N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 3, Number 307 (2016), 66 – 71

GREEN'S FUNCTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE BIHARMONIC EQUATION IN A CIRCLE AND POLYNOMIAL SOLUTIONS OF THE POISSON EQUATION

B.D. Koshanov, K. Edil

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty
Koshanov@list.ru, Savrat.edil@mail.ru

Abstract. In this paper, we study the Dirichlet problem for the two-dimensional biharmonic equation. It was build in an explicit form the Green's function of the Dirichlet problem for the biharmonic equation in a circle. Also it was built a polynomial solution of the Dirichlet problem for the Poisson equation.
Keywords: Poisson equation, polyharmonic equation, Dirichlet problem, Green function.

УДК 517. 951

ДОҢГЕЛЕКТЕГІ БИГАРМОНИЯЛЫ ТЕҢДЕУ ҮШІН ДИРИХЛЕ ЕСЕБІНІҢ ГРИН ФУНКЦИЯСЫ ЖӘНЕ ПУАССОН ТЕҢДЕУІНІҢ ПОЛИНОМИАЛДЫ ШЕШІМІ

Б.Д. Қошанов, К. Еділ

Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы қ.

Түйін сөздер: Пуассон теңдеуі, бигармониялы теңдеу, Дирихле есебі, Грин функциясы.
Аннотация. Бұл жұмыс доңгелектегі бигармониялы теңдеу үшін Дирихле есебін зерттеуге арналған. Берілген Дирихле есебінің Грин функциясының өрнегі айқын түрде алынған. Пуассон теңдеуі үшін біртекті Дирихле есебінің полиномиалды шешімі құрылған.

1. Бірлік дөңгелекте бигармониялы теңдеу үшін келесі Дирихле есебін қарастырайық:

$$\Delta^2 G(x,y)=\delta(x,y),\quad x\in\Omega=\{\,x:|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}<1\} \tag{1.1}$$

$$G(x,y)\big|_{|x|=1}=0, \tag{1.2}$$

$$\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial \vec{n}}\right|_{|x|=1}=0,$$

мұндағы $\delta(x,y)-$ Дирактың дельта функциясы, $\vec{n}-$шеңберге түсірілген нормал вектор.

Лемма 1. Егер $|x-y|^2=X^2(x,y)=X^2$, $\left|\frac{y}{r}\right|^2\left|x-\frac{y}{|y|^2}r^2\right|^2=Y^2(x,y)=Y^2$, $r^2(1-\frac{|x|^2}{r^2})(1-\frac{|y|^2}{r^2})=Z^2(x,y)=Z^2$ функцияларды белгілесек, онда келесі теңдік орындалады:

$$X^2-Y^2=-Z^2 \tag{1.3}$$

мұндағы $x, y \in \Omega$.

Дәлелдеуі.

$$X^2 - Y^2 = |x-y|^2 - \left|\frac{y}{r}\right|^2 \left|x - \frac{y}{|y|^2} r^2\right|^2 =$$

$$|x|^2 - 2(x,y) + |y|^2 - \left|\frac{y}{r}\right|^2 (|x|^2 - 2\frac{(x,y)}{|y|^2} r^2 + \frac{|y|^2}{|y|^4} r^4) =$$

$$|x|^2 - 2(x,y) + |y|^2 - \frac{|x|^2 |y|^2}{r^2} + 2(x,y) - r^2 = |x|^2 - \frac{|x|^2 |y|^2}{r^2} - r^2 + |y|^2 =$$

$$|x|^2 (1 - \frac{|y|^2}{r^2}) - r^2 (1 - \frac{|y|^2}{r^2}) = (1 - \frac{|y|^2}{r^2})(|x|^2 - r^2) = -r^2 (1 - \frac{|x|^2}{r^2})(1 - \frac{|y|^2}{r^2}) = -Z^2.$$

Лемма 2. Жұп өлшемді кеңістіктер үшін $(2m \geq n)$, дербес жағдайда $(m = 2, n = 2)$ үшін (1.1) теңдеуінің іргелі шешімі:

$$\varepsilon_{4,2}\ (x,y) = d_{4,2} |x-y|^2 \ln|x-y|,$$

мұндағы

$$d_{4,2} = \frac{1}{8 \cdot \Gamma^2(2)\pi}\ ,\quad \Gamma(\cdot) \text{ - ғамма функция.}$$

