N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 3, Number 307 (2016), 185 – 194

UDC 517.956

ABOUT VOLTAIRE NOT LOCAL TASKS WITH SHIFT FOR THE WAVE EQUATION

Orazov I.O., A. A. Kopzhasarova, A.Sh.Shaldanbayev

M.Auezov South Kazakhstan state University, Shymkent, The Republic of Kazakhstan
asyl_k@mail.ru

Keywords: the wave equation, a task with shift, volterrovy operators, operators of similarity, Rellikh's theorem.

Abstract. The elementary regional task with shift and with non-uniform conditions for the wave equation [1] has been investigated by A. M. Nakhushev. Nakhushev L.M. researches. was are continued by a number of authors of [2]-[4] and have been established that among these tasks there can be both the volterrovy and full tasks possessing full system of own functions. The carried-out analysis, the content of these works has shown that spectral properties of these regional tasks depend on area geometry, in particular, from group the movement of area. Not equilateral the triangle doesn't possess group of simmetriya therefore we have refused a characteristic triangle and began to consider regional tasks in a characteristic quadrangle. At the same time the equations with deviating by arguments which deserve separate research naturally appear.

In the real work the volterrovost of a number of regional tasks for the wave equation considered in a characteristic quadrangle is established.

УДК 517.956

ТОЛҚЫН ТЕҢДЕУІНІҢ СЫРҒАҚТЫ ШАРТАРАПТЫ ВОЛТЕРЛІ ЕСЕПТЕРІ

Оразов И.О., Көпжасарова А.Ә., Шалданбаев Ә.Ш.

М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент қ.,
Қазақстан Республикасы

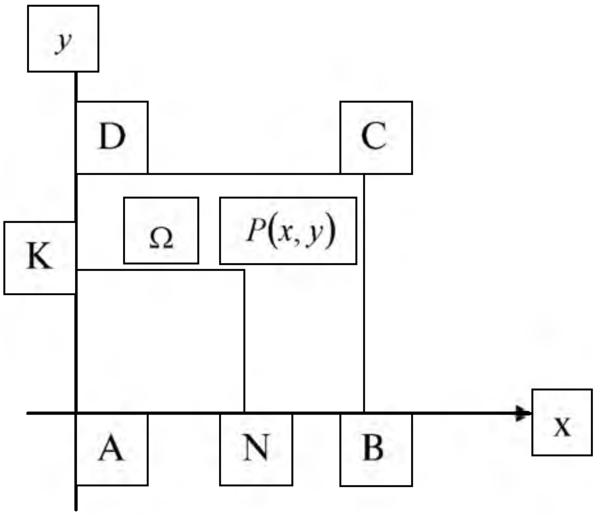
Сырлы сөздер: Толқын теңдеуі, сырғақты, шартарапты, волтерлі,ұқсас операторлар,Реллихтың теоремасы.

Аннотация. Бұл еңбекте толқын теңдеуіне арналған бірнеше шекаралық есептердің вольтерлігі көрсетілген,олар бұрыннан белгілі Гурсаның, Дарбудың, Кошидің есептерінен өзгеше.

1.Кіріспе.

Шекаралық шарты босмүшелі,сырғақты есептің ең қарапайым үлгілерін,толқындық теңдеу үшін алғаш рет А.М.Нахушев [1] зерттеген.Бұл зерттеулер,кейінірек,бірқатар авторлардың [2]-[4] еңбектеріне арқау болды,олар мұндай есептердің ішінде вөлерлі есептермен қатар,толық есептердің-де болатынын көрсетті,яғни,меншікті функциялары $L^2(\Omega)$ кеңістігінде толық система болатын есептер-де бар екен.Осы еңбектерді саралау барысында,бұл есептердің спектрәлдік қасиеттері оның аймағының геометриясына тәуелді екені байқалды,дәлірек айтсақ,аймақтың қозғалу тобына.Тең бүйірлі үшбұрыштың симметрия тобы жоқ,сондықтан біз есепті тіктөртбұрыш ішінде қарастырғанды жөн көрдік.Бұл сәтте аргументі ауытқыған теңдеулер өз-өзінен пайда болады,олар әрине,арнайы зерттеулерді керек етеді,біз оған онша терең үңілмейміз

Ω –дегеніміз R^2 жазықтығында жатқан квадрат болсын, оның қабырғалары $AB: y=0, 0\le x\le 1; BC: x=1, 0\le y\le 1; CD: y=1, 0\le x\le 1; DA: x=0, 0\le y\le 1$ (1-суретке қара).



