N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 3, Number 307 (2016), 83 – 91

REGIONAL PROBLEMS OF THE GENERALIZED FLAT DEFORMATION OF PREVIOUSLY STRAINED ELASTIC BODY

N.I. Martynov, M.A. Ramazanova

Institute of mathematics and mathematical modeling ofCS MES RK, Almaty, Kazakhstan
nikmar50@mail.ru; mira52@mail.ru

Keywords: elastic body, static regional problem, function of tension, regional problem of Riman-Gilbert, Schwartz's integral.

Abstract. The universal representation of volume forces allowing to write down boundary conditions as boundary conditions of a regional problem in which there are no volume forces is given.

Solutions of the main static regional objectives of the nonlinear theory of elasticity of the generalized flat deformation of the one-coherent unlimited and linear previously strained elastic body in the field of volume forces are received in the closer look. The common decision is written down through two holomorphic functions, and the main regional objectives are reduced to Riman-Gilbert's problem for a holomorphic vector. Solutions of the first and second regional problems are received in the closed view with the help of integral of Schwartz.

УДК 539.3

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБОБЩЕННОЙ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО УПРУГОГО ТЕЛА

Н.И. Мартынов, М.А. Рамазанова

Институт математики и математического моделирования МОН РК, г.Алматы, Казахстан

Ключевые слова: упругое тело, статическая краевая задача, функция напряжений, краевая задача Римана–Гильберта, интеграл Шварца .

Аннотация. Дано универсальное представление объемных сил, позволяющее записать граничные условия как граничные условия краевой задачи, в которой отсутствуют объемные силы.

Решения основных статических краевых задач нелинейной теории упругости обобщенной плоской деформации односвязного неограниченно-линейного предварительно напряженного упругого тела в поле объемных сил получены в замкнутом виде. Общее решение записано через две голоморфные функции, а основные краевые задачи сведены к задаче Римана-Гильберта для голоморфного вектора. Решения первой и второй краевых задач получены в замкнутом виде с помощью интеграла Шварца.

Введение. Начально-краевые и краевые задачи нелинейной теории упругости [1-9] относятся к сложным задачам математической физики. Поэтому аналитические (эталонные) решения краевых задач нелинейной теории упругости [1, 2, 8, 9], которые крайне редки, очень важны. Они позволяют продвинуться в понимании и исследовании механики упругого поведения материала в широком диапазоне изменения режимных параметров, а также при рассмотрении поведения реальных изделий и конструкций под действием силовых факторов.

В работах [8, 9] для описания упругих свойств реальных материалов выдвинуты следующие требования на упругие потенциалы: удовлетворительное описание упругих свойств рассматриваемого материала в требуемом интервале деформаций; возможно, большая простота потенциала, облегчающая решение краевых задач. Этим условиям удовлетворяет неограниченно-линейный упругий потенциал, о котором будет идти речь в данной работе.

Отметим, что запись основных соотношений нелинейной теории упругости в комплексном виде позволила получить компактные и относительно простые соотношения. Это дало возможность построить ряд точных решений некоторых краевых задач обобщенной плоской деформации [8, 9]. Так, в работе [9] для неограниченно-линейного предварительно напряженного упругого материала построено общее решение, что позволило решить в замкнутом виде ряд краевых задач и продвинуться в разработке геометрически нелинейной теории трещин и теории разрушения.

В настоящей работе в замкнутом виде построены решения первой и второй краевых задач обобщенной плоской деформации неограниченно-линейного предварительно напряженного упругого тела, находящегося в поле объемных сил. Чтобы не загромождать изложение, авторы ограничились рассмотрением односвязной ограниченной области.

1.Основные соотношения. Приведем основные соотношения теории обобщенной плоской деформации нелинейной теории упругости, используя результаты работ [8, 9], которые понадобятся нам в дальнейшем.