Теорема 1. (1.1)-(1.2) есебінің Грин функциясы келесі түрде өрнектеледі:

$$G_{4,2}(x,y) = d_{4,2} \left\{ |x-y|^2 \ln|x-y|^2 - \left| |y| x - \frac{y}{|y|} \right|^2 \ln\left| |y| x - \frac{y}{|y|} \right|^2 + \right.$$

$$\left. (1 - |y|^2)(1 - |x|^2) \left[\ln\left| |y| x - \frac{y}{|y|} \right|^2 + 1 \right] \right\}.$$

Лемма 3. Егер $(m = 2, n = 2)$ болса,

$$g_{4,2}^0(x,y) = \left| |y| x - \frac{y}{|y|} \right|^2 \ln\left| |y| x - \frac{y}{|y|} \right|^2,$$

$$g_{4,2}^1(x,y) = (1 - |y|^2)(1 - |x|^2) \left[\ln\left| |y| x - \frac{y}{|y|} \right|^2 + 1 \right]$$

функциялары біртекті бигармониялы теңдеудің шешімі болады.

Лемма 4. Әрбір $0 < x \leq 1$ үшін келесі қатарға жіктеледі:

$$(1-x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - k + 1) \cdot x^k,$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k},$$

Оған қосымша келесі Ньютон - биномға жіктелуі орынды:

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}(-b)^k .$$

Теорема 1 - дің дәлелдеуі:

(1.3) теңдігінен $\dfrac{Z^2}{Y^2} \le 1$ аламыз. Жұп өлшемді кеңістіктер $(2m \ge n)$ үшін (1.1) теңдеуінің іргелі шешімі ақырсыз қатарға келесі түрде жіктеледі (лемма-4):

$$\varepsilon_{2m,n}(x,y) = (|x-y|^2)^{m-\frac{n}{2}} \ln \frac{|x-y|^2}{\left|\frac{y}{r}\right|^2 \left|x - \frac{y}{|y|^2} r^2\right|^2} =$$

$$= (X^2)^{m-\frac{n}{2}} \ln \frac{X^2}{Y^2} = (Y^2 - Z^2)^{m-\frac{n}{2}} \ln(1 - \frac{Z^2}{Y^2}) =$$

$$\left(\sum_{j=0}^{m-\frac{n}{2}} C^j_{m-\frac{n}{2}} (Y^2)^{m-\frac{n}{2}-j} (-Z^2)^j \right) \left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(Y^2)^{-k} (Z^2)^k}{k} \right) =$$

$$-\left(\sum_{j=0}^{m-\frac{n}{2}} C^j_{m-\frac{n}{2}} (Y^2)^{m-\frac{n}{2}-j} (-Z^2)^j \right) \left(\sum_{k=1}^{k_0} \frac{(Y^2)^{-k} (Z^2)^k}{k} + \sum_{k=k_0+1}^{k_0} \frac{(Y^2)^{-k} (Z^2)^k}{k} \right) =$$

$$-\sum_{s=1}^{m-1} d_s (Y^2)^{m-\frac{n}{2}-s} (Z^2)^S - \sum_{s=m}^{\infty} d_s (Y^2)^{m-\frac{n}{2}-s} (Z^2)^S = -\sum_{s=1}^{m-1} d_s (Y^2)^{m-\frac{n}{2}-s} (Z^2)^S \ldots$$

$$= d_{2m,n} Y^{2m-n} \ln Y + d_{2m,n} Y^{2(m-1)-n} Z^2 \left((-1) \frac{(2m-n)}{2} \ln Y - \frac{1}{2} \right) +$$

$$+ d_{2m,n} Y^{2(m-2)-n} (Z^2)^2 \left(\frac{(-1)^2}{2!} \frac{(2m-n)}{2} \frac{(2m-n-2)}{2} \ln Y - \frac{1}{2} \left[(-1) \frac{(2m-n)}{2} + \frac{1}{2} \right] \right) + \ldots$$

мұндағы

$$d_s = \sum_{j=\max(s-\frac{n}{2}+1,0)}^{\min(m-\frac{n}{2},s-1)} \frac{(-1)^j}{s-j} C^j_{m-\frac{n}{2}} .$$