1-сурет.

Осы Ω –квадратында толқын теңдеуінің, мынадай,

$$Lu = u_{xy} = f(x,y), (x,y)\in\Omega \tag{1}$$

$$\alpha u(0,y) + \beta u(1,1-y) = 0 \tag{2}$$

$$\alpha u(x,0) + \beta u(1-x,1) = 0 \tag{3}$$

шартарапты сырғақты шекаралық есебін қарастырайық, мұндағы α, β –ерікті тұрақты комплекс шамалар.

Егер $\beta = 0, \alpha \ne 0$ болса, онда (1) –(2) есептен Гурсаның, мына,

$$L_G u = u_{xy}(x,y) = f(x,y), (x,y)\in\Omega \tag{4}$$

u(x,y)=0,
u(x,0)=0 (5)

есебі шығады.

Анықтама 1. Жоғарыдағы, (1) теңдеу мен (2) –(3) шекаралық шарттарды тепе-теңдікке айналдыратын $C^2(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$ класының *u(x,y)* функциясын (1) –(3) есептің тұрлаулы шешімі дейміз.

Анықтама 2. Егер, жоғарыдағы (2) –(3) шекаралық шарттарын қанағаттандырат $\{u_n\}, n=1,2,\ldots$ функциялар тізбегі табылып, $n\to\infty$ сәтінде, мынадай, $u_n\to\infty, Lu_n\to f$ болса, онда $u(x,y)\in L^2(\Omega)$ функциясын (1) –(3) есебінің әлді шешімі дейміз.

Анықтама 3. Мына, $C^2(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$ кластың функцияларынан құралған сызықтық көпсалада (2) –(3) шекаралық шарттар мен (1) өрнек арқылы анықталған оператордың қабындысын әлді оператор дейміз.

Осы анықтамалар бойынша, әлді оператор үзіксіз қайтымды болған сәтте ғана есебіміз кез келген $f(x,y)\in L^2(\Omega)$ үшін әлді шешіледі. Сондай-ақ, *u(x,y)* функциясы әлді оператордың анықталу аймағында жатқанда ғана, әлді шешім болады. Әрі қарай, оператор туралы айтқанда ,біз әлді операторды ойға аламыз.

2.Зерттеу әдістері.

Операторлардың әсіре үзіксіз екенін көрсету үшін Реллихтың теоремасы ,немесе Соболевтің леммасы қолданылды,ал вөлтерлікті Нерсесянның теоремасы арқылы дәлелдедік.Операторлардың ұқсастығы орынды пайдаланылды,ал ұқсастық операторлары,әлгі,айтылған топтың элементтері арқылы тұрғызылды.Шекаралық есептерге операторлық тұрғыдан қарауды біз [6-12] еңбектерден үйрендік. Біз есепті тіктөртбұрыш ішінде қарастырғанды жөн көрдік.Бұл сәтте арғументі ауытқыған теңдеулер өз-өзінен пайда болады,олар әрнне,арнайы зерттеулерді керек етеді,біз оған онша терең үңілмейміз [13-20].

3.Зерттеу нәтиежелері.

Теорема 1. Егер $\alpha^2 - \beta^2 \neq$ болса, онда толқын теңдеуінің, мына,

$$Lu = u_{xy}(x,y) = f(x,y),(x,y) \in \Omega, f(x,y) \in L^2(\Omega) \quad (1)$$

$$\alpha \cdot u(0,y) + \beta \cdot u(1,1-y) = 0 \quad (2)$$

$$\alpha \cdot u(x,0) + \beta \cdot u(1-x,1) = 0 \quad (3)$$

сырғақты шартарапты есебі әлді шешіледі, және әлді операторға кері L^{-1} операторы әсіре үзіксіз волтерлі.

Дәлелі. Жоғарыда, біз, мынадай,

$$L = T^{-1} L_G T$$

формула алғанбыз. Мұнан, $L^{-1} = T^{-1} L_G^{-1} T, T$ мен T^{-1} операторлары шектеулі, ал L_G^{-1} операторы әсіре үздіксіз, сондықтан L^{-1} операторы да әсіре үзіксіз. Ұқсас операторлардың спектрлері бірдей сондықтан L^{-1} операторының да нөлден өзгеше меншікті мәндері жоқ. Теорема дәлелденді.