Под обобщенной плоской деформацией понимают деформацию, при которой прямоугольные декартовые координаты материальной точки до (снабжены значком ^{0}) и после деформации связаны соотношениями:

$$x_1 = x_1(x_1^0, x_2^0, t), \; x_2 = x_2(x_1^0, x_2^0, t), \; x_3 = \lambda_3 x_3^0, \; \lambda_3 = const \tag{1.1}$$

Таким образом, при обобщенной плоской деформации нормальное волокно к плоскости $x_3^0 = const$ смещается поступательно, удлиняясь с постоянной кратностью $\lambda_3 = const$. Плоской деформации отвечает случай $\lambda_3 = 1$.

Введем комплексные координаты z до и после деформации η :

$$\begin{gathered} z = x_1^0 + ix_2^0, s = \bar{z} = x_1^0 - ix_2^0, x_1 = x_1^0 + u_1, x_2 = x_2^0 + u_2, \\ \eta = x_1 + ix_2, \bar{\eta} = x_1 - ix_2, w = u_1 + iu_2, i^2 = -1, \end{gathered} \tag{1.2}$$

а также комплексные операторы:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_1^0} - i \frac{\partial}{\partial x_2^0} \right), \; \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_1^0} + i \frac{\partial}{\partial x_2^0} \right) \tag{1.3}$$

В соотношениях (1.2), (1.3) i - мнимая единица, а u_1, u_2 - компоненты вектора перемещения.

Для тензора второго ранга $T = t_{\alpha\beta} g_\alpha g_\beta$ (g_α - ортонормированные орты, по греческим индексам производится суммирование) вводятся следующие комплексные компоненты тензора [8, 9]:

$$T_1 = t_{11} + t_{22} + i(t_{12} - t_{21}), \; T_2 = t_{11} - t_{22} + i(t_{12} + t_{21}), \; T_3 = t_{13} + it_{23}, \; T_4 = t_{31} + it_{32}, \; T_5 = t_{33} \tag{1.4}$$

Градиент тензора движения F и обратный ему тензор F^{-1} определяются как [8,9]:

$$F = \frac{\partial x_\mu}{\partial x_\nu^0} g_\mu g_\nu, \; F^{-1} = \frac{\partial x_\alpha^0}{\partial x_{\beta\nu}} g_\alpha g_\beta \tag{1.5}$$

Тогда дифференциалы радиусов - векторов в исходной (в недеформируемой конфигурации) и текущей (в деформируемой конфигурации) связаны соотношением:

$$dR = F \cdot dR^{\circ} \tag{1.6}$$

Из (1.6) видно, что градиент тензора F определяет локальное движение точек материальной частицы. Применяя к градиенту движения F полярное разложение, получим [8, 9]:

$$F = Q \cdot \Lambda^{\circ}, \quad \Lambda^{\circ} = \sqrt{F^{*} \cdot F}, \quad Q^{-1} = Q^{*} \tag{1.7}$$

Здесь Λ°- симметричный тензор с положительными главными значениями, а Q - ортогональный тензор (F^{*}-тензор, сопряженный тензору F). Тензор Λ° называется тензором кратностей удлинения, а величины λ_i - главными кратностями удлинения, поскольку в главном ортонормированном векторном базисе Λ°, как показано в [8, 9]:

$$\lambda_i = \frac{ds_i}{ds_i^{\circ}}, \quad ds^{\circ} = \left|dR^{\circ}\right|, \quad ds = \left|dR\right| \tag{1.8}$$

Для обобщенной плоской деформации комплексные компоненты ортогонального тензора Q и тензора градиента движения F имеют следующий вид [8, 9]:

$$Q_1 = 2e^{-i\omega}, \ Q_2 = Q_3 = Q_4 = 0, \ Q_5 = 1, \ F_1 = 2\overline{\eta}_s, \ F_2 = 2\eta_s, \ F_3 = F_4 = 0, \ F_5 = \lambda_3, \ e^{i\omega} = \frac{\eta_z}{\left|\eta_z\right|} \tag{1.9}$$

Здесь ω- угол поворота материальной частицы вокруг оси Ox_3. Таким образом, деформационные характеристики среды определяются тензором градиента движения F или тензором кратностей удлинения Λ° и ортогональным тензором Q.

