N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 3, Number 307 (2016), 158 – 169

UDC 517. 929

ABOUT THE SINGULAR RANGE OF THE OPERATOR OF THE PERIODIC REGIONAL PROBLEM OF THE INDIGNANT EQUATION OF HEAT CONDUCTIVITY WITH THE DEVIATING ARGUMENT

M.T. Shomanbayeva, A.Sh. Shaldanbayev, S.T. Achmetova

South Kazakhstan state university named after M. Auyezov, Shymkent

Keywords: the deviating arguments, a continuous range, a singular range, absolutely continuous range, spectral decomposition, function of the Cantor.

Abstract. In this work the spectral theory of the operator corresponding to a periodic regional task for the indignant equation of heat conductivity with the deviating argument is constructed, own functions are found, their completeness and a basis property is shown, spectral decomposition is received, the structure of a range is in details investigated, in particular, absence absolutely continuous components and presence singular function components of the Cantor predicted earlier by N. Winer is proved.

УДК 517. 929

О СИНГУЛЯРНОМ СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

М.Т. Шоманбаева, А.Ш. Шалданбаев, С.Т. Ахметова

ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент

Ключевые слова: отклоняющиеся аргумент, непрерывноый спектр, сингулярный спектр, абсолютно непрерывноый спектр, спектральное разложение, функция Кантора.

Аннотация. В данной работе построена спектральная теория оператора соответствующего периодической краевой задаче для возмущенного уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом,найдены собственные функции,показана их полнота и базисность,получено спектральное разложение,детально исследован состав спектра,в частности, доказано отсутствие абсолютно непрерывной компоненты и присутствие сингулярной компоненты типа функции Кантора,предсказанного ранее Н.Винером.

1.Введение. В 1930 году Н.Винер [1],ссылаясь на работу К.Малера [2] показал о существовании сингулярного спектра реальной физической задачи.Однако среди физиков бытует мнение [3], что такой спектр не встречается в реальной физической системе, по-видимому, это связано с полуограниченностью операторов, соответствующих этим системам. Картина кардинально меняется, если оператор не является таковым.

Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2$ – прямоугольник, ограниченный отрезками: AB: $0 \le t \le T$, $x = 0$; BC: $0 \le x \le l$, $t = T$; CD: $0 \le t \le T$, $x = l$; DA: $0 \le x \le l$, $y = 0$; /см. Рис. 1/.

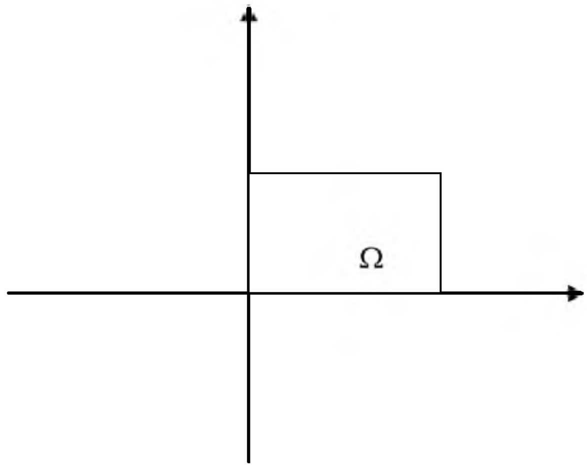

Рисунок 1

Через $C^{1,2}(\Omega)$ – обозначим множество функций $u(x,t)$, единожды непрерывно дифференцируемых по t и дважды непрерывно дифференцируемых по x в области Ω. Под границей области понимаем совокупность отрезков $\Gamma = AB \cup AD \cup CD$.

Периодическая задача. Найти решения уравнения

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t) + au_x = f(x,t) \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = u\big|_{x=0} - u\big|_{x=l} = u_x\big|_{x=0} - u_x\big|_{x=l} = 0\,; \tag{2}$$

где $f \in L^2(\Omega)$ и $a - const$.

Определение 1.1. Регулярным решением задачи (1)+(2) будем понимать функцию $u(x,t) \in C^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, обращающую в тождество уравнения (1) и краевые условия (2).

Определение 1.2. Функция $u(x,T) \in L^2(\Omega)$ называют сильным решением задачи (1)+(2), если существует последовательность функции $\{u_n\} \in C^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ и удовлетворяющая краевым условиям задачи такая, что $\{u_n\}$ и $\{Lu_n\}$ $n = 1,2,\ldots$ сходятся в $L^2(\Omega)$ соответственно к u и f.

Определение 1.3. Краевая задача (1)+(2) называется сильно разрешимой, если сильное решение задачи существует для любой правой части $f \in L^2(\Omega)$ и единственно.

Определение 1.4.Точечным спектром $P\sigma(A)$ называют множество собственных значений оператора А, т.е.

$P\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: Au = \lambda u$ **для некоторого ненулевого** $u \in \mathrm{H}$ **}.**

Непрерывным спектром $C\sigma(A)$ оператора А называется множество

$C\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: A - \lambda I$ имеет неограниченный обратный оператор с плотной в H областью определения}, а остаточным спектром $R\sigma(A)$ – множество

$R\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: A - \lambda I$ - имеет обратный (ограниченный или неограниченный) оператор, область определения которого не плотна в H }.

