. Ал массаның регулярлық шарты  $x_i$  үшін енді төмендегідей жазылады

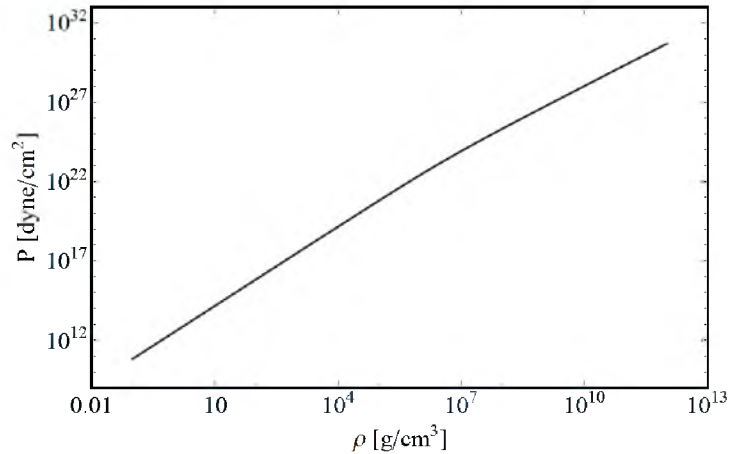
$$m_c(x_i) = \frac{4}{3} \pi x_i^3 \rho_c. \quad (26)$$

Орталық қысым, жоғарыды көрсетілгендей (23) жүйедегі тығыздықтың өрнегінен  $\rho^*(x_i) = \rho_c$  және  $y(x_i) = y_c$  арқылы табылады.

Сандық интегралдаудың жоғарғы шегі  $x_f = 10^4$  деп беріледі. (18) және (19) жүйелердің сандық шешімі  $x_i \leq x \leq x_s$  аралығында табылады, мұнда  $P^*(x_s) = 0$  шарты орындалғанда сандық

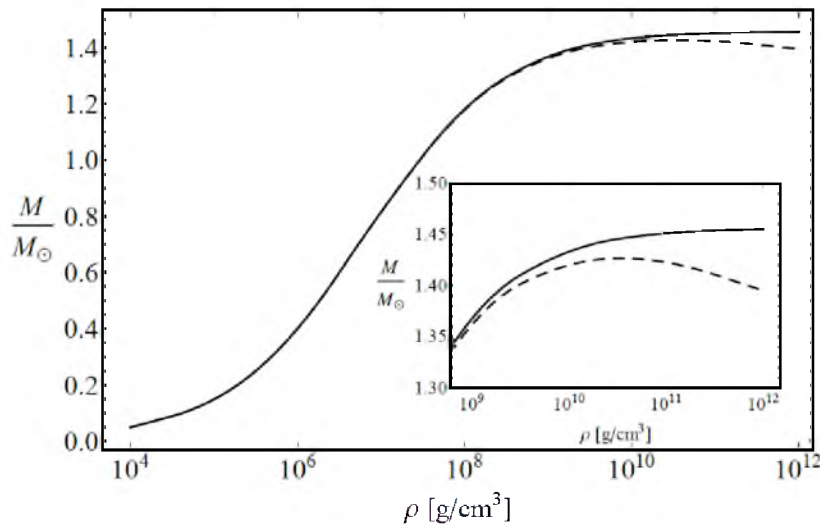
интегралдау тоқтатылады, яғни  $x_s$  ылғи  $x_f$ -тен кіші болуы шарт. Осылайша (13) және (17) теңдеулерінің көмегімен өлшемсіз шамалардан өлшем бірлігі бар физикалық шамаларды қайта қалпына келтіріп аламыз.

**Сандық нәтижелер.** Ақ ергежейлі жұлдыздардың қысымы мен тығыздығы арасындағы байланыс (23) күй теңдеуі арқылы беріледі және ол 1-суретте көрсетілген. Бұл суреттен тығыздық пен қысымның бір-біріне тура пропорционал екенін көруге болады.



1 сурет – Ақ ергежейлі жұлдыздар қысымының орталық тығыздыққа тәуелділігі.

Сонымен қатар (18) және (19) жүйелеріндегі дифференциалдық теңдеулерді, күй теңдеуін (23) және берілген шекаралық шарттарды қолдана отырып шешіп, жұлдыз массасының орталық тығыздықта тәуелділігін аламыз. Бұл тәуелділік 2-суретте көрсетілген. Орталық тығыздықтың артуымен қатар ақ ергежейлі жұлдыздың массасы да артады, алайда массаның шексіз артуы мүмкін емес және ол Чандрасекар шегінен асып кете алмайды [5, 6].