Осы (1) теоремаға байланысты, мынадай, сұрақ туындайды. Алынған теорема барлық волтерлі операторларды сыйпаттай-ма? –жоқ әлде басқа да волтерлі оператор бар ма?

Теорема 2. Толқын теңдеуінің, мына

$$Lv = v_{xy}(x,y) = f(x,y),(x,y) \in \Omega \quad (6)$$

$$v\big|_{y=0} = 0, v\big|_{x=1} = 0 \quad (7)$$

шекаралық есебі $L^2(\Omega)$ кеңістігінде әлді шешіледі және осы есептің әлді операторына кері L^{-1} операторы әсіре үзіксіз және волтерлі.

Дәлелі. S-операторы, былай, $v(x,y) = Su(x,y) = u(1-x,y)$ анықталсын делік, онда $S^2 = I$ және

$$v\big|_{y=0} = u(1-x,0) = 0, v\big|_{x=1} = u(0,y) = 0$$

мұндағы $u(x,y) \in D(L_G)$, демек, егер $u(x,y) \in D(L_G)$ болса, онда $v(x,y) \in D(L)$.

Әрі қарай,

$$L_G v = L_G Su = v_{xy} = -u_{xy}(-x,y) = -SLu, \Rightarrow$$

$$= S^{-1} L_G S = -L, S^{-1}(-L_G)S = L, \Rightarrow$$

$$= L^{-1} = S^{-1}(-L_G^{-1})S$$

L_G^{-1} операторының волтерлігі $\in$ мен компэктілігінен -L_G^{-1} операторының компэктілігі мен волтерлігі шығады. Олай болса L^{-1} операторы да әсіре үзіксіз және волтерлі.

Теорема 3. Толқын теңдеуінің, мына,

$$Lv = v_{xy}(x,y) = f(x,y),(x,y) \in \Omega \qquad (8)$$

$$v\big|_{y=1} = 0, v\big|_{x=0} = 0 \qquad (9)$$

шекаралық есебі әлді шешіледі және осы есептің әлді операторына кері L^{-1} операторы әсіре үзіксіз және волтерлі.

I-Дәлелі. Бұл (8) –(9) есепке сәйкес оператор жоғарыдағы (6) –(7) есептің сыңары, сондықтан бұл теорема алдыңғы теоремадан шығады.

II-Дәлелі. Тағы да 2 теореманың әдісін қолданамыз. Егер $v(x,y) = Su(x,y) = u(x,1-y)$ болса, онда егер $u(x,y) \in D(L_G)$ болса, онда

$$v\big|_{y=1} = u(x,0) = 0, v\big|_{x=0} = u(0,1-y) = 0$$

сондықтан, $v(x,y) \in D(L)$.

Әрі қарай

$$Lv = LSu(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(x,1-y) = -u_{xy}(x,1-y) = -SL_G.$$

Демек, $LS = -SL_G, L = S(-L_G)S^{-1}, L^{-1} = S(-L_G^{-1})S^{-1}$, яғни L^{-1} операторы мен -L_G^{-1} операторы ұқсас, L_G^{-1} –операторының компэктілігі мен волтерлігінен$-L_G^{-1}$ операторының волтерлігі мен компэктілігі шығады. Мұнан, L^{-1} сператорының әсіре үзіксіз және волтерлі екенін көреміз.

Енді, A операторы, мына

$$Au = u_{xy} = f(x,y) \qquad (10)$$

$$u\big|_{x=0} = 0, u\big|_{y=1} = 0 \Big| \qquad (11)$$

шекаралық есепке, ал A^* операторы, мына,

$$A_v^* = v_{xy} = g(x,y)$$

$$v\big|_{y=0} = 0, v\big|_{x=1} = 0 \Big|$$

шекаралық есепке сәйкес келсін делік.