Для большинства представляющих интерес операторов (включая все самосопряженные, унитарные и вообще нормальные) остаточный спектр пуст, и поэтому непрерывный спектр можно представить себе состоящим из таких λ, для которых можно построить с наперед заданной точностью приближенный собственный вектор, не являющийся, однако, точным собственным вектором [1.с.174-175].Непрерывный спектр линейного оператор был объектом исследований многих авторов [3-10].

Целью данной работы является исследование структуры спектра оператора соотве тствующего, краевой задаче (1)+(2) и доказательство существования сингуляной компоненты типа функции Кантора .

2.Методы исследований.

Поскольку об уравнении (1) ничего неизвестно, то применим функциональные методы, рассматривая левую часть уравнения (1) как некий оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)$.Для решения задачи применим метод разделения переменных, который используется для решения соответствующей спектральной задачи для уравнения с отклоняющимся аргументом [11].Воспользовались теорией расширения симметрических операторов, превосходно изложенной в монографиях [12-14].При разложении решения краевой задачи в ряд Фурье использованы соответствующие теоремы из [15].Для изучения непрерывного спектра применили результаты одной работы Г.Вейля [16].Данной работе предшествовали работы [17-22].

3.Результаты исследовании.

Теорема 3.1.

(а) Если $\mathrm{Re}\,a \neq 0$, то существует обратный оператор $\overline{L}^{-1}$, который является нормальным и компактным. Имеет место оценка

$$\left\|\overline{L}^{-1}\right\| \leq K^{-1}, \;\; K = \max\left\{\frac{\pi}{2T}, \frac{2\pi}{l}|\mathrm{Re}\,a|\right\}.$$

Спектр оператора $\overline{L}$ дискретен, т.е. не имеет предельных точек на конечной части плоскости.

(б) Если $\mathrm{Re}\,a = 0$, $Jma \neq \dfrac{(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2m}\cdot\dfrac{l}{T} - \dfrac{2m\pi}{l}$, $n = 0,1,2\ldots$; $m = 0,\pm1,\pm2,\ldots$ и хотя бы одна из двух величин

$$\frac{2\pi T}{l^2}, \;\; \frac{T\cdot Jma}{l}$$

иррациональна, то обратный оператор $\overline{L}^{-1}$ существует, но неограничен. Оператор $\overline{L}$-самосопряжен и его спектр состоит из бесконечного множества собственных значении и непрерывного спектра заполняющего всю числовую ось $(-\infty,+\infty)$. Точки непрерывного спектра являются предельными точками собственных значении.

(в) Если $\mathrm{Re}\,a = 0$, $Jma \neq \dfrac{(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2m}\cdot\dfrac{l}{T} - \dfrac{2m\pi}{l}$, $n = 0,1,2\ldots$; $m = 0,\pm1,\pm2,\ldots$ и обе величины

$$\frac{2\pi T}{l^2}, \;\; \frac{T\cdot Jma}{l}$$

рациональны, то обратный оператор $\overline{L}^{-1}$ существует, ограничен, но не компактен. Оператор $\overline{L}$-самосопряжен, его спектр состоит из бесконечного множества собственных значении среди которых имеется бесконечное множества бесконечнократных собственных значении.

(г) Если $\mathrm{Re}\,a = 0$ и $Jma = \dfrac{(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2m}\cdot\dfrac{l}{T} - \dfrac{2m\pi}{l}$, для которых из значении: $n = 0,1,2\ldots$; $m = 0,\pm1,\pm2,\ldots$, то обратный оператор не существует. Оператор $\overline{L}$ является самосопряженным. Если обе величины

$$\frac{2\pi T}{l^2}, \;\; \frac{T\cdot Jma}{l}$$

рациональны, то спектр состоит из бесконечного множество собственных значении, среди которых имеется бесконечное множество бесконечнократных собственных значении. Если хотя бы одна из двух величин

$$\frac{2\pi T}{l^2},\quad \frac{T\cdot Jma}{l}$$

иррационально, то спектр оператора $\overline{L}$ заполняет всю числовую ось $(-\infty,+\infty)$.

Теорема 3.2. Для существования и единственности сильного решения краевой задачи

$$Lu = u_t(x,T-t)+u_{xx}(x,t)+au_x(x,t)=f(x,t)$$

$$u\big|_{t=0}=u\big|_{x=0}-u\big|_{x=l}=u_x\big|_{x=0}-u_x\big|_{x=l}=0$$

где $f(x,t)\in L^2(\Omega)$ и $a-const$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\left[(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T}-\left(\frac{2m\pi}{l}\right)^2-\frac{2m\pi}{l}\cdot Jma\right]^2+\left(\frac{2m\pi}{l}\operatorname{Re}a\right)^2\neq 0,\ \forall\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots;\ n=0,1,2\ldots$$

При выполнении этого условия сильное решение задачи существует и имеет вид

$$u(x,t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(f,u_{mn})}{\lambda_{mn}}\cdot u_{mn}(x,t)\quad ,$$

для всех $f(x,t)\in L^2(\Omega)$ удовлетворяющих условию

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(f,u_{mn})}{\lambda_{mn}}\right|^2\prec+\infty$$

где

$$\lambda_{mn}=(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T}-\left(\frac{2m\pi}{l}\right)^2+\frac{2m\pi i}{l}a,$$

$$u_{mn}(x,t)=\sqrt{\frac{2}{Tl}}\exp\left(\frac{2m\pi i}{l}x\right)\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{T},\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots;\ n=0,1,2\ldots$$

4. Обсуждение полученных результатов.