2 сурет – Ақ ергежейлі жұлдыздардың масса-орталық тығыздық қатынастары. Үзік сызықтар ЖСТ-дағы, ал тұтас сызықтар КФ-дағы АЕ жұлдыздар үшін.

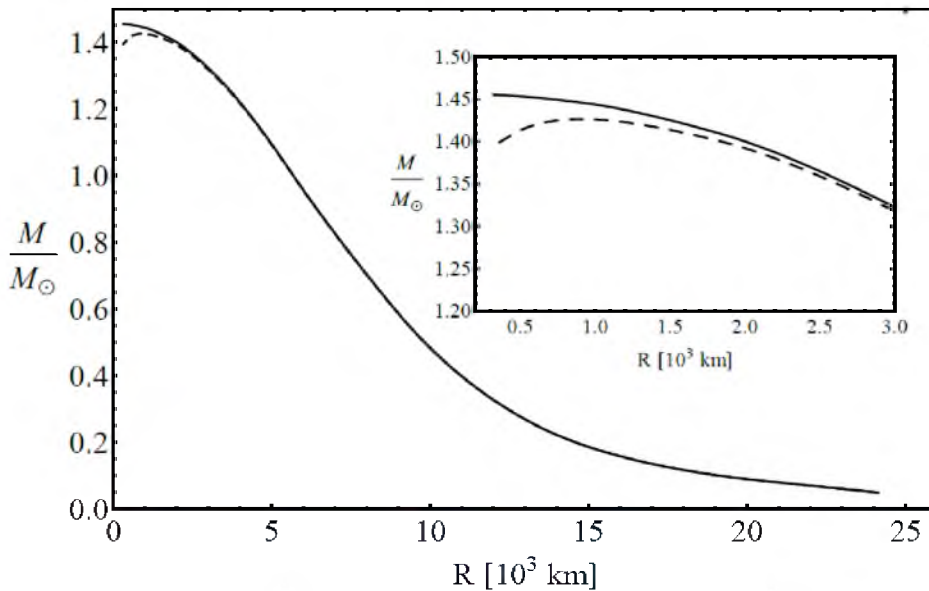
Ары қарай, жұлдыздың масса-радиус қатынасын аламыз (Сурет-3). Суреттен көрініп тұрғандай, ақ ергежейлі жұлдыздардың бас тізбектегі жұлдыздардан айырмашылығы: радиус кеміген сайын олардың массасы артады. Бұл ерекшелік күй теңдеуінде релятивтік түзетулердің бар болуымен түсіндіріледі [13].

Сонымен бірге, ЖСТ мен КФ арасындағы негізгі айырмашылық АЕ-ң массасы артқан сайын анық байқалады. ЖСТ-да массаның КФ-тағы массадан аз болуы да гидростатикалық тепе-теңдік теңдеуінде релятивтік түзетулердің болуымен байланысты. Мұнда массаның артуы гравитациялық өрісті күшейтеді. Осының салдарынан берілген тығыздықты алу үшін ЖСТ-да КФ-мен салыстырғанда азырақ масса қажет.

ЖСТ-дағы шектік тығыздыққа сәйкес келетін максимум масса орнықтылықты анықтайтын шарт болып табылады. Алайда классикалық физикада ақ ергежейлі жұлдыз максимум массаға радиус нөлге, ал орталық қысым, орталық тығыздық және беттік гравитациялық потенциал шексіздікке ұмтылғанда жетеді. Физикалық тұрғыдан олай болуы мүмкін емес. Себебі, теориялық тұрғыдан қарастырғанда, ақ ергежейлі жұлдыздарда орталық тығыздықтың, сәйкесінше, орталық қысымның шектік мәні бар және ол орнықтылықты анықтайтын шарт болып табылады. Егер тығыздықтың мәні осы шектік мәннен асып кетсе, жұлдыз нейтрондық жұлдызға айналу керек, болмаса Ia типтегі асқын жаңа ретінде жарылуы керек. Сондықтан, классикалық физикада  $^{12}\text{C}$  - ден тұратын ақ ергежейлі жұлдыз үшін нейтрондалу (кері бета ыдырау) тығыздығын шектік мән деп таңдап алында да, соған сәйкес келетін максимум масса, радиус, қысым және беттік гравитациялық потенциал есептелінді (1-кестені қараңыз).