Бұл сәтте, шамасы, бұл операторлар өзара ұқсас болса керек? Шынында да, егер $v(x,y) = Su(x,y) = u(y,x)$ болсын деп жорысақ, онда

$$v(x,y)\big|_{y=0} u(0,x) = 0, v(x,y)\big|_{x=1} = u(y,1) = 0 \Big|$$

болады. Демек, егер $u(x,y) \in D(A)$ болса, онда $v(x,y) \in D(A^*)$

Әрі қарай,

$$A^* v = A^* Su(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(y,x) = Su_{xy}(x,y) = SAu(x,y),$$

демек, $A^{*}S = SA, \Rightarrow A^{*} = SAS^{-1}, \Rightarrow (A^{*})^{-1} = SA^{-1}S^{-1}$.

Бұл теңдіктен (10) –(11) есепке ұқсас волтерлі есептердің екінші класы бар екенін байқаймыз.

Ұқсастық операторын, былай $T = \alpha I + \beta S$ іздейік, мұндағы $Su(x, y) = u(y, x)$, I-бірлік оператор. Енді былай $v(x, y) = Tu = \alpha u(x, y) + \beta u(y, x)$ болсын деп жорысақ онда, мынадай,

$$v(x,y)\big|_{x=0} = \alpha u(0,y) + \beta u(y,0) = 0; v(x,y)\big|_{y=1} = \alpha u(x,1) + \beta(1,x) = 0$$

болады.

Әрі қарай,

$$Av(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} Tu(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}[\alpha u(x,y) + \beta u(y,x)] =$$

$$= \alpha u_{xy}(x,y) + \beta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(x,y) = \alpha u_{xy}(x,y) + \beta \delta u_{xy} =$$

$$= (\alpha I + \beta S) u_{xy}(x,y) = (\alpha I + \beta S) Lu$$

$$ATu = TLu \Rightarrow T^{-1}AT = L, \Rightarrow L^{-1} = TA^{-1}T$$

Демек, $\alpha^2 - \beta^2 \neq 0$ сәтінде *A* және *L* операторлары ұқсас. Осыдан төртінші теореманы аламыз.

Теорема 4. Егер $\alpha^2 - \beta^2 \neq 0$ болса, онда толқын теңдеуінің, мына

$$Lu = u_{xy}(x,y) = f(x,y), (x,y) \in L^2(\Omega)$$

$$\alpha \cdot u(0,y) + \beta \cdot u(y,0) = 0, \alpha \cdot u(x,1) + \beta \cdot u(1,x) = 0$$

шартарапты есебі әлді шешіледі, және осы есептің әлді операторына кері L^{-1} операторы әсіре үзіксіз және волтерлі.

4.Талқысы.

Жоғарыдағы, (4) –(5) Гурсаның есебін шешу үшін, (4) теңдеудің оң жағын ANPK төртбұрышы бойымен интеғралдаймыз, және осы сәтте Гриннің, мына,

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \frac{1}{2}[\oint_{\partial\Omega} -u_x dx + u_y dy]$$

формуласына арқа сүйейміз.

$$\int_{ANPK} f(\xi,\eta)d\xi, d\eta = \frac{1}{2}[-\int_A^N u_\xi d\xi + \int_N^P u_\eta d\eta - \int_P^K u_\xi d\xi + \int_K^A u_\eta d\eta] =$$

$$= \frac{1}{2}[u(A) - u(N) + u(P) - u(N) - u(K) + u(P) + u(A) + u(K)] =$$

$$= u(A) - u(N) + u(P) - u(K) = u(x,x) - u(x,0) + u(x,y) - u(0,y).$$

Демек, Гурсаның (4) –(5) есебінің шешімі, мынадай,

$$u(x,y) = u(0,y) + u(x,0) - u(x,x) + \int_0^x \int_0^y f(\xi,\eta)d\xi d\eta = \int_0^x \int_0^y f(\xi,\eta)d\xi d\eta =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \theta(x-\xi) \cdot \theta(y-\eta) f(\xi,\eta) d\xi d\eta \qquad (12)$$

мұндағы $\theta(x)$ –Хевисайдтың функциясы

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, егер x \geq 0, \\ 0, егер x < 0 \end{cases}$$

$C(\overline{\Omega})$ –сызықтық көпсаласы $L^2(\Omega)$ кеңістігінде тығыз орналасқан, сондықтан (12) формула бүткіл $L^2(\Omega)$ кеңістігіне жаратылады. Бұл (12) формула арқылы волтерлі оператор анықталганын көрсетейік, бұл үшін А.Б.Нерсесянның [5] теоремасын қолданайық.