Для оценки силовых характеристик упругой среды вводится вектор напряжений σ_n, действующий на площадке с нормалью n деформируемого тела, а также симметричный тензор истинных напряжений Коши $\Sigma = \sigma_{\alpha\beta} g_\alpha g_\beta$ [8,9]. Кроме того, вводится вектор напряжений $\sigma_{n^{\circ}}$ в расчете на единицу площади исходной недеформированной поверхности с нормалью n° и несимметричный номинальный тензор напряжений $\left\{F^{-1} J \Sigma\right\}$:

$$\sigma_{n^{\circ}} = \frac{dS_n}{dS_n^{\circ}} \sigma_n = n^{\circ} \left\{F^{-1} J \Sigma\right\}, \tag{1.10}$$

где $J = \left|\frac{\partial x_i}{\partial x_j^{\circ}}\right| = \lambda_3 \cdot \Delta = \lambda_3 \cdot (\left|\eta_z\right|^2 - \left|\eta_s\right|^2)$ - якобиан преобразования (1.1).

Статическое уравнение равновесия с помощью комплексных компонент номинального тензора напряжений на плоскости z (до деформации) записывается в виде [8, 9]:

$$\frac{\partial \left\{F^{-1} J \Sigma\right\}_1}{\partial s} + \frac{\partial \left\{F^{-1} J \Sigma\right\}_2}{\partial z} + f = 0, \tag{1.11}$$

где $f = \rho^{\circ}(f_1^{*} + i f_2^{*})$- объемная сила, ρ°- плотность материала до деформации, f_1^{*}, f_2^{*}- компоненты массовой силы. Система уравнений (1.11) замыкается заданием конкретного вида упругого потенциала Ф (закона упругости), который для обобщенной плоской деформации, в общем случае для сжимаемого упругого тела, задается в виде [8, 9]:

$$\Phi = \Phi(\left|\eta_z\right|, \left|\eta_s\right|, \lambda_3) \tag{1.12}$$

При этом комплексные компоненты номинального тензора напряжений определяются соотношениями:

$$\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_1=\frac{\eta_s}{|\eta_z|}\frac{\partial\Phi}{\partial|\eta_z|},\ \left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_2=\frac{\eta_s}{|\eta_s|}\frac{\partial\Phi}{\partial|\eta_s|},\ \left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_3=\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_4=0,\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_5=\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_3},\quad(1.13)$$

а истинных напряжений – соотношениями:

$$\lambda_3\Delta\Sigma_1=\overline{\eta}_s\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_1+\overline{\eta}_z\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_2,\ \lambda_3\Delta\Sigma_2=\eta_s\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_1+\eta_z\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_2,\ \Delta\Sigma_5=\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_5\quad(1.13а)$$

Заметим, что часто удобно работать с симметричным тензором напряжений Био (условными напряжениями) σ^0_{ij} [9], комплексные компоненты которого для обобщенно плоской деформации определяются как:

$$\Sigma^0_1=\frac{1}{|\eta_z|}\mathrm{Re}\left(\overline{\eta}_s\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_1\right),\ \Sigma^0_2=\frac{\overline{\eta}_s}{|\eta_z|}\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_2,\ \Sigma^0_3=\Sigma^0_4,\ \Sigma^0_5=\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_5\qquad(1.13б)$$

При этом для изотропного тела тензора условных напряжений σ^0_{ij} и истинных напряжений Коши σ_{ij} соосны, и главные напряжения σ^0_1, σ^0_2 вычисляются через упругий потенциал Ф следующим образом [9]:

$$\sigma^0_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial|\eta_z|}+\frac{\partial\Phi}{\partial|\eta_s|}\right),\ \sigma^0_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial|\eta_z|}-\frac{\partial\Phi}{\partial|\eta_s|}\right)\qquad(1.13в)$$

Отметим, что при $\lambda_1\geq\lambda_2$ [9]:

$$|\eta_z|=\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2),\ |\eta_s|=\frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2)\qquad(1.14)$$

К соотношениям (1.11)-(1.14) добавляются соответствующие граничные условия, которые записываются на недеформируемом контуре упругого тела на плоскости z.