Лемма 4.1.

(a) Оператор L, соответствующий к краевой задаче (1)+(2) симметрический, тогда и только тогда, когда $a+\overline{a}=0$.

(b)Спектральная задача

$$-w''(x)-aw'(x)=\nu\cdot w(x),$$
$$w(0)-w(l)=w'(0)-w'(l)=0$$

имеет бесконечное множество собственных значений:

$$\nu_m=\left(\frac{2m\pi}{l}\right)^2-\frac{2m\pi i}{l}a,\quad m=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

и соответствующих им собственных функций

$$w_m(x)=\frac{1}{\sqrt{l}}\cdot l^{\frac{2m\pi i}{l}x},\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

которые образуют ортонормированный базис пространства $L^2(0,l)$.

(c) Спектральная задача

$$\dot{v}(T-t)=\mu\cdot v(t),$$
$$v(0)=0;$$

имеет бесконечное множество собственных значений:

$$\mu_n=(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{T},\quad n=0,1,2,...$$

и соответствующих им собственных функций

$$v_n(t)=\sqrt{\frac{2}{T}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{T},\quad n=0,1,2,...$$

(d) Если система функций $\{\varphi_m(x)\}$, $m=1,2,...$; образует ортонормированный базис пространства $L^2(0,l)$, а система функции $\{\psi_n(t)\}, n=1,2,...$ образует ортонормированный базис пространства $L^2(0,T)$, то система функций $u_{mn}(x,t)=\varphi_m(x)\cdot\psi_n(t)$, $m,n=1,2,...$ образует базис пространства $L^2(\Omega)$, где $\Omega=[0,l]\times[0,T]$.

Из полученных формул следует, что собственными функциями спектральной задачи (3)+(4) являются функции

$$u_{mn}(x,t)=\sqrt{\frac{2}{Tl}}\exp\left(\frac{2m\pi i}{l}x\right)\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{T},\ m=0,\pm1,\pm2,...;\ n=0,1,2...$$

которые в силу леммы 4.4, образуют ортонормированный базис в пространства $L^2(\Omega)$, где $\Omega=[0,l]\times[0,T]$.

Собственные значения найдем по формуле $\nu=\mu-\lambda$, $\lambda=\mu-\nu$,

$$\lambda_{mn}=\mu_n-\nu_m=(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T}-\left(\frac{2m\pi}{l}\right)^2+\frac{2m\pi i}{l}a,\ m=0,\pm1,\pm2,...;\ n=0,1,2...$$

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 4.1. Спектральная задача

$$Lu=u_t(x,T-t)+u_{xx}(x,t)+au_x(x,t)=\lambda u(x,t)$$
$$u|_{t=0}=u|_{x=0}-u|_{x=l}=u_x|_{x=0}-u_x|_{x=l}=0$$

имеет бесконечное множество собственных значений:

$$\lambda_{mn}=(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T}-\left(\frac{2m\pi}{l}\right)^2+\frac{2m\pi i}{l}a,$$

и соответствующих им собственных функций:

$$u_{mn}(x,t)=\sqrt{\frac{2}{Tl}}\exp\left(\frac{2m\pi i}{l}x\right)\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{T},\ m=0,\pm1,\pm2,...;\ n=0,1,2...$$

которые образуют ортонормированный базис пространства $L^2(\Omega)$, где $\Omega=[0,l]\times[0,T]$.

Лемма 4.2. Если симметрический оператор A имеет полную систему собственных векторов, то замыкание этого оператора $\overline{A}$ самосопряжен в H, иначе говоря, оператор A самосопряжен в существенном.

Теорема 4.2. (a) Если $a+\overline{a}=0$, то оператор

$$Lu=u_t(x,T-t)+u_{xx}(x,t)+au_x.$$
$$u|_{t=0}=u|_{x=0}-u|_{x=l}=u_x|_{x=0}-u_x|_{x=l}=0$$

самосопряжен в существенном в пространстве $H = L^2(\Omega)$, где $\Omega = [0,l]\times[0,T]$ прямоугольник, лежащий на верхней полуплоскости $(x,t)\subset R^2$.

(b) Если

1) $\mathrm{Re}\,a = 0$;

2) $(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T}-\left(\frac{2m\pi}{l}\right)^2-\frac{2m\pi}{l}\cdot Jma \neq 0$,

то существует обратный оператор $\overline{L}^{-1}$, который также самосопряжен.

Если $a+\overline{a}=0$, то оператор L не является симметрическим, поэтому нельзя ставить вопрос об его самосопряженности.

Лемма 4.3. [12]. Пусть A – плотно определенный оператор на гильбертовом пространстве H. Тогда

(а) A^* замкнут;

(б) A допускает замыкание тогда и только тогда, когда $D(A^*)$ плотна, причем в этом случае $\overline{A} = A^{**}$;

(с) если A допускает замыкание, то $(\overline{A})^* = A^*$.