Кесте-1. АЕ-дің КФ және ЖСТ-дағы максимум массасына сәйкес келетін радиусы, орталық тығыздығы, қысымы және беттік потенциалы.

	$M_{\text{max}} [M_{\odot}]$	$R$ [км]	$\rho_c$ [г/см <sup>3</sup> ]	$P$ [дин/см <sup>2</sup> ]	$\phi$ [см <sup>2</sup> /с <sup>2</sup> ]
Классикалық физика (КФ)	1.447	878.01	$3.97 \cdot 10^{10}$	$6.67 \cdot 10^{28}$	$6.49 \cdot 10^{18}$
Жалпы салыстырмалық теориясы (ЖСТ)	1.425	905.34	$3.56 \cdot 10^{10}$	$5.77 \cdot 10^{28}$	$6.25 \cdot 10^{18}$



3 сурет – Ақ ергежейлі жұлдыздардың масса-радиус қатынастары. Үзік сызықтар ЖСТ-дағы, ал тұтас сызықтар КФ-дағы АЕ жұлдыздар үшін

Статикалық ақ ергежейлі жұлдыздардың масса-радиус қатынастары үшін аналитикалық өрнек табылды. Оның нәтижесі 4-суретте тұтас қисық арқылы көрсетілген және ол құрылым теңдеулерін сандық интегралдаумен алынған шешімге сәйкес келін тұр. Ол өрнектің түрі төмендегідей

$$\frac{M}{M_{\odot}} = \frac{R}{a + dR + eR^2 + fR^3 + nR^4}, \quad (27)$$



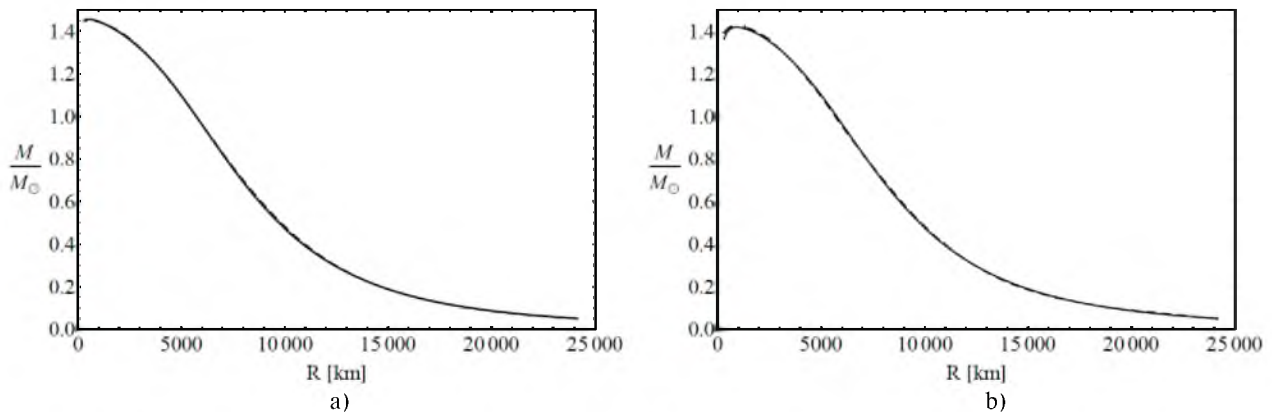
мұндағы  $a, d, e, f, n$  – сандық шешімдер арқылы есептелетін тұрақты коэффициенттер. Бұл өрнек [14] әдебиетте алынған өрнекпен пара-пар, тек коэффициенттердің мәнінде өзгешелік бар. Олардың мәні КФ және ЖСТ-да есептелінді (Кесте-2) және қателіктері 1% -дан аз болатыны анықталды.

Статикалық ақ ергежейлі жұлдыздар үшін табылған аналитикалық өрнектің түрі классикалық физикада және жалпы салыстырмалық теориясында бірдей. Олар тек қана коэффициенттерінің мәндерімен ғана шамалы өзгешеленеді.