Упругий потенциал Ф для неограниченно-линейного предварительно напряженного упругого тела, с учетом (1.14), определяется как [9]:

$$\Phi=\sigma^*|\eta_z|^2+\alpha|\eta_s|^2+\beta(\lambda_3-1)^2=\frac{\sigma^*}{4}(\lambda_1+\lambda_2)^2+\frac{\alpha}{4}(\lambda_1-\lambda_2)^2+\beta(\lambda_3-1)^2,\qquad(1.15)$$

где σ^*,α , β - упругие постоянные.

С учетом (1.13), (1.15) комплексные компоненты номинального тензора напряжений запишутся в виде:

$$\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_1=2\sigma^*\eta_z,\ \left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_2=2\alpha\eta_s,\ \left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_3=\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_4=0,\ \left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_1=2\beta(\lambda_3-1),\qquad(1.15а)$$

т. е компоненты номинального тензора напряжений физически линейным образом связаны с компонентами тензора градиента движения. Из (1.13), (1.13в), (1.14), (1.15) (см. [9]) следует, что связь между энергетической парой (главными условными напряжениями σ^0_i и главными относительными удлинениями (λ_1-1)) линейна и при отсутствии деформаций $(\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1)$,

$\sigma_1^0 = \sigma_2^0 = \sigma^*, \sigma_3^0 = 0$. Т.е. σ^* - величина предварительного всестороннего (в плоскости) условного напряжения. Такой материал в [9] назван неограниченно-линейным предварительно напряженным упругим материалом. Использование упругого потенциала (1.15) позволило получить точные решения ряда краевых задач, и с их помощью выявить влияние геометрической нелинейности на напряженно-деформируемое состояние упругой среды [9].

Отметим, что связь между компонентами номинального тензора напряжений (1.15а) и градиентом движения линейна, в то время как связь между компонентами истинного тензора напряжений и градиентом движения нелинейна, что видно из соотношений (13а), (1.15а):

$$\lambda_3 \Delta\Sigma_1 = 2\sigma^* |\eta_z|^2 + 2\alpha |\eta_s|^2, \ \lambda_3 \Delta\Sigma_2 = 2(\sigma^* + \alpha)\eta_z \eta_s, \ \Delta\Sigma_5 = \left\{F^{-1} J \Sigma\right\}$$

3.Представление объемных сил. Объемную силу f в уравнении равновесия (1.11) представим, как решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\theta_{zs} = f \tag{1.16}$$

$$\theta\big|_{\Gamma} = 0 \tag{1.16a}$$

В качестве функции θ возьмем функцию:

$$\theta = \frac{1}{2}(\psi_1(z) + \overline{\psi}_1(s)) + \frac{i}{2}(\psi_2(z) + \overline{\psi}_2(s)) + F, \ F = \frac{2}{\pi}\iint_D f(\xi) \ln|\xi - z| d\xi_1 d\xi_2, \ \xi = \xi_1 + i\xi_2, \tag{1.17}$$

где ψ_1, ψ_2 - пока произвольные голоморфные функции, а F- объемный потенциал. Подберем ψ_1, ψ_2 таким образом, чтобы на границе Γ выполнялось соотношение (1.16а). С учетом (1.17), (1.16а) для определения ψ_1, ψ_2 имеем две простейшие краевые задачи Римана – Гильберта:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\psi_1\big|_{\Gamma} &= -\mathrm{Re}F \\ \mathrm{Re}\psi_2\big|_{\Gamma} &= -\mathrm{Im}F \end{aligned} \tag{1.18}$$

С помощью конформного отображения область D можно отобразить на единичный круг и рассматривать задачу (1.18) на границе единичного круга. При таком отображении вид граничных условий (1.18) не изменяется. В дальнейшем область D считаем единичным кругом. Решение (1.18) для единичного круга записывается с помощью интеграла Шварца [10,11,13]:

$$\psi_1(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{\mathrm{Re}F(t)(t+z)}{t(t-z)} dt + iC_1, \quad \psi_2(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{\mathrm{Im}F(t)(t+z)}{t(t-z)} dt + iC_2 \tag{1.18a}$$

Здесь C_1, C_2 - произвольные действительные постоянные, которые для односвязной области, без потери общности, можно положить равными нулю.