Лемма 4.4. [13]. Пусть A – нормальный оператор в пространстве H. Тогда

(а) $D(A) = D(A^*)$;

(б) $\|Ax\| = \|A^*x\|$ для всякого $x \in D(A)$.

(с) A является нормальным максимальным оператором.

Эта лемма является необходимым признаком нормальности оператора A, поэтому, чтобы установить нормальности нашего оператора $\overline{L}$ мы должны проверить условий этой леммы.

Теорема 4.3. Если $a+\overline{a}\neq 0$, то замыкание оператора L является нормальным оператором, т.е. имеет место равенство

$$\overline{L}^*\overline{L} = \overline{L}\,\overline{L}^*.$$

Доказательство теоремы 3.1.

Пусть на вещественной оси отличено бесконечное число точек

$$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\ldots;$$

мы накручиваем прямую на некоторую окружность длины 1 и ставим вопрос о том, будет ли при этом находящиеся на отмеченных местах точки α_n покрывать окружность с равномерной плотностью. Так будет в том случае, когда число n_α тех из первых n отмеченных точек $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, которые при накручивании попадают на дугу, α асимптотически задается в виде $|\alpha|n$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n_\alpha}{n} = |\alpha|;$$

при этом $|\alpha|$ означает длину дуги α. О равномерной плотности распределения отмеченных точек на окружности мы будем говорить в том и только в том случае, когда это предельное равенство будет выполняться для каждой дуги α. Накручивание прямой на окружность означает, что вещественные числа рассматриваются по модулю 1 т.е., что два числа считаются равными в том случае, когда они отличаются на некоторое целое число. Среди чисел x, которые сравнимы по модулю 1, с некоторым заданным числом α имеется одно и только одно такое, для которого выполняется неравенство $0 \le x \le 1$; это число, сравнимое с α по модулю 1, будет обозначаться (α).

Первая теорема Вейля [16]. Если $\varphi(z)$ – некоторый многочлен со свободным членом α_0 и у $\varphi(z)-\alpha_0$ не все коэффициенты рациональны, то последовательность чисел

$$\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \ldots$$

распределена всюду равномерно плотно.

В частности:

Вторая теорема Вейля. Если ξ – некоторое иррациональное число, то последовательность точек

$$1\cdot\xi,\ 4\cdot\xi,\ 9\cdot\xi,\ 16\cdot\xi,\ 25\cdot\xi, \ldots$$

при накручивании числовой прямой на окружность длины 1 покрывает ее всюду равномерно плотно.

В связи с этими теоремами Вейля возникает вопрос:"А не уплотняются ли собственные значения полного оператора с ростом индексов m,n? "

Найденные нами собственные значения имеют вид:

$$\lambda_{mn} = (-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T} - \left(\frac{2m\pi}{l}\right)^2 + \frac{2m\pi i}{l}a,\ a \ne 0.$$

Нас особо интересует окрестность нулевой точки, если она окажется предельной точкой для множества собственных значений, то обратный оператор $\overline{L}^{-1}$ окажется неограниченным.

Если $\lambda_{mn} \to 0$ по некоторой подпоследовательности, то

$$|\lambda_{mn}|^2 = \left((-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T} - \left(\frac{2m\pi}{l}\right)^2 - \frac{2m\pi}{l}Jma\right)^2 + \left(\frac{2m\pi}{l}\mathrm{Re}a\right)^2 \to 0.$$

Это невозможно при $\mathrm{Re}a \ne 0$. Если $\mathrm{Re}a \ne 0$, то

$$|\lambda_{mn}|^2 \ge \left(\frac{2\pi}{l}\mathrm{Re}a\right)^2,\ \forall m = 1,2,\ldots \Rightarrow |\lambda_{mn}| \ge \frac{2\pi}{l}|\mathrm{Re}a|,\ \forall m = 1,2,\ldots$$

$$|\lambda_{0n}|^2 = \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T}\right]^2 \ge \left(\frac{\pi}{2T}\right)^2,\ |\lambda_{0n}| \ge \frac{\pi}{2T},\ \forall n = 0,1,2,\ldots.$$

Следовательно, $|\lambda_{mn}| \ge \max\left\{\frac{\pi}{2T}, \frac{2\pi}{l}|\mathrm{Re}a|\right\}$, $\forall m = 0,\pm1,\pm2,\ldots$, $\forall n = 0,1,2,\ldots$. Таким образом, при $\mathrm{Re}a \ne 0$ обратный оператор L^{-1} существует и ограничен.