2 кесте – Ақ ергежейлі жұлдыздар үшін массаның радиусқа тәуелділігін көрсететін аналитикалық өрнектегі параметрлердің мәндері

Коэффициенттер	Классикалық физика	Жалпы салыстырмалық теориясы
$a$ [км]	6.11	14.65
$d$ [км <sup>0</sup> ]	0.664	0.665
$e$ [км <sup>-1</sup> ]	$2.26 \cdot 10^{-5}$	$2.17 \cdot 10^{-5}$
$f$ [км <sup>-2</sup> ]	$-1.50 \cdot 10^{-9}$	$-1.38 \cdot 10^{-9}$
$n$ [км <sup>-3</sup> ]	$1.35 \cdot 10^{-12}$	$1.34 \cdot 10^{-12}$

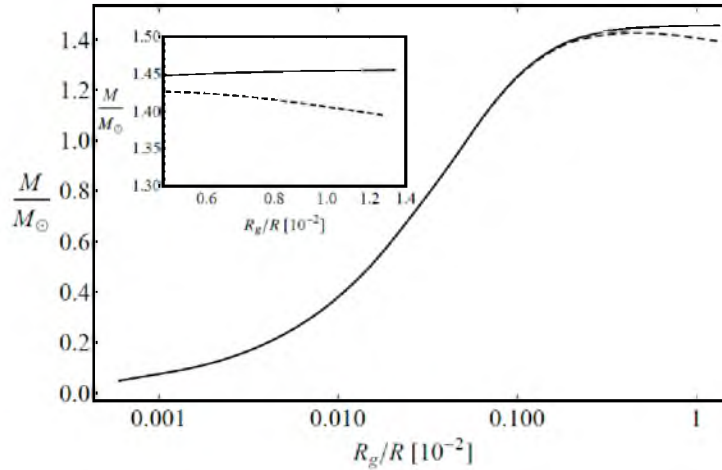
Дифференциалдық ішкі құрылым теңдеулерін шешу күрделі жұмыс. Уақытты үнемдеу мақсатында (27) аналитикалық өрнекті қолданып, масса-радиус қатынасын радиустың 340 км-ден бастап 24000 км-ге дейінгі аралығында 1% -дан аз қателікпен жеңіл анықтауға болады. Осы аналитикалық өрнекті ақ ергежейлі жұлдыздардың динамикасын зерттеуге тікелей қолдануға болады.



4 сурет – а) КФ-дағы АЕ-лер: тұтас сызық – аналитикалық өрнек, үзік сызық – ньютондық құрылым теңдеулері; б) ЖСТ-дағы АЕ-лер: тұтас сызық – аналитикалық өрнек, үзік сызық – ЖСТ құрылым теңдеулері.

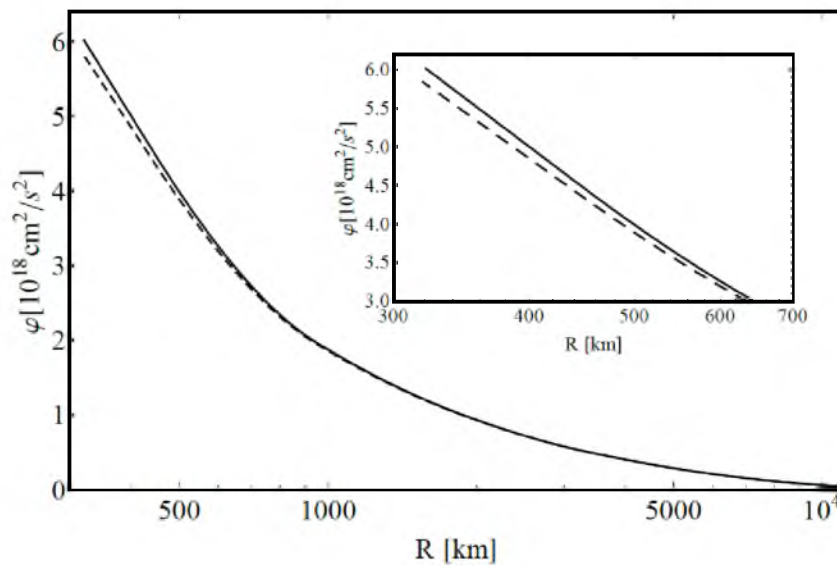
Жұлдыздар үшін ЖСТ-ның маңыздылығы компакттылық параметрі арқылы көрсетіледі. Компактылық параметрі деп  $R_g/R$  қатынасы аталады, мұндағы  $R_g = 2GM/c^2$  Шварцшильд радиусы. Бұл параметр артқан сайын ғравитациялық өріс күшейе түседі, сәйкесінше ЖСТ-ның эффектері айқын көріне бастайды.