Таким образом, объемную силу f будем представлять в виде (1.16) , где голоморфные функции ψ_1, ψ_2 определяются в замкнутом виде (1.18а) при $C_1 = C_2 = 0$. Такое представление объемных сил, как мы увидим ниже, универсально в том смысле, что позволяет записать граничные условия как граничные условия краевой задачи, в которой отсутствуют объемные силы.

4. **Общее решение.** С учетом (1.16) уравнение равновесия (1.11) запишется в виде:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left\{\left\{F^{-1} J \Sigma\right\}_1 + \theta_z\right\} + \frac{\partial\left\{F^{-1} J \Sigma\right\}_2}{\partial z} = 0 \tag{2.1}$$

Введем комплексную функцию напряжений U, которая интегрирует уравнение (2.1).

$$-U_s = \left\{F^{-1} J \Sigma\right\}_2, \ U_z = \left\{F^{-1} J \Sigma\right\}_1 + \theta_z, \tag{2.2}$$

С учетом (1.15а) соотношения (2.2) запишутся в виде:

$$U_z = 2\sigma^* \eta_z + \theta_z, \ -U_s = 2\alpha\eta_s, \ \left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_5 = 2\beta(\lambda_3 - 1) \tag{2.3}$$

Из первых двух соотношений (2.3) имеем:

$$U_{zs} - U_{sz} = 2(\sigma^* + \alpha)\eta_{zs} + \theta_{zs} = 0 \tag{2.4}$$

Интегрируя соотношение (2.4), получим:

$$2(\sigma^* + \alpha)\eta = \Phi_1(z) + \overline{\Phi}_2(s) - \theta \,, \tag{2.5}$$

где Φ_1, Φ_2 - произвольные аналитические функции от z. Интегрируя первые два соотношения (2.3), будем иметь:

$$U = 2\sigma^* \eta + \theta + \overline{\Phi}_5, \ -U = 2\alpha\eta + \Phi_6 \tag{2.6}$$

Складывая первые два соотношения (2.6) с учетом (2.5), получим:

$$\Phi_1 + \Phi_6 = -(\overline{\Phi}_2 + \overline{\Phi}_5) = C = const$$

Тогда $$U = \frac{\sigma^*}{(\sigma^* + \alpha)}\Phi_1 - \frac{\alpha}{(\sigma^* + \alpha)}\overline{\Phi}_2 + \frac{\alpha\theta}{(\sigma^* + \alpha)} - C \,.$$

Произвольную постоянную C можно положить равной нулю, поскольку она не влияет на компоненты номинального тензора напряжений. Окончательно получим:

$$U = \frac{\sigma^*}{(\sigma^* + \alpha)}\Phi_1 - \frac{\alpha}{(\sigma^* + \alpha)}\overline{\Phi}_2 + \frac{\alpha\theta}{(\sigma^* + \alpha)}, \ 2(\sigma^* + \alpha)\eta = \Phi_1(z) + \overline{\Phi}_2(s) - \theta \tag{2.7}$$

При обобщенной плоской деформации сжимаемого материала при заданной осевой силе G_3 постоянная λ_3 определяется из соотношения [9]:

$$G_3 = \iint_D \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_3} dS^\circ \tag{2.8}$$

Учитывая последнее соотношение (1.13), а также (2.3), из (2.8) получаем:

$$\lambda_3 = 1 + \frac{G_3}{2\beta S^0}, \ \left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_5 = \frac{G_3}{S^0} \tag{2.8a}$$

В соотношениях (2.8), (2.8а) S° - площадь поперечного сечения цилиндра в недеформируемом состоянии.