Если некоторая подпоследовательность $\{\lambda_{kl}\}$, последовательности $\{\lambda_{mn}\}$ сходится к некоторой точке λ_0 комплексной плоскости, то последовательность $\{|\lambda_{kl}|\}$ ограничена, следовательно, второй индекс l принимает лишь конечное число значений. Тогда первый индекс тоже принимает конечное число значений. Мы получили противоречие, ибо по предположению $\{\lambda_{kl}\}$ бесконечная сходящаяся последовательность. Следовательно, последовательность $\{\lambda_{mn}\}$ не имеет предельных точек на конечной части комплексной λ плоскости, а это означает, что спектр оператора $\overline{L}$ дискретен. В связи с этим обстоятельством возникает вопрос, "А не является ли оператор $\overline{L}^{-1}$ компактным, ибо дискретность спектра является характерным свойством компактных операторов? "

Любая $\overline{L}^{-1}$ подпоследовательность последовательности $\{\lambda_{mn}\}$, $m = 0,\pm1,\pm2,\ldots$; $n = 0,1,2\ldots$ стремится к бесконечности. В самом деле, пусть $\{\lambda_{ij}\}$ произвольная бесконечная подпоследовательности последовательности $\{\lambda_{mn}\}$. Тогда возможно две ситуации, либо первый индекс принимает бесконечное количество значении, тогда

$$\left|\lambda_{ij}\right|^2 \geq \left(\frac{2i\pi}{l}\operatorname{Re}a\right)^2, \Rightarrow \left|\lambda_{ij}\right| \to +\infty$$

Либо первый индекс принимает конечное число значений, тогда второй индекс принимает бесконечное количество значении, поэтому

$$\left|\lambda_{ij}\right|^2 = \left[(-1)^j\left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T} - \left(\frac{2i\pi}{l}\right)^2 - \frac{2i\pi}{l}Jma\right]^2 + \left(\frac{2i\pi}{l}\operatorname{Re}a\right)^2 \geq$$

$$\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T} + (-1)^{j+1}\left(\frac{2i\pi}{l}\right)^2 + (-1)^{j+1}\frac{2i\pi}{l}Jma\right]^2 \to +\infty$$

в силу того, что $j \to +\infty$, а второе и третьи слагаемое ограниченные величины.

Лемма 4.5. Для полной непрерывности оператора нормального типа необходимо и достаточно выполнения условия

$$\lim_{n\to+\infty}\lambda_n = 0$$

В силу этой леммы наш оператор $\overline{L}^{-1}$ вполне непрерывен и дискретность его спектра оказалась не случайной.

Теперь рассмотрим случай $\operatorname{Re}a = 0$. В этом случае найденные нами собственные значения имеют вид

$$\lambda_{mn} = (-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T} - \left(\frac{2m\pi}{l}\right)^2 + \frac{2m\pi}{l}Jma, \quad Jma \neq 0.$$

Предположим, что $\lambda_{mn} \neq 0$, т.е. $Jma \neq \dfrac{(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2m}\cdot\dfrac{l}{T} - \dfrac{2m\pi}{l}$, $n = 0,1,2\ldots$; $m = 0,\pm1,\pm2,\ldots$. Если $n = 2k+1,\ k = 0,1,2,\ldots$, то

$$\lambda_{m,2k+1} = -\left(2k+\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{2m\pi}{l}\right)^2 - \frac{2m\pi}{l}Jma \to +\infty$$

при $m,k \to \infty$, поэтому это подпоследовательность не имеет предельных точек,

Если $n = 2k$, $k = 0,1,2,\ldots$, то

$$\lambda_{m,2k} = \left(2k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T} - \left(\frac{2m\pi}{l}\right)^2 - \frac{2m\pi}{l}Jma, \quad k = 0,1,2\ldots;\ m = 0,\pm1,\pm2,\ldots.$$

Преобразуем это выражение к удобному нам виду

$$\lambda_{m,2k} = \frac{2\pi}{T}\left[k+\frac{1}{4} - \frac{2m^2\pi T}{l^2} - \frac{mT}{l}\cdot Jma\right] = \frac{2\pi}{T}\left[k+\frac{1}{4} - \left(m^2\frac{2\pi T}{l^2} + m\frac{T\cdot Jma}{l}\right)\right].$$

Для удобства введем обозначений:

$$\varphi(m) = m^2\frac{2\pi T}{l^2} + m\cdot\frac{TJma}{l}$$

$[x]$ – целая часть x, (x) – дробная часть x. Предположим, что

$$k = [\varphi(m)],$$

тогда

$$\lambda_{m,2k} = \frac{2\pi}{T}\left[\frac{1}{4} + [\varphi(m)] - \varphi(m)\right] = \frac{2\pi}{T}\left[\frac{1}{4} - (\varphi(m) - [\varphi(m)])\right] = \frac{2\pi}{T}\left[\frac{1}{4} - (\varphi(m))\right].$$

Теперь воспользуемся теоремой Вейля, для этого предположим, что хотя бы одна из двух величин

$$\frac{2\pi T}{l^2}, \quad \frac{T \cdot Jma}{l}$$

иррациональна. Тогда в силу теоремы Вейля дробная часть $\varphi(m)$, т.е. $(\varphi(m))$ заполняет отрезок $[0,1]$ равномерно плотно, при изменений $m = 0,1,2,...$

Тогда последовательность $\{\lambda_{m,2k}\}$, $m = 0,1,2,...$ $k = [\varphi(m)]$ всюду плотно в отрезке

$$\left[-\frac{3\pi}{2T}, \frac{\pi}{2T}\right].$$

Полагая $k = [\varphi(m)]+1$, $k = [\varphi(m)]+2,...$, а $k = [\varphi(m)]-1$, $k = [\varphi(m)]-2$, и.т.д. получим, что последовательность $\{\lambda_{mn}\}$ всюду равномерно полна, т.е. непрерывный спектр оператора $\overline{L}$ заполняет всю числовую ось $-\infty$ до $+\infty$.