АЕ жұлдыздың компакттылық параметрі мен массасының арасындағы байланыс тұрғызылды (Сурет-4). Масса мен компакттылық параметрінің қатынасынан көрініп тұрғандай, жұлдыздың массасы неғұрлым артқан сайын, жұлдыз соғұрлым шағын болады.



4 сурет – Ақ ергежейлі жұлдыздардың масса-компактылық параметрі қатынастары. Үзік сызықтар ЖСТ-дағы, ал тұтас сызықтар КФ-дағы АЕ жұлдыздар үшін.

Ақ ергежейлі жұлдыздың бетіндегі ғравитациялық потенциалдың модулі мен радиусының арасындағы байланыс 5-суретте көрсетілген. (24) және (25) өрнектерден көрініп тұрғандай, жұлдыздың радиусы кемін, массасы артқан сайын оның бетіндегі ғравитациялық потенциал да арта береді. Ньютондық физикадағы және жалпы салыстырмалық теориясындағы жұлдыздардың беттік потенциалдардың айырмашылығы үлкен массаларда және кіші радиустарда білінеді.



5 сурет – Ақ ергежейлі жұлдыздардың беткі потенциал-радиус қатынастары. Үзік сызықтар ЖСТ-дағы, ал тұтас сызықтар КФ-дағы АЕ жұлдыздар үшін.

**Қорытынды.** Жұмыста ақ ергежейлі жұлдыздардың негізгі параметрлері  $(R, M, \rho, P, \varphi, R_g/R)$  ньютондық физикада және жалпы салыстырмалық теориясында есептелінді. Негізгі параметрлерді анықтау үшін ньютондық және релятивтік құрылым теңдеулері (Толмен-Оппенгеймер-Волков теңдеуі) және Чандрасекар күй теңдеуі қолданылды. Барлық дифференциалдық теңдеулер өлшемсіз түрге келтіріліп, алдын ала анықталған шекаралық шарттармен сандық түрде шешілді. Сандық есептеулер Wolfram Mathematica 10 бағдарламасында [15] жүргізілді.

Есептеулердің нәтижесінде қысым-орталық тығыздық, масса-тығыздық, масса-радиус, масса-компактылық параметрі және беттік потенциал-радиус қатынастары тұрғызылып, ЖСТ эффекттерінің үлкен массаларда, үлкен тығыздықтарда және кіші радиустардағы маңыздылығы көрсетілді. Масса-радиус қатынасы үшін аналитикалық өрнек табылды және қателігі бағаланды.

Болашақ ғылыми жұмыстарда ақ ергежейлі жұлдыздардың химиялық құрамы [16], температурасы [17] және өз өсінен айналу периоды [18-20] ескеріледі. Сонымен қатар, олардың жұлдыз құрылымына әсері жан-жақты зерттеледі. Ақ ергежейлі жұлдыздардың физикалық моделінің шынайылығын нақтылау үшін теориялық есептеулер бақылаудан алынған деректермен [21-23] салыстырылады. Жұмыстың нәтижелері осы бағытта жасалған зерттеулерге сәйкес келеді және оларды астрономия, астрофизика мен космология салаларында тікелей қолдануға болады.

**Алғыс білдіру.** Жұмыс ҚР БҒМ-нің ИПС-11 грантының қолдауымен орындалды. Сонымен бірге, Қ.А. Бошқаяев ҚР БҒМ-нің «2015-2016 жылғы үздік жас ғалым» шәкірт ақысынан, «2015 жылғы ЖОО-ның үздік оқытушысы» грантынан қолдау алды.