Анықтама 4. Мына, $S \subset \Omega x \Omega$ қатыстық орындалсын дейік. Егер $K(P_0, P_1) \in L^2(\Omega, \Omega)$ және $K(P_0, P_1) = 0, (P_0, P_1) \notin S$ сәтінде болса, онда $K(P_0, P_1)$ –функциясын S –ядро дейміз.

Анықтама 5. Егер кез келген S –ядросының меншікті мәндері жоқ болса, онда ашық $S \subset \Omega x \Omega$ жыйыны V түріндегі жыйын деп аталады.

Мынадай,

$$P_1 \overset{S}{\rightarrow} P_2 егер (P_1 P_2) \in S болса;$$

$$P_1 \overset{S}{\leftarrow} P_2 егер (P_1 P_2) \notin S болса$$

белгілеулер енгізейік.

Лемма 1 [5]. Мына, S жыйыны V түрлі жыйын болуы үшін $k \geq 1$ сәтінде, мына,

$$P_1 \overset{S}{\rightarrow} P_2 \overset{S}{\rightarrow} P_3 \overset{S}{\rightarrow} \ldots. \overset{S}{\rightarrow} P_k$$

шарттан, келесі, $P_k \leftarrow P_1$ шарттың туындауы қажетті әрі жеткілікті.

Жогарыдагы (12) интегралдық оператордың ядросы, мынадай,

$$K(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1) = \theta(\xi - \xi_1) \cdot \theta(\eta - \eta_1), (\xi, \eta) \in \Omega, \xi_1, \eta_1 \in \Omega$$

Бұл ядро S ядро, мұндагы S дегеніміз, төмендегі

$$S = \{(P_0, P_1) \in \Omega x \Omega, \xi > \xi_1, \eta > \eta_1\}$$

жыйын.

Енді, мына,

$$P_1 \overset{S}{\rightarrow} P_2 \overset{S}{\rightarrow} \ldots. \rightarrow P_n$$

шарт орындалсын дейік, онда $\xi_1 > \xi_2 > \ldots > \xi_n, \eta_1 > \eta_2 > \ldots > \eta_n$ демек $\xi_1 > \xi_k$ және $\eta_1 > \eta_k$.

Егер $(P_k, P_1) \in S$ болса, онда $\xi_k > \xi_1, \eta_k > \eta_1$ болар еді, ал бұлар біздің теңсіздіктерімізге қайшы, олай болса, $(P_k, P_1) \notin S, \Rightarrow P_k \overset{S}{\leftarrow} P_1$.

Міне, осылай S жыйыны V түрлі жыйын екен, ягни (12) интегралдық операторының меншікті мәндері жоқ. Біз, келесі, лемманы дәлелдедік.

Лемма 2. Мына,

$$u(x, y) = L_C^{-1} f(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 \theta(x - \xi) \theta(y - \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

интегралдық оператор $L^2(\Omega)$ –кеңістігінде волтерлі, яғни ол әсіре үзіксіз және оның нөлден өзгеше меншікті мәндері жоқ.

Жоғарыдағы (1) –(3) теңдіктерден $\alpha = 0, \beta \neq 0$ сәтінде Гурсаның басқа, мынадай

$$L_C^0 u = u_{xy}(x,y) = f(x,y), (x,y) \in \Omega$$
$$u(1,1-y) = 0$$
$$u(1-x,1) = 0$$

есебін аламыз. Бұл есеп алдыңғы (4) –(5) есепітң сыңарласы, сондықтан $(L^*)^{-1}$ операторы да волтерлі.

Осы, L_C мен L_C^* операторлары өзара ұқсас емес пе деген сұрақ тындайды, ондай операторлардың спектрлері бірдей болатыны белгілі.

Былай,

$$v(x,y) = Su(x,y) = u(1\text{-}x,\ 1\text{-}y)$$

болсын деп жорысақ, мынадай

$$v(x,y)\big|_{x=1} = u(0,1-y) = 0$$
$$v(x,y)\big|_{y=1} = u(1-x,0) = 0$$

теңдіктерді аламыз. Демек, егер $u(x,y) \in D(L_G)$ болса, онда $v(x,y) \in D(L_G^*)$ болады екен. Сонымен бірге,

$$L_G^* v(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} v_u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(1-x,1-y) = Su_{x,y}(x,y) = SL_G u,$$

$$\Rightarrow L_G^* Su(x,y) = SL_G u(x,y), \Rightarrow S^{-1} L_G^* S = L_G$$

Біз ойлағандай екен, мына, $L_G^* S = SL_G$ теңдік орынды болып шықты. Біз, келесі лемманы дәлелдедік.