Біздің жағдайда $(m = 2, n = 2)$ теңдіктің оң жағының екі қосылғышын сол жағына ауыстырсақ, онда теңдіктің оң жағында шексіз қосынды қалдық қалады. Сол қалдықты $G_{4,2}(x,y)$ деп белгілеп және лемма 3 көмегімен Грин функциясы келесі түрге ие болады:

$$G_{4,2}(x,y) = d_{4,2} \left\{ |x-y|^2 \ln|x-y|^2 - \left| |y|x - \frac{y}{|y|} \right|^2 \ln\left| |y|x - \frac{y}{|y|} \right|^2 + \right.$$

$$\left. + (1-|y|^2)(1-|x|^2) \left[\ln\left| |y|x - \frac{y}{|y|} \right|^2 + 1 \right] \right\}.$$

Дербес жағдайда, яғни $n = 2$ кезінде бұл нәтиже [6] H.Begehr-дің нәтижесімен сәйкес келеді:

$$(n-1)!^2 G_{2m,n}(z,\zeta) = X^{2m-2}\ln\left|\frac{Y}{X}\right|^2 + \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k}{k}X^{2(m-1-k)}Z^{2k}.$$

(1.2) шекаралық шартын құрылған Грин функциясы үшін тексерейік:

$$G_{4,2}\Big|_{|x|=1} = \left[|x-y|^2\ln|x-y|^2 - \left||y|x-\frac{y}{|y|}\right|^2\ln\left||y|x-\frac{y}{|y|}\right|^2\right]\Bigg|_{|x|=1} +$$

$$+(1-|y|^2)(1-|x|^2)\left[\ln\left||y|x-\frac{y}{|y|}\right|^2+1\right]\Bigg|_{|x|=1} = 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial n}\Bigg|_{|x|=1} = 2\left[|x|^2-(x,y)\right]\ln|x-y|^2\Big|_{|x|=1} + |x-y|^2\,\frac{2\left[|x|^2-(x,y)\right]}{|x-y|^2}\Bigg|_{|x|=1} -$$

$$-2\left[|y|^2|x|^2-(x,y)\right]\ln\left||y|x-\frac{y}{|y|}\right|^2\Bigg|_{|x|=1} - \left||y|x-\frac{y}{|y|}\right|^2\frac{2\left[|y|^2|x|^2-(x,y)\right]}{\left||y|x-\frac{y}{|y|}\right|^2}\Bigg|_{|x|=1} +$$

$$+(1-|y|^2)\left\{-2|x|^2\left(\ln\left||y|x-\frac{y}{|y|}\right|^2+1\right)+(1-|x|^2)\frac{2\left[|y|^2|x|^2-(x,y)\right]}{\left||y|x-\frac{y}{|y|}\right|^2}\right\}\Bigg|_{|x|=1} =$$

$$=\ln|x-y|^2\Big|_{|x|=1}\,2\left[|x|^2(1-|y|^2)-|x|^2(1-|y|^2)\right]+2\left[|x|^2(1-|y|^2)-|x|^2(1-|y|^2)\right]=0.$$

Нәтижесінде $G_{4,2}(x,y)$ Грин функциясы бірлік дөңгелекте (1.1)-(1.2) Дирихле есебін қанағаттандырды.

2. Пуассон теңдеуі үшін біртекті Дирихле есебінің полиномиалды шешімдері

Бірлік шарда $\Omega = \{x\in R^n : |x|<1\}$ Пуассон теңдеуі үшін қойылған келесі шекаралық есепті қарастырайық:

$$\Delta u(x) = Q(x), \quad x\in\Omega, \tag{2.1}$$

$$u\big|_{|x|=1} = 0, \tag{2.2}$$

Оң жағы $Q(x)$ көпмүшелік және $n>2$. [5] жұмыста дәлелденген, $Q(x)$ көпмүшелігі Альманси формуласы бойынша жазылған:

$$Q(x) = \upsilon_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k}\frac{|x|^{2k}}{k!}\int_0^1\frac{(1-\alpha)^k\alpha^{\frac{n}{2}-1}}{(k-1)!}\upsilon_k(\alpha x)d\alpha, \tag{2.3}$$

мұндағы $\upsilon_k(x),\ k=0,1,\ldots,$ - гармоникалық көпмүшеліктер

$$\upsilon_k(x)=\Delta^k Q(x)+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{4^s}\frac{|x|^{2s}}{s!}\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{s-1}\alpha^{s-1}}{(s-1)!}\alpha^{\frac{n}{2}-1}\Delta^{k+s}Q(\alpha x)d\alpha. \tag{2.4}$$

формуласымен анықталады.