#### ӘДЕБИЕТТЕР

- [1] С.Л. Папино, С.А. Тьюколски, Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды: в 2-х ч., ч. 1. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 256 с.
- [2] Я.Б. Зельдович, С.И. Блинников, Н.И. Шакура, Физические основы строения и эволюции звезд, – М.: Изд-во МГУ, 1981. – 160 с.
- [3] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, Гравитация, том 2, пер. с англ. – М.: Мир, 1977. – 525 с.
- [4] I. Sagert, M. Hempel, C. Greiner and J. Schaffner-Bielich, *Eur. J. Phys.*, **2006**, 27, 577.
- [5] S. Chandrasekhar, *Astrophysical Journal*, **1931**, 74, 81.
- [6] S. Chandrasekhar, *Reviews of Modern Physics*, **1984**, 56, 137.
- [7] K. Boshkayev, J.A. Rueda, R. Ruffini, I. Siutsou, *Journal of the Korean Physics Society*, **2014**, 65(6), 855.
- [8] K. Boshkayev, L. Izzo, J.A. Rueda, and R. Ruffini, *Astronomy & Astrophysics*, **2013**, 555, A151.
- [9] J.R. Oppenheimer and G.M. Volkoff, *Phys. Rev.*, **1939**, 55, 374.
- [10] Я.Б. Зельдович, И.Д. Новиков, Релятивистская астрофизика, – М.: Наука, 1967. – 656 с.
- [11] E. Poisson, C. M. Will. *Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic* (Cambridge University Press, 2014).
- [12] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Статическая физика. Часть 1. – М.: Физматлит, 2010. – 616 с.
- [13] M. Rotondo, J.A. Rueda, R. Ruffini and S.-S. Xue, *Phys. Rev. D*, **2011**, 84, 084007.
- [14] G. Carvalho, R. Marinho, M. Malheiro, *AIP Conference Proceedings*, **2015**, 1, id 030004.
- [15] www.wolfiam.com
- [16] a) E.E. Salpeter, *Astrophys. J.*, **1961**, 134, 669. b) T. Hamada, E.E. Salpeter. *Astrophys. J.*, **1961**, 134, 683.
- [17] S.M. de Carvalho, M. Rotondo, J.A. Rueda and R. Ruffini, *Phys. Rev. C*, **2014**, 89, 015801.
- [18] J.B. Hartle, & K.S. Thorne, *Astrophysical Journal*, **1968**, 153, 807.
- [19] G.G. Arutyunyan, D.M. Sedrakyan, & E.V. Chubaryan, *Astrophysics*, **1971**, 7(3), 274.
- [20] K. Boshkayev, J.A. Rueda, R. Ruffini, I. Siutsou, *General Relativistic and Newtonian White Dwarfs, Proceedings of the MG13 Meeting on General Relativity (in 3 Volumes)*. Edited by Rosquist Kjell et al. Published by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2015. ISBN #9789814623995, pp. 2468-2474, (2015).
- [21] P.-E. Tremblay, P. Bergeron and A. Gianninas, *Astrophys. J.*, **2011**, 730, 128.
- [22] D. Koester, S. O. Kepler, *Astronomy and Astrophysics*, **2015**, 583, 9.
- [23] S.O. Kepler, I. Pelisoli, D. Koester, G. Ourique, A.D. Romero, N. Reindl, S.J. Kleinman, D.J. Eisenstein, A.D.M. Valois, L.A. Amaral, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **2016**, 455, 3413.

#### REFERENCES

- [1] S.L. Shapiro, S.A. Teukolsky, Black holes, white dwarfs and neutron stars: 1<sup>st</sup> part, trans. from eng. M.: Mir, 1985, 256 p. (in Russ.).
- [2] Ya.B. Zel'dovich, S.I. Blinnikov, N.I. Shakura, Physical basis of the structure and evolution of stars, M.: MSU Press, 198, 160 p. (in Russ.).
- [3] Ch. Misner, K. Thorne, J. Wheeler, Gravitation, Vol. 2, trans. from eng., M.: Mir, 1977, 525 p. (in Russ.).
- [4] I. Sagert, M. Hempel, C. Greiner and J. Schaffner-Bielich, *Eur. J. Phys.* **2006**, 27, 577 (in Eng.).
- [5] S. Chandrasekhar, *Astrophysical Journal*, **1931**, 74, 81 (in Eng.).
- [6] S. Chandrasekhar, *Reviews of Modern Physics*, **1984**, 56, 137 (in Eng.).
- [7] K. Boshkayev, J.A. Rueda, R. Ruffini, I. Siutsou, *Journal of the Korean Physics Society*, **2014**, 65(6), 855 (in Eng.).
- [8] K. Boshkayev, L. Izzo, J.A. Rueda, and R. Ruffini, *Astronomy & Astrophysics* **2013**, 555, A151 (in Eng.).
- [9] J.R. Oppenheimer and G.M. Volkoff, *Phys. Rev.* **1939**, 55, 374 (in Eng.).
- [10] Ya.B. Zel'dovich, I.D. Novikov, Relativistic astrophysics, M.: Nauka, 1967, 656 p. (in Russ.).
- [11] E. Poisson, C. M. Will. *Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic* (Cambridge University Press, 2014) (in Eng.).