Лемма 3. Егер L_G – дегеніміз (1) –(3) шарттары арқылы анықталған Гурсаның операторы болса, ал L_G^* оның сыңарласы болса, онда

$L_G^* S = SL_G$, мұндағы Su(x,y)=u(1-x,1-y).

Жоғарыдағы $L_G = S^{-1} L_G^* S$ теңдікке байланысты, мынадай сұрақ туындайды. L_G – операторына ұқсас L_G^* –дан басқа да операторлар бар ма? –деген.

I мен S операторлары екі элементті топ құрайтынын, ал олардың сызықтық комбинацниялары: $\alpha I + \beta S, \alpha, \beta = const$ алгебра құрайтынын ескерсек, онда ұқсастық операторын солардың арасынан іздеу түсінік болса керек. Сонымен ұқсастық операторы $T = \alpha I + \beta S, \alpha, \beta = const$ болсын делік, онда T^{-1} –кері операторы бар болар еді. Кері T^{-1} операторын тұрғызайық. Мына,

$$v(x,y) = Tu(x,y) = \alpha u(x,y) + \beta u(1-x,1-y)$$

теңдік орындалсын делік. Осы жерде, мынадай $x \to 1-x, y = 1-y$ алмастыру жасасақ, екінші

$$v(1-x,1-y) = \alpha u(1-x,1-y) + \beta u(x,y)$$

теңдік аламыз. Енді, мына,

$$\begin{cases} \alpha u(x,y) + \beta u(1-x,1-y) = v(x,y) \\ \beta u(x,y) + \alpha u(1-x,1-y) = v(1-x,1-y) \end{cases}$$

теңдеулер системасын Крамердің әдісімен шешейік.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - \beta^2, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} v & P \\ v(1-x,1-y) & X \end{vmatrix} = \alpha v(x,y) - \beta v(1-x,1-y)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha & v(x,y) \\ \beta & v(1-x,1-y) \end{vmatrix} = \alpha v(1-x,1-y) - \beta v(x,y)$$

$$u(x,y) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2} v(x,y) - \frac{\beta}{\alpha^2-\beta^2} v(1-x,1-y) = \left(\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2} - \frac{\beta}{\alpha^2-\beta^2} S \right) v(x,y)$$

$$u(1-x,1-y) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2} v(1-x,1-y) - \frac{\beta}{\alpha^2-\beta^2} v(x,y)$$

Демек, T^{-1} операторы $\alpha^2 - \beta^2 \neq 0$ сәтін бар болады екен. Дәл осы $\alpha^2 - \beta^2 \neq 0$ сәтті $T = \alpha I + \beta S$ операторлары топ құрайтынына назар аударайық. Шынында да, егер

$$T(\alpha,\beta) = \alpha I + \beta S, T(\alpha,\beta) = \gamma I + \delta S$$

болса, онда

$$T(\alpha,\beta) \cdot T(\gamma,\delta) = (\alpha I + \beta S) \cdot (\gamma I + \delta S) = \alpha\gamma I + \alpha\delta S + \beta\gamma S + \beta\delta S^2 =$$

$$= | S^2 = T | = (\alpha\gamma + \beta\delta) I + (\alpha\delta + \beta\gamma) S = T(\alpha\gamma + \beta\delta, \alpha\delta + \beta\gamma),$$

$$(\alpha\gamma + \beta\delta)^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)^2 = (\alpha^2 - \beta^2)(\gamma^2 - \delta^2) \neq 0$$

Енді $u(x,y) \in D(L)$ және v(x,y)=Tu(x,y) болсын дейік, мұндағы L –дегеніміз (1) –(3) есептің операторы. Онда

$$v(x,y) = \alpha u(x,y) + \beta u(1-x,1-y),$$

$$v(x,y)\big|_{x=0} = \alpha u(0,y) + \beta u(1,1-y) = 0$$

$$v(x,y)\big|_{y=0} = \alpha u(x,0) + \beta u(1-x,1) = 0$$

Демек, егер $u(x,y) \in D(L)$ болса, онда $v(x,y) \in D(L_C)$. Әрі қарай,

$$L_G v(x,y) = L_G T u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}[\alpha u(x,y) + \beta u(1-x,1-y)] =$$

$$= \alpha \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \beta \frac{\partial^2 u(1-x,1-y)}{\partial x \partial y} = (\alpha I + \beta S) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(x,y) =$$

$$= T \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(x,y) = TLu(x,y)$$

Демек, $T^{-1} L_G T = L$ күткеніміз де осы еді.