(2.4)- формуладағы операторлық қатардың ақырлы қосындысы болады, $Q(x)$ - көпмүшелік. Өйткені (2.3)-те $\upsilon_k(x)$ ақырлы саны нөлден өзгеше болады. Ыңғайлы болу үшін қосындының жоғарғы шегін ∞ түрінде жазамыз.

Лемма 5. Келесі түрде орындалады:

$$u_0(x)-\upsilon(x)=\frac{1-|x|^2}{2}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Delta^s Q_m(x)}{(2s+2)!!(2s)!!}\int_0^1(1-t)^s t^{m-2s+\frac{n}{2}-1}(1-t|x|^2)^s dt. \tag{2.5}$$

Енді, $\upsilon(x)-u_0(x)$ көпмүшелігі (2.1) Пуассон теңдеуін $Q(x)=Q_m(x)$ және (2.2) Дирихле $(\upsilon(x)-u_0(x))\big|_{|x|=1}=0$ шартын қанағаттандыратынын оңай көруге болады.

(2.5) формуладан (2.1) - (2.2) есебінің шешімі $Q(x)=Q_m(x)$үшін келесі түрде болады:

$$u(x)=\frac{|x|^2-1}{2}\sum_{s=0}^{\infty}\Delta^s Q_m(x)\int_0^1\frac{(1-t|x|^2)^s(1-t)^s}{(2s+2)!!(2s)!!}t^{m-2s+\frac{n}{2}-1}dt. \tag{2.6}$$

Бұл шешім, лемма 5-ке сәйкес басқа түрде жазуға болады:

$$u(x)=\upsilon(x)-u_0(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\Delta^s Q_m(x)\sum_{k=0}^{s+1}\frac{(-1)^{k+1}(m+\frac{n}{2}-2s+2k-1)|x|^{2k}}{4^{s+1}k!(s-k+1)!(m+\frac{n}{2}-2s+k-1)_{s+2}}=$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\Delta^s Q_m(x)\sum_{k=0}^{s+1}\frac{(-1)^{k+1}(2m-4s+4k+n-2)|x|^{2k}}{(2k)!!(2s-2k+2)!!(2m-4s+2k+n-2.2)_{s+2}}. \tag{2.7}$$

Ω бірлік шардағы Лаплас теңдеуі үшін келесі Дирихле есебін қарастырайық:

$$\Delta\upsilon(x)=0,\ x\in\Omega;\qquad \upsilon\big|_{\partial\Omega}=P(x)\big|_{\partial\Omega}, \tag{2.8}$$

мұндағы $P(x)$ - көпмүшелік және $n>2$.

Теорема 2. (2.8) есебінің шешімін келесі түрде жазуға болады [8]:

$$\upsilon(x)=P(x)-\frac{|x|^2-1}{2}\int_0^1\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^s}{(2s+2)!!(2s)!!}\Delta^{s+1}P(\alpha x)\alpha^{\frac{n}{2}-1}d\alpha. \tag{2.9}$$

Теорема 3. Дирихле есебінің шешімін бірлік Ω шарда

$$\Delta u(x)=Q(x),\ x\in\Omega;\qquad u\big|_{\partial\Omega}=P(x)\big|_{\partial\Omega}, \tag{2.10}$$

келесі түрде жазуға болады:

$$u(x)=P(x)+\frac{|x|^2-1}{2}\int_0^1\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^s}{(2s+2)!!(2s)!!}\Delta^s(Q-\Delta P)(\alpha x)\alpha^{\frac{n}{2}-1}d\alpha. \tag{2.11}$$

Бұл жұмыс ҚР БжҒМ - нің 3492/ ГФ4 грантының қолдауымен орындалды.

ӘДЕБИЕТ

[1] Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. - М.: Наука. 1974. - 808 с.

[2] Карачик В.В., Антропова Н.А. О решении неоднородного полигармонического уравнения и неоднородного уравнения Гельмгольца // Дифференциальные уравнения. - 2010. - № 46:3. - С. 384 - 395.