Пусть теперь обе величины

$$\frac{2\pi T}{l^2}, \quad \frac{T \cdot Jma}{l}$$

рациональны, тогда $\varphi(m)$ – всегда рациональна. Для определенности пусть

$$\frac{2\pi T}{l^2} = \frac{p}{q}, \quad \frac{T \cdot Jma}{l} = \frac{r}{k}$$

тогда

$$\varphi(m) = m^2 \cdot \frac{p}{q} + m \cdot \frac{r}{k} = \frac{m^2 p + mr}{q \cdot k} = [\varphi(m)] + (\varphi(m)).$$

Дробная часть $\varphi(m)$ принимает лишь конечное число значении, это есть остатки от деления $m^2 p + mr$ на $q \cdot k$, т.е.

$$0, \frac{1}{q \cdot k}, ..., \frac{q \cdot k - 1}{q \cdot k}.$$

При изменении m от $-\infty$ до $+\infty$ эти значения повторяются бесконечное число раз, хотя бы один или все из них. Для нас важно, чтобы они не совпали с $\frac{1}{4}$.

Полагая $k = [\varphi(m)]$, $m = 0,1,2,...$ видим, что

$$\lambda_{m,2k} = \frac{2\pi}{T}\left[\frac{1}{4} - (\varphi(m))\right], \quad m = 0,1,2,...$$

Эта бесконечная последовательность содержится в сегменте

$$\left[-\frac{3\pi}{2T}, \frac{\pi}{2T}\right].$$

И состоит из конечного числа дробей видя,

$$\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{1}{4}, \quad \frac{2\pi}{T}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{qk}\right), \quad \frac{2\pi}{T}\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{qk}\right), ..., \quad \frac{2\pi}{T}\left(\frac{1}{4} - \frac{2k-1}{qk}\right),$$

поэтому хотя бы один из них, или все, или некоторые из них повторяются бесконечное число раз. Это говорит о том, что некоторые числа из интервала $\left[-\frac{3\pi}{2T}, \frac{\pi}{2T}\right]$ являются бесконечными собственными значениями. Продолжая, это рассуждение как в иррациональном случае видим, что спектр оператора $\overline{L}$ состоит бесконечного множества собственных значении и среди этих собственных значений имеется бесконечное множество бесконечнократных собственных значении. По нашему предположению

$$Jma \neq \frac{(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2m}\cdot\frac{l}{T}-\frac{2m\pi}{l},\ n=0,1,2\ldots;\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

поэтому, обратный оператор существует и ограничен, но не компактен из за наличия бесконечнократных собственных значении, ибо спектр компактного оператора конечнократен.

Если $\mathrm{Re}\,a=0$ и $Jma=\frac{(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2m}\cdot\frac{l}{T}-\frac{2m\pi}{l}$, для некоторых значений $n=0,1,2\ldots;$ $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$, то обратный оператор $\overline{L}^{-1}$ не существует, ноль является собственным значением возможно бесконечнократным. При этом если хотя бы одно из двух величин

$$\frac{2\pi T}{l^2},\ \frac{T\cdot Jma}{l}$$

иррациональна, то спектр оператора $\overline{L}$ заполняет всю числовую ось. Если обе эти величины рациональны, то спектр оператора $\overline{L}$ состоит из бесконечного множества собственных значении среди которые имеется бесконечное множество бесконечнократных собственных значении.

Отметим, что в последнее время все активнее изучается непрерывный спектр линейных операторов,соответствующих краевым задачам уравнений с частными производными [11-16].

5.Выводы.

Для одноэлектронной задачи по физическим соображениям можно ожидать, что если $V(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$, то непрерывный спектр H также заполнит $[0,\infty)$, поскольку частица на очень больших расстояниях практически свободна, а свободная частица может иметь любую положительную энергию. Эта гипотеза подтверждена большим вычислительным опытом, но более точные утверждения нуждаются в некотором спектральном понятии. Именно, существенный спектр оператора состоит из всех точек спектра, за исключением изолированных собственных значений конечной кратности. Таким образом, мы добавляем к непрерывному спектру: (1) любые собственные значения, лежащие в нем или на его краях, (2) любые предельные точки спектра, (3) собственные значения бесконечной кратности, если они существуют.

Путем проверки различных случаев устанавливается, что точки существенного спектра можно характеризовать приближенными собственными векторами (возможно, включая истинные собственные векторы) следующим образом: λ принадлежит существенному спектру оператора H тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{v_j\}_1^\infty$ линейно независимых (или, если угодно, взаимно ортогональных) единичных векторов, таких, что $\|Hv_j-\lambda v_j\|\to 0$ при $j\to\infty$.

Теоремы, полученные до сего времени, не в состоянии дать вполне удовлетворительную характеристику спектра по следующей причине: можно определить некий самосопряженный оператор, собственные значения которого составят счетное всюду плотное множество в интервале I (конечном или бесконечном), а собственные векторы образуют полную систему. Ясно, это не то, что обычно называют «непрерывный спектр», так как, например, в разложении по собственным функциям не появится никаких «собственных функций непрерывного спектра», а спектральный проектор Et не будет непрерывным по t в любой точке I. Тем не менее, весь интервал I представляет собой существенный спектр (некоторые его участки принадлежат непрерывному спектру).