Назарла. Егер $\alpha = 0, \beta \neq 0$ болса, онда жоғарыдағы, (11) шекаралық шарттардан, мынадай

$$Ln = u_{xy} = f(x,y), (x,y) \in \Omega$$

$$u(y,0)=0, u(1,x)=0$$

нәрсе аламыз. Бұл Гурсаның есебі, ал $\alpha \neq 0, \beta = 0$ болған сәтте Гурсаның есебінің сыңарласын аламыз.

5.Қорытынды. Толқын теңдеуің шекаралық есептерін оның характеристикалық төртбұрышы ішінде қарастырған жөн,бұл сәттіе оның симметрия тобын ұқсастық операторларын құрастыруға жол ашылады.

ӘДЕБИЕТ

[1] Нахушев А.М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа //Дифференциальные уравнения, 1969, т. 5, №1. –с. 62-69.

[2]. Кумыкова С.К. Об одной краевой задаче со смещениями // Дифференциальные уравнения, 1976, т. 12, №1. –с. 40-44.

[3] Бияров Б.Н., Кальменов Т.Ш. О нелокальной вольтерровой задаче для гиперболического уравнения // Известия АН КазССР, сер. физ.-мат., 1988, №5. –с.13-16.

[4] Кальменов Т.Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. – Шымкент.: Гылым, 1993.- с.327.Толқын

[5] Нерсесян А.Б. К теории интегральных уравнений типа вольтерра // ДАН СССР, 1964, т.155, №5. – с.1006-1009.

[6] Р. Рихтмайер. Принципы современной математической физики. – М. Мир, 1982.

[7] Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 544с.

[8] Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы, спектральная теория. – М.: Мир, 1974.

[9] Friedrichs K.O.,On the perturbation of continuous spectra,Comm.Pure Appl.Math.,vol.III,Amer.Math.Soc.,Providence,R.I.,1965.

[10 Lax P.D.,Pillips R.S.,Scattering theory,Academic Press,New York,1967.

[11] Kato T.Perturbation theory for linear operators,Springer, New York,1966.

[12] Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1977.

[13] Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. О полноте собственных векторов задачи Коши. - Республиканский научный журнал «Наука и образования ЮК» № 27, 2002. с. 58-62.

[14] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. К спектральной теории уравнения с отклоняющимися аргументами. - Институт математики МО и Н РК «Математический журнал».- Алматы 2004, т. 4, №3 (13) с. 41-48.

[15]Шалданбаев А.Ш., Рустемова К. О периодической задаче для уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом. - Научный журнал Мин Образ/я и Науки «Поиск», № 4/2009, г. Алматы, с. 204-209.

[16] Шалданбаев А.Ш. Критерии вольтерровости дифференциального оператора первого порядка с отклоняющимся аргументом. - Вестник Карагандинского Университета, серия «Математика», № 3(47)/2007, с.39-43.

[17] Марченко В.А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1977. – 332с.

[18]Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма – Лиувилля на конечном отрезке времени.// Известия НАН РК, серия физ. – мат.– Алматы, 2000. – с.29-34.

[19] Шалданбаев А.Ш. Формулы следов для периодической и антипериодической задач Штурма–Лиувилля // Вестник МГУ. Серия 1. Математика-механика. 1982. - №3. - с. 6–11.

[20]Спектральные разложения корректных-некорректных начально краевых задач для некоторых классов дифференциальных уравнений.- 193с,Монография. LAP LAMBEPT Academic Pyblishing. http://dnb.d-nb.de. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011,Germanu.

REFERENCES

[1] Nakhushev A.M. About some regional tasks for the hyperbolic equations and the equations of the mixed type//the Differential equations, 1969, t. 5, No. 1. – page 62-69.

[2] Kumykova S. K. About one regional task with shifts//the Differential equations, 1976, t. 12, No. 1. – page 40-44.