[3] Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Немченко М.Ю. Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Доклады Российской Академии Наук. - 2008. - Т. 421, № 3. - С. 305 - 307.

[4] Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д. Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для полигармонического уравнения // Уфимский мат. журнал. - 2010. - №2. - С. 41-52.

[5] Карачик В.В. Об одном представлении аналитических функций гармоническими // Математические труды. - 2007. - №10:2. - С.142-162.

[6] Begehr H., Du J., Wang Y. A Dirichlet problem for polyharmonic functions //Ann. Mat. Pura Appl. - 2008. - V. 187, № 4. - P. 435 - 457.

[7] Begehr H., Du Z., Wang N. Dirichlet problems for inhomogeneous complex mixed-partial differential equations of higher order in the unit disc: New view // Oper. Theory Adv. Appl. – 2009. - V. 205. - P. 101-128.

[8] Turmetov B.Kh., Ashurov R. R .On solvability of the Neumann boundary value problem for a non-homogeneous polyharmonic equation in a ball. Boundary Value Problems 2013, 2013:162 doi:10.1186/1687-2770-2013-162.

[9] Begehr H. and Gaertner E. A Dirichlet problem for the inhomogeneneous polyharmonic equations in the upper half plane // Georgian Math. J. - 2007. - V. 14. - P. 33 - 52.

[10] Karachik V.V., Turmetov B.Kh., Bekayeva A.E. Solvability conditions of the Neumann boundary value problem for the biharmonic equation in the unit ball. // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2012. Volume 81, No. 3, 487- 495

REFERENCES

[1] Sobolev S.L. Vvedenie v teoriyu kubaturnykh formul. - M.: Nauka. 1974. - 808 s.

[2] Karachik V.V., Antropova N.A. O reshenii neodnorodnogo poligarmonicheskogo uravneniya i neodnorodnogo uravneniya Gel'mgol'tsa // Differentsial'nye uravneniya.- 2010.-№ 46:3. -C. 384-395.

[3] Kal'menov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Yu. Predstavlenie funktsii Grina zadachi Dirikhle dlya poligarmonicheskikh uravneniy v share // Doklady Rossiyskoy {Akademii Nauk. - 2008. - T. 421, № 3. - C. 305 - 307.

[4] Kanguzhin B.E., Koshanov B.D. Neobkhodimye i dostatochnye usloviya razreshimosti kraevykh zadach dlya poligarmonicheskogo uravneniya // Ufimskiy mat. zhurnal. 2010. №2. S. 41-52.

[5] Karachik V.V. Ob odnom predstavlenii analiticheskikh funktsiy garmonicheskimi // Matematicheskie trudy. - 2007. - №10:2. - S.142 - 162.

[6] Begehr H., Du J., Wang Y. A Dirichlet problem for polyharmonic functions //Ann. Mat. Pura Appl. - 2008. - V. 187, № 4. - P. 435-457.

[7] Begehr H., Du Z., Wang N. Dirichlet problems for inhomogeneous complex mixed-partial differential equations of higher order in the unit disc: New view // Oper. Theory Adv. Appl. – 2009. - V. 205. - P. 101-128.

[8] Turmetov B.Kh., Ashurov R. R .On solvability of the Neumann boundary value problem for a non-homogeneous polyharmonic equation in a ball. Boundary Value Problems 2013, 2013:162 doi:10.1186/1687 - 2770-2013 - 162.

[9] Begehr H. and Gaertner E. A Dirichlet problem for the inhomogeneneous polyharmonic equations in the upper half plane // Georgian Math. J. - 2007. - V. 14. - P. 33 - 52.

[10] Karachik V.V., Turmetov B.Kh., Bekayeva A.E. Solvability conditions of the Neumann boundary value problem for the biharmonic equation in the unit ball. // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2012. Volume 81, No. 3, 487- 495

ФУНКЦИЯ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В КРУГЕ И ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Б.Д. Кошанов, К. Едил

Институт математки и математического моделирования, Алматы

Аннотация. В данной работе исследована задача Дирихле для двухмерного бигармонического уравнения. Построена в явном виде функция Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в круге. А также построено полиномиальное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Ключевые слова: уравнения Пуассона, бигармоническое уравнение, задачи Дирихле, функция Грина.

Поступила 04.04.2016 г.