Известные до сего времени теоремы не исключают возможность того, что существенный спектр оператора Шредингера является спектром такого рода. Более того, теорема Вейля и фон Неймана утверждает, что чисто непрерывный спектр (т.е. такой, на котором Et непрерывен) может быть преобразован в спектр описанного вида при помощи произвольно малого относительно компактного возмущения (на самом деле с помощью возмущения V типа Гамильтона-Шмидта с произвольно малой нормой Гильберта-Шмидта).

Даже если Et непрерывен, спектр может все еще быть кусочным в некотором смысле. Напомним, что любая неубывающая функция (или любая функция $f(t)$ локально ограниченной вариации) может быть представлена в виде

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) \qquad (*)$$

где f_1 - скачкообразная функция, f_2 абсолютно непрерывна, а f_3 сингулярно непрерывна. Функция f_2 равна интегралу Лебега от своей производной, а производная f_3 равна нулю почти для всех t (функция Кантора является функцией типа f_3). В интервалах, где f_1 и f_3 - константы, f является абсолютно непрерывной. Пусть теперь $\{E_t\}$ - разложение единицы для самосопряженного оператора H. Для любого v в гильбертовом пространстве $(v, E_t v)$ является неубывающей функцией t, а значит, для нее возможна декомпозиция (*). Скачки f_1 происходят в собственных значениях оператора H. Спектр H называется абсолютно непрерывным в интервале I, если $(v, E_t v)$ - абсолютно непрерывная функция в I для каждого v в гильбертовом пространстве; в противном случае спектр будет кусочным.

Кажется разумным предположение о том, что спектры гамильтониана атомов и молекул, исключая собственные значения, всегда абсолютно непрерывны, иначе говоря, декомпозиция произведения $(v, E_t v)$ всегда состоит из первых двух членов (*). Однако это не доказано, кроме некоторых случаев, подобных атому водорода, для которых известно явное выражение для E_t.

Хотелось бы иметь возможность сказать, что для атома нет никаких собственных значений в непрерывном спектре, т.е. выше уровня ионизации. Для некоторых атомов не существует истинных собственных значений полного гамильтониана для энергии λ выше уровня ионизации. Всегда ли это верно – вопрос открытый [1.с. 268].

Мы утверждаем,что в разложении $dE(\lambda) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$ отсутствует абсолютно непрерывная компонента и доминирует сингулярная составляющая, где $dE(\lambda)$ спектральная мера оператора, это резко контрастирует с известными на сегоднящнии день фактами.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Wiener N.,Generalized harmonic analysis.-Acta Math.,v.55,p.117-258.

[2] K.Mahler.On the Translation Properties of a simple Class of Arithmetical Functions., Journ.Math. Phys. M.I.T.6(1927). 158-164.

[3] Р. Рихтмайер. Принципы современной математической физики. – М. Мир, 1982.

[4] Friedrichs K.O.,On the perturbation of continuous spectra,Comm.Pure Appl. Math., vol. III, Amer. Math.Soc., Providence, R.I.,1965.

[5]Фаддеев Л.Д.,Строение резольвенты оператора Шредингера системы трех частиц с парным взаимодействием,ДАН СССР,138:3(1961),565-567.

[6] Фаддеев Л.Д., Строение резольвенты оператора Шредингера системы трех частиц,и залача рассеяния,ДАН СССР,145:2(1962),301-304.

[7] Фаддеев Л.Д.,Математические вопросы кванровой теории рассеяния для системы трех частиц,Тр.МИАН СССР им.Стеклова,69(1963),1-122.

[8] Lax P.D.,Pillips R.S.,Scattering theory,Academic Press,New York,1967.

[9] Kato T.Perturbation theory for linear operators,Springer, New York,1966.

[10] Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы, спектральная теория. – М.: Мир, 1974.

[11] Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. О полноте собственных векторов задачи Коши. - Республиканский научный журнал «Наука и образования ЮК» № 27, 2002. с. 58-62.

[12] М.Рид.,Б.Саймон.,Методы современной математической физики,т.1,2, М.: Мир, 1977.

.[13] Рудин У.,Функциональный анализ, М.: Мир, 1977.

[14] Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 544с.

[15] Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1977.

[16] Вейль Г. Избранные труды. - М.: Наука, 1984. – 510с

[17]Кальменов Т.Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. – Шымкент: Гылым, 1993. – 328с.

[18] Шалданбаев А.Ш., Рустемова К. О периодической задаче для уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом. - Научный журнал Мин Образ/я и Науки «Поиск», № 4/2009, г. Алматы, с. 204-209.

[19] Шалданбаев А.Ш. Критерии вольтерровости дифференциального оператора первого порядка с отклоняющимся аргументом. - Вестник Карагандинского Университета, серия «Математика», № 3(47)/2007, с.39-43.

[20] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма – Лиувилля на конечном отрезке времени.// Известия НАН РК, серия физ. – мат.– Алматы, 2000. – с.29-34.