- [12] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Statistical Physics*, part 1, M.: Fizmatlit, 2010, 616 p. (in Russ.).
- [13] M. Rotondo, J.A. Rueda, R. Ruffini and S.-S. Xue, *Phys. Rev. D*, **2011**, 84, 084007 (in Eng.).
- [14] G. Carvalho, R. Marinho, M. Malheiro, *AIP Conference Proceedings*, **2015**, 1, id 030004.
- [15] www.wolfram.com
- [16] a) E.E. Salpeter, *Astrophys. J.*, **1961**, 134, 669. b) T. Hamada, E.E. Salpeter. *Astrophys. J.*, **1961**, 134, 683.
- [17] S.M. de Carvalho, M. Rotondo, J.A. Rueda and R. Ruffini, *Phys. Rev. C*, **2014**, 89, 015801.
- [18] J.B. Hartle, & K.S. Thorne, *Astrophysical Journal*, **1968**, 153, 807.
- [19] G.G. Arutyunyan, D.M. Sedrakyan, & E.V. Chubaryan, *Astrophysics*, **1971**, 7(3), 274.
- [20] K. Boshkayev, J.A. Rueda, R. Ruffini, I. Siutsou, *General Relativistic and Newtonian White Dwarfs, Proceedings of the MG13 Meeting on General Relativity (in 3 Volumes). Edited by Rosquist Kjell et al. Published by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2015. ISBN #9789814623995, pp. 2468-2474, (2015).*
- [21] P.-E. Tremblay, P. Bergeron and A. Gianninas, *Astrophys. J.*, **2011**, 730, 128.
- [22] D. Koester, S. O. Kepler, *Astronomy and Astrophysics*, **2015**, 583, 9.
- [23] S.O. Kepler, I. Pelisoli, D. Koester, G. Ourique, A.D. Romero, N. Reindl, S.J. Kleinman, D.J. Eisenstein, A.D.M. Valois, L.A. Amaral, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **2016**, 455, 3413.

### ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ БЕЛЫХ КАРЛИКОВ

К.А. Бошқаев, Б.А. Жәми\*, Ж.А. Қалымова, Г.Ш. Балгимбеков,  
А.С. Таукенова, Ж.Н. Бришева және Н. Қойшыбаев

НИИЭТФ, КазНУ имени аль-Фараби, Алматы, 050040, Казахстан

**Ключевые слова:** статические белые карлики, уравнения структуры, вырожденный электронный газ, уравнение состояния, классическая физика, общая теория относительности.

**Аннотация.** В работе теоретически были определены основные параметры статических белых карликов при нулевой температуре, такие как масса, радиус, центральная плотность, центральное давление, гравитационный потенциал и параметр компактности в классической физике и в общей теории относительности. С этой целью система дифференциальных уравнений, состоящая из уравнения состояния вырожденного электронного газа в приближении Чандрасекара, уравнений баланса массы и гидростатического равновесия была приведена в безразмерный вид и решена методами численного интегрирования. В процессе вычисления были построены соотношения масса-центральная плотность, масса-радиус, масса-параметр компактности и гравитационный потенциал-радиус в классической физике и в общей теории относительности, и результаты были сопоставлены между собой. Было показано, что эффекты общей теории относительности играют важную роль вблизи предела Чандрасекара, точнее говоря, при больших массах и маленьких радиусах, то есть в сильных гравитационных полях. Однако при малых массах и больших радиусах из-за слабости гравитационного поля разница между классической физикой и общей теорией относительности практически исчезает. Более того, было найдено аналитическое выражение для соотношений массы и радиуса в классической физике и в общей теории относительности, и была проведена оценка точности данного выражения. К тому же была прояснена важность простых аналитических выражений в теоретических расчётах, исследованиях динамики двойной звездной системы и в практических анализах. Работа носит научно-педагогический, теоретический и практический характер. Полученные результаты можно непосредственно использовать для анализа и объяснения наблюдательных данных и для исследования физических процессов в астрономии, небесной механике, релятивистской астрофизике, физике компактных объектов и космологии.

Поступила 04.04.2016 г.