5. Первая краевая задача. Рассмотрим первую краевую задачу, когда на границе Γ недеформируемой области D заданы усилия: $g = g_1 + ig_2$. Граничные условия на Γ записываются в виде [8,9]:

$$n^\circ \left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_1 + \overline{n}^\circ \left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_2 = 2g, \ \ n^\circ = n_1^\circ + in_2^\circ = e^{i\gamma_0} = -i\frac{dz}{d\sigma_0}, \tag{2.9}$$

где γ_0 - угол между внешней нормалью n° и осью Ox_1^0, σ_0 - длина дуги недеформируемого контура. С учетом (2.2) , (1.16а) соотношение (2.9) примет вид:

$$\left.\frac{dU}{d\sigma_0}\right|_{\Gamma} = i(2g + e^{i\gamma_0}\theta_z) = 2ig,\ \text{или}\ U\big|_{\Gamma} = C + 2i\int_0^{\sigma_0} g d\sigma_0 + \int_{z(0)}^{z(\sigma_0)} \theta_z dz\ = C + 2i\int_0^{\sigma_0} g d\sigma_0 = G, \qquad (2.10)$$

где $C = const$. Для односвязной области произвольную постоянную C можно положить равной нулю. Подставляя первое соотношение (2.7) во второе соотношение (2.10) с учетом (1.16а), получим:

$$\sigma^*\Phi_1 - \alpha\overline{\Phi}_2 = (\sigma^* + \alpha)G \qquad (2.11)$$

Граничное условие (2.11) можно записать как граничную задачу Римана-Гильберта [10-13] для голоморфного вектора $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)^T$ в виде:

$$\mathrm{Re}(\overline{A}\Phi)\big|_{\Gamma} = b,\ \overline{A} = \begin{pmatrix} \sigma^* & -\alpha \\ i\sigma^* & i\alpha \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} (\sigma^* + \alpha)\mathrm{Re}G \\ -(\sigma^* + \alpha)\mathrm{Im}G \end{pmatrix},\ \det|A| \neq 0, \qquad (2.12)$$

а решение (2.12) можно записать, используя интеграл Шварца [10,11,13]:

$$\Phi(z) = \frac{\overline{A}^{-1}}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{b(t)(t+z)}{t(t-z)}dt + i\overline{A}^{-1}\cdot C_0 \qquad (2.13)$$

где C_0 - постоянный действительный вектор-столбец.

Отметим, что для первой краевой задачи система объемных и поверхностных сил является самоуравновешенной системой сил, а номинальные напряжения предполагаются непрерывными вплоть до границы *Г*. Перемещения определяются с точностью до жесткого смещения всего тела. Тогда C_0 в (2.13) можно положить равным нулю. Чтобы перемещения были однозначными функциями, необходимо задать в какой-либо точке упругого тела перемещение до деформации или после деформации. Полагая, например, $z_0 = 0,\ \eta_0 = \eta(0)$ и используя (2.7), (2.12), (2.13), получим:

$$C_0 = \begin{pmatrix} C_{01} \\ C_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Im}X \\ \mathrm{Re}X \end{pmatrix},\ X = 2\sigma^*\alpha\left(2\eta_0 + \frac{\theta(0)}{(\sigma^* + \alpha)}\right) - \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\left\{\alpha G(t) - \sigma^* G(1/t)\right\}\frac{dt}{t} \qquad (2.13a)$$

Таким образом, решение первой краевой задачи записывается в замкнутом виде. Нахождение остальных силовых и деформационных характеристик упругого тела осуществляется по приведенным выше соответствующим формулам.

На поперечное сечение цилиндра действуют (со стороны положительного направления оси Ox_3) напряжения с главным вектором (2.8) и главным моментом [9]:

$$M_1 + iM_2 = -\iint_D z\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_5 dS^{\circ} \qquad (2.14)$$

Учитывая, что $\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_5 = const$ (третье соотношение (2.3)), и проведя ось Ox_3 через центр тяжести поперечного сечения *D*, получим, что главный момент (2.14) равен нулю.