[21] Шалданбаев А.Ш. Формулы следов для периодической и антипериодической задач Штурма–Лиувилля // Вестник МГУ. Серия 1. Математика-механика. 1982. - №3. - с. 6–11.

[22] Спектральные разложения корректных-некорректных начально краевых задач для некоторых классов дифференциальных уравнений.- 193с,Монография. LAP LAMBEPT Academic Pyblishing. http://dnb.d-nb.de. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011,Germanu.

REFERENCES

[1] Wiener N., Generalized harmonic analysis. - Acta Math., v.55, p.117-258.

[2] K.Mahler.On Translation Properties of a simple Class of Arithmetical Functions., Journ.Math.Phys.M.I.T.6(1927).158-164.

[3] R. Rikhtmayer. Principles of modern mathematical physics. – M. Mir, 1982.

[4] Friedrichs K.O., On the perturbation of continuous spectra, Comm.Pure Appl.Math., vol.III, Amer.Math.Soc., Providence, R.I., 1965.

[5] Faddeev L.D., the Structure of a rezolventa of the operator Schrцdinger of system of three particles with pair interaction, SSSR,138:3(1961),565-567 is GIVEN.

[6] Faddeev L.D., the Structure of a rezolventa of the operator Schrцdinger of system of three particles, and a zalacha of dispersion, SSSR,145:2(1962),301-304 is GIVEN.

[7] Faddeev L.D., Mathematical questions of the kvanrovy theory of dispersion for system of three particles, Tr. MIAN USSR of Steklov, 69(1963),1-122.

[8] Lax P.D., Pillips R.S., Scattering theory, Academic Press, New York, 1967.

[9] Kato T.Perturbation theory for linear operators, Springer, New York, 1966.

[10] Danford N., Schwartz Dzh. T. Linear operators, spectral theory. – M.: World, 1974.

[11] Shaldanbayev A.Sh., Akhmetova S. T. About completeness of own vectors of a task of Cauchy. - Republican scientific magazine "Science and Formations of YuK" No. 27, 2002. page 58-62.

[12] M. Read., B. Simon., Methods of modern mathematical physics, t.1,2, M.: World, 1977.

. [13] Rudin U., Functional analysis, M.: World, 1977.

[14] Akhiyezer N. I., Glazman I.M. The theory of linear operators in Hilbert space. – M.: Science, 1966. – 544 pages.

[15] Mizokhata S. The theory of the equations with private derivatives. – M.: World, 1977.

[16] Veyl G. Chosen works. - M.: Science, 1984. – 510s

[17] Kalmenov T.Sh. Regional tasks for the linear equations in private derivatives of hyperbolic type. – Shymkent: yly, 1993. – 328 pages.

[18] Shaldanbayev A.Sh., Rustemova K. About a periodic task for the equation of the first order with the deviating argument. - Image Min scientific magazine / I and Sciences "Search", No. 4/2009, Almaty, page 204-209.

[19] Shaldanbayev A.Sh. Criteria of a volterrovost of the differential operator of the first order with the deviating argument. - Bulletin of the Karaganda University, Mathematics series, No. 3(47)/2007, page 39-43.

[20] Kalmenov T.Sh., Shaldanbayev A.Sh. About structure of a range of a regional problem of Storm – Liouville on a final piece времени.//NAN RK'S News, a series physical. – mat. – Almaty, 2000. – page 29-34.

[21] Shaldanbayev A.Sh. Formulas of traces for periodic and anti-periodic problems of Storm Liouville//the Bulletin of MSU. Series 1. Mathematician-mechanic. 1982. - No. 3. - page 6-11.

[22] Spectral decomposition of regional tasks correct-incorrect nachalno for some classes of the differential equations. - 193c, Monograph. LAP LAMBEPT Academic Pyblishing. http://dnb.d-nb.de. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011, Germanu.

АРГУМЕНТІ АУЫТҚЫҒАН ӘСЕРЛЕНГЕН ЖЫЛУ ТЕҢДЕУІНІҢ ПЕРИОДТЫ ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕБІНЕ СӘЙКЕС ОПЕРАТОРДЫҢ СИНГУЛЯР СПЕКТРІ ТУРАЛЫ

А.Ш. Шалданбаев, М.Т. Шоманбаева, С.Т. Ахметова

М.О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент қ., Қазақстан

Түйін сөздер: ауытқыған аргумент, үздіксіз спектр,сингулярлы спектр, абсолютті үздіксіз спектр,спектрлік таралым, Кантордың функциясы.

Аннотация. Бұл еңбекте аргументі ауытқыған әрі әсерленген жылу теңдеуінің периодты шекаралық есебіне сәйкес операторының спектрлік теориясы тұрғызылды, меншікті мәндері табылды, оларға сәйкес меншікті функциялар табылып, олардың толымдылығы мен базистігі дәлелденді, спектрлік таралымы алынды, сонымен бірге, спектрінің құрамы егжей-тегжей зерттелді, нәтижесінде, абсолютті мүшенің жоқ екені, оның есесіне сингуляр мүшенің басымдылығы айқындалды. Мұндай спектрдің болуы мүмкін екеніне алғаш рет Н.Винер назар аударған, ол Кантордың функциясына ұқсайды.

Поступила 04.04.2016 г