[3] Biyarov B. N., Kalmenov T.Sh. About not local Voltaire task for the hyperbolic equation//News of AN KAZSSR, is gray. physical. - a mat., 1988, No. 5. – page 13-16.

[4] Kalmenov T.Sh. Regional tasks for the linear equations in private derivatives of hyperbolic type. – Shymkent.: Gylym, 1993. - page 327. Tol yn

[5] Nersesyan A.B. To the theory of the integrated equations like volterr//the USSR, 1964, t.155 is GIVEN, to No. 5. – page 1006-1009.

[6] R. Rikhtmayer. Principles of modern mathematical physics. – M. Mir, 1982.

[7] Akhiyezer N. I., Glazman I.M. The theory of linear operators in Hilbert space. – M.: Science, 1966. – 544 pages.

[8] Danford N., Schwartz Dzh. T. Linear operators, spectral theory. – M.: World, 1974.

[9] Friedrichs K.O., On the perturbation of continuous spectra, Comm.Pure Appl.Math., vol.III, Amer.Math.Soc., Providence, R.I., 1965.

[10 Lax P.D., Pillips R.S., Scattering theory, Academic Press, New York, 1967.

[11] Kato T.Perturbation theory for linear operators, Springer, New York, 1966.

[12] Mizokhata S. The theory of the equations with private derivatives. – M.: World, 1977.

[13] Shaldanbayev A.Sh., Akhmetova S. T. About completeness of own vectors of a task of Cauchy. - Republican scientific magazine "Science and Formations of YuK" No. 27, 2002. page 58-62.

[14] Kalmenov T.Sh., Shaldanbayev A.Sh., Akhmetova S. T. To the spectral theory of the equation with the deviating arguments. - Institute of mathematics of MO and N of RK "Mathematical Magazine".-Almaty 2004, t. 4, No. 3 (13) of page 41-48.

[15] Shaldanbayev A.Sh., Rustemova K. About a periodic task for the equation of the first order with the deviating argument. - Image Min scientific magazine / I and Sciences "Search", No. 4/2009, Almaty, page 204-209.

[16] Shaldanbayev A.Sh. Criteria of a volterrovost of the differential operator of the first order with the deviating argument. - Bulletin of the Karaganda University, Mathematics series, No. 3(47)/2007, page 39-43.

[17] Marchenko V.A. Operators of Storm – Liouville and their appendix. – Kiev: Naukova thought, 1977. – 332 pages.

[18] Kalmenov T.Sh., Shaldanbayev A.Sh. About structure of a range of a regional problem of Storm – Liouville on a final piece времени.//NAN RK'S News, a series physical. – mat. – Almaty, 2000. – page 29-34.

[19] Shaldanbayev A.Sh. Formulas of traces for periodic and anti-periodic problems of Storm Liouville//the Bulletin of MSU. Series 1. Mathematician-mechanic. 1982. - No. 3. - page 6-11.

[20] Spectral decomposition of regional tasks correct-incorrect nachalno for some classes of the differential equations. - 193c, Monograph. LAP LAMBEPT Academic Pyblishing. http://dnb.d-nb.de. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011, Germanu.

УДК 517.956

О ВОЛЬТЕРОВЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Оразов И.О., А.А.Копжасарова, А.Ш.Шалданбаев

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, РК

Ключевые слова: волновое уравнение,задача со смещением,вольтерровые операторы,операторы подобия,теорема Реллиха.

Аннотация.Простейшая краевая задача со смещением и с неоднородными условиями для волнового уравнения было исследовано А.М.Нахушевым [1]. Исследования Нахушева Л.М. было продолжены рядом авторов [2]-[4] и были установлены, что среди этих задач могут быть как вольтерровые так и полные задачи, обладающие полной системой собственных функций. Проведенный анализ, содержании этих работ показал, что спектральный свойства этих краевых задач зависят от геометрии области, в частности, от группы движении области. Не равносторонней треугольник не обладает группой симметрий, поэтому мы отказались от характеристического треугольника и стали рассматривать краевых задач внутри характеристического четырехугольника. При этом естественным образом появляются уравнения с отклоняющимся аргументами, которые заслуживают отдельного исследования.

В настоящей работе установлена вольтерровость ряда краевых задач для волнового уравнения, рассматриваемого внутри характеристического четырехугольника.

Поступила 15.04.2016 г.