Главный вектор и главный момент напряжений, действующих на боковую поверхность цилиндра единичной высоты [9]:

$$\begin{gathered} G_1 + iG_2 = -\frac{i}{2}\int_{\Gamma}\left\{\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_1 dz - \left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_2 ds\right\}, \\ M_3 = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{\Gamma} s\left\{\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_1 dz - \left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_2 ds\right\} \end{gathered} \qquad (2.15)$$

Поскольку рассматривается статическая краевая задача, то система объемных f и поверхностных g сил является самоуравновешенной. Поэтому выполняются равенства:

$$\iint\limits_D \theta_{zs} dS^0 + \int\limits_\Gamma g d\sigma_0 = 0,\ \frac{i}{2}\iint\limits_D (z\overline{\theta}_{zs} - s\theta_{zs}) dS^0 + \frac{i}{2}\int\limits_\Gamma (z\overline{g} - sg) d\sigma_0 = 0 \tag{2.16}$$

Первое соотношение (2.16), записанное в комплексной форме, выражает факт равенства нулю результирующей объемных и контурных сил, второе соотношение (2.16) – равенство нулю суммарного момента объемных и контурных сил. Воспользуемся формулой Грина:

$$\iint\limits_D W_s dS^0 = -\frac{i}{2}\int\limits_\Gamma W dz,\ \iint\limits_D W_z dS^0 = \frac{i}{2}\int\limits_\Gamma W ds \tag{2.17}$$

и соотношением (1.16а). Тогда (2.16) примут следующий вид:

$$\int\limits_\Gamma g d\sigma_0 = 0,\ \int\limits_\Gamma (z\overline{g} - sg) d\sigma_0 = 0 \tag{2.18}$$

С учетом (1.16а), (2.2), (2.18) соотношения (2.15) для главного вектора и главного момента запишутся в виде:

$$G_1 + iG_2 = 2\int\limits_\Gamma g d\sigma_0 = 0,\ M_3 = \frac{i}{2}\int\limits_\Gamma (z\overline{g} - sg) d\sigma_0 = 0\ , \tag{2.19}$$

которые совместно с построенным решением, удовлетворяющим уравнениям равновесия (2.1) и граничным условиям (2.10), представляют необходимые и достаточные условия равновесия упругого тела.

6. Вторая краевая задача. Рассмотрим вторую краевую задачу, когда на границе Γ заданы перемещения или известна величина:

$$2(\sigma^* + \alpha)\eta\big|_\Gamma = 2(\sigma^* + \alpha)(z + W)\big|_\Gamma = 2(\sigma^* + \alpha) g \tag{2.20}$$

Учитывая второе соотношение (2.7) и (1.16а), краевое условие (2.20) запишем в виде:

$$(\Phi_1 + \overline{\Phi}_2)\big|_\Gamma = g\ , \tag{2.20a}$$

или в виде (2.12), где

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} g \\ \operatorname{Im} g \end{pmatrix},\ \det\left|\overline{A}\right| \neq 0 \tag{2.21}$$

Решение второй краевой задачи записывается в форме (2.13), где соответствующие матрицы определяются соотношениями (2.21), а действительный вектор столбец C_0 равен нулю.

Для второй краевой задачи компоненты деформаций или η_z, η_s должны быть непрерывны вплоть до границы. Поэтому граничное значение g (2.20) должно быть непрерывно-дифференцируемой функцией на контуре. Для второй краевой задачи подразумевается, что перемещения, заданные на границе, обеспечивают равновесие упругого тела.

Заключение. Таким образом, решения первой и второй плоских статических краевых задач нелинейной теории упругости предварительно напряженного неограниченно-линейного односвязного упругого тела в поле объемных сил получены в замкнутом виде.

Отметим, что для смешанной краевой задачи (на части границы Γ заданы усилия, на другой ее части заданы перемещения) матрица G_3 в граничном условии принимает значения G_1 или G_2 и терпит разрыв первого рода на множестве меры нуль. С помощью определенной процедуры она может быть сведена к непрерывной матрице [11-13], и решение смешанной краевой задачи для предварительно напряженного материала может быть получено в замкнутом виде. Но это тема отдельного исследования.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: 1965, 455с.
[2] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.:1980, 512с.

[3] Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. М.: 1948, 211с.
[4] Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: 1958, 369с.
[5] Прагер В. Введение в механику сплошных сред. М.: 1963, 311с.
[6] Трелоар Л. Введение в науку о полимерах. М.: 1973, 238с.
[7] Трусдел К. Первоначальный курс механики сплошных сред. М.: 1975, 592с.
[8] Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986, 336с.
[9] Черных К.Ф. Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин. М: Наука - Физматлит, 1996, 287с.
[10] Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М: Наука, 1988, 509с.
[11] Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. М.: Наука, 1977, 424 с.
[12] Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: 1970, 379с.
[13] Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977, 640с.
[14] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. М.:ф.-м.л., 1962, 599с.

REFERENCE

[1] Grin A., Adkins Dzh. Bol'shie uprugie deformacii i nelinejnaja mehanika sploshnoj sredy. M.: **1965**, 455s (in Russ).
[2] Lur'e A.I. Nelinejnaja teorija uprugosti. M.:**1980**, 512s (in Russ).
[3] Novozhilov V.V. Osnovy nelinejnoj teorii uprugosti. M.: **1948**, 211s (in Russ).
[4] Novozhilov V.V. Teorija uprugosti. L.: **1958**, 369s (in Russ).
[5] Prager V. Vvedenie v mehaniku sploshnyh sred. M.: **1963**, 311s (in Russ).
[6] Treloar L. Vvedenie v nauku o polimerah. M.: **1973**, 238s (in Russ).
[7] Trusdel K. Pervonachal'nyj kurs mehaniki sploshnyh sred. M.: **1975**, 592s (in Russ).
[8] Chernyh K.F. Nelinejnaja teorija uprugosti v mashinostroitel'nyh raschetah. L.: Mashino-stroenie, **1986,** 336s (in Russ).
[9] Chernyh K.F. Vvedenie v fizicheski i geometricheski nelinejnuju teoriju treshhin. M: Nauka - Fizmatlit, **1996**, 287s (in Russ).
[10] Vekua I.N. Obobshhennye analiticheskie funkcii. M: Nauka, **1988**, 509s (in Russ).
[11] Monahov V.N. Kraevye zadachi so svobodnymi granicami dlja jellipticheskih sistem uravnenij. M.: Nauka, **1977,** 424 s (in Russ).
[12] Vekua N.P. Sistemy singuljarnyh integral'nyh uravnenij i nekotorye granichnye zadachi. M**.: 1970**, 379s (in Russ).
[13] Gahov F.D. Kraevye zadachi. M.: Nauka, **1977,** 640s (in Russ).
[14] Mushelishvili N.I. Singuljarnye integral'nye uravnenija. Granichnye zadachi teorii funkcij i nekotorye ih prilozhenija k matematicheskoj fizike. M.:f.-m.l., **1962,** 599s (in Russ).

АЛДЫН АЛА КЕРНЕУЛЕНГЕН СЕРПІМДІ ДЕНЕНІҢ ЖАЛПЫЛАНҒАН ТЕГІС ДЕФОРМАЦИЯСЫНЫҢ ШЕТТІК ЕСЕПТЕРІ

Н.И. Мартынов, М.А. Рамазанова

ҚР БҒМ математика және математикалық моделдеу институты, Алматы қаласы. Қазақстан

Түйін сөздер: серпімді дене, статикалық шеттік есеп, кернеу функциясы, Риман-Гильберт шеттік есебі, Шварң интегралы.

Аннотация. Көлемдік күштер болмайтын, шекаралық шарттарды шеттік есептің шекаралық шарттары ретінде жазуды мүмкін ететін, көлемдік күштердің әмбебап көрсетілімі берілді.

Көлемдік күштер өрісінде алдын ала кернеуленген бір байланысты шектеусіз-сызықтық серпімді дененің жалпыланған тегіс деформациясының бейсызық серпімділік теориясының негізгі статикалық шеттік есептерінің шешімі тұйықталған түрде алынды. Жалпы шешім екі голоморфтық функциялар арқылы жазылды, ал негізгі шеттік есептер голоморфтық вектор үшін Риман-Гильберт есебіне келтірілді. Шварң интегралының көмегімен бірінші және екінші шеттік есептердің шешімі тұйықталған түрде алынды.

Поступила 04.04.2016 г.