Ә. М. Кәрімов

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: көрсеткіш, индикатриса, атмосфера, шашырау.

Аннотация. Мақала екі нұсқасы Жер атмосферасындағы арқылы күн сәулесінің өту шашырау индексін есептеу талқылайды. Белгілі бір параметрлер болуына байланысты, ол опцияларының бірін есептеу кезінде пайдаланылуы мүмкін. есептеу маңызды компоненттері ендік мәндері болып табылады және Жер атмосферасындағы сыну көрсеткіші. Атмосфералық тығыздығы, сыну индексі, толқын ұзындығы, бірлік көлемі, бір су буының тамшылардың саны, бірлік көлемі шаң бөлшектердің саны және бөлшектердің радиусы. Басқа жағдайда, параметрлер көп талап етеді. Бұл теңдеулер Жер атмосферасындағы жатқан физикалық процесстерді зерттеу кезінде пайдаланылуы мүмкін.

Поступила 07.07.2015 г.

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 4, Number 302 (2015), 120 – 124

THE CRITERION OF ONE-VALUED SOLVABILITY OF DIRICHLET AND POINCARE SPECTRAL PROBLEMS FOR GELLERSTEDT MULTIDIMENSIONAL EQUATION

S. A. Aldashev[1], B. Uaisov[2]

[1]Kazakh National Pedagogical University named after Abai, Almaty, Kazakhstan,
[2]Kazakh Academy of Transport and Communications named after M.Tynyshbayev, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: Aldash51@mail.ru

Key words: criterion, spectral problems, multidimensional, Bessel function.

Abstract. It has been shown in a plane that one of fundamental problems of Math Physics, i.e. studying the behavior of a hesitating string, is not correct when boundary conditions are given on the whole boundary of the domain. As it is shown below, Dirichlet problem is incorrect not just for a wave equation but for general hyperbolic equations.

The criterion of one-valued solvability of Dirichlet and Poincare spectral problems for Gellerstedt multidimensional equation is obtained in the article.

УДК 517.956

КРИТЕРИЙ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И ПУАНКАРЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА

С. А. Алдашев[1], Б. Уаисов[2]

[1]Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Казахстан,
[2]Казахская академия транспорта и коммуникаций им. М. Тынышпаева, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: критерий, спектральные задачи, многомерное, функция Бесселя.

Аннотация. На плоскости было показано, что одна из фундаментальных задач математической физики – изучение поведения колеблющейся струны некорректна, когда краевые условия заданы на всей границе

области. Как показано далее, задача Дирихле некорректна не только для волнового уравнения, но и для общих гиперболических уравнений.

В работе получен критерий однозначной разрешимости спектральных задач Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Геллерстедта.

1. Постановка задачи и результат. Пусть Ω_β – цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$, ограниченная цилиндром $r = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \beta > 0$ и $t = 0$, где $|\overline{x}|$ - длина вектора $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Части этих поверхностей, образующих границу $\partial\Omega_\beta$ области Ω_β, обозначим через $\Gamma_\beta, S_\beta, S_0$ соответственно.

В области Ω_β рассмотрим многомерное уравнение Геллерстедта со спектральным действительным параметром

$$t^p \Delta_x u - u_{tt} = \gamma u, \tag{1}$$

где $p = const > 0$, Δ_x - оператор Лапласа по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $m \geq 2$

В качестве многомерных спектральных задач Дирихле и Пуанкаре рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. Найти решение (1) в области Ω_β из класса $C(\overline{\Omega}_\beta) \bigcap C^2(\Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u/_{S_0} = 0,\ u/_{\Gamma_\beta} = 0,\ u/_{S_\beta} = 0, \tag{2}$$

или

$$u_t/_{S_0} = 0,\ u/_{\Gamma_\beta} = 0,\ u/_{S_\beta} = 0, \tag{3}$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, x_2, \ldots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m-1}, t,\ r \geq 0,\ 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi, 0 \leq \theta_i \leq \pi,\ \ i = 2,3,\ldots,m-1$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$- система линейно независимых сферических функций порядка $n, 1 \leq k \leq k_n,\ (m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(n+m-2),\ \theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m-1})$.

Тогда справедлива

Теорема. 1) Если $\gamma \leq -\mu_{s,n}^2$, то задача 1 имеет только нулевое решение; 2) при $\gamma > -\mu_{s,n}^2$ задача 1 имеет только тривиальное решение, тогда и только тогда, когда

$$\cos\beta' \sqrt{\gamma + \mu_{s,n}^2} \neq 0,\ s = 1,2,\ldots \tag{4}$$

где $\beta' = \dfrac{2}{2+p}\beta^{\frac{(2+p)}{2}}$, $\mu_{s,n}$ - нули функций Бесселя первого рода $J_{tt+\frac{(m-2)}{2}}(z)$.

2. Доказательство теоремы. В сферических координатах уравнения (1) имеет вид

$$t^p\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{\delta u}{r^2}\right) - u_{tt} = \gamma u, \tag{5}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),\ g_1 = 1,\ g_j = (\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{j-1})^2,\ j > 1.$$

Известно ([1]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0,1,\ldots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Так как искомое решение задачи 1 принадлежит классу $C(\overline{\Omega}_\beta)\bigcap C^2(\Omega_\beta)$, то его можно искать в виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\overline{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\overline{u}_n^k(r,t)$ - функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ ([1]), будем иметь

$$t^p\left(\overline{u}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\overline{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\overline{u}_n^k\right)-\overline{u}_{ntt}^k=\gamma\overline{u}_n^k,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots \tag{7}$$

при этом краевые условия (2) и (3), с учетом леммы 1, соответственно запишутся в виде

$$\overline{u}_n^k(r,0)=0,\overline{u}_n^k(1,t)=0,\ \overline{u}_n^k(r,\beta)=0,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots, \tag{8}$$

$$\overline{u}_{nt}^k(r,0)=0,\overline{u}_n^k(1,t)=0,\ \overline{u}_n^k(r,\beta)=0,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots, \tag{9}$$

Произведя замену $\overline{u}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}u_n^k(r,t)$, и положив, затем $r=r,\ x_0=\dfrac{2}{2+p}t^{\frac{2}{2+p}}$, задачи (7), (8) и (7), (9) приведем к следующим задачам Дирихле и Пуанкаре

$$L_\alpha v_{\alpha,n}^k\equiv v_{\alpha,nrr}^k-v_{\alpha,nx_0x_0}^k-\frac{\alpha}{x_0}v_{\alpha,nx_0}^k+\frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}v_{\alpha,n}^k-\gamma v_{\alpha,n}^k=0,\quad \mathrm{k}=\overline{1,\mathrm{k_n}},\ \mathrm{n}=0,1,\ldots \tag{10_α}$$

$$v_{\alpha,n}^k(r,0)=0,\ v_{\alpha,n}^k(1,x_0)=0,\ v_{\alpha,n}^k(r,\beta')=0,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots, \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0}v_{\alpha,n}^k(r,0)=0,\ v_{\alpha,n}^k(1,x_0)=0,\ v_{\alpha,n}^k(r,\beta')=0,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots, \tag{12}$$

где

$$0<\alpha=\frac{p}{2+p}<1,\ \overline{\lambda}_n=\frac{\left[(m-1)(3-m)-4\lambda_n\right]}{4},\ v_{\alpha,n}^k(r,x_0)=u_n^k\left[r,\left(\frac{2+p}{2}x_0\right)^{\frac{2}{2+p}}\right]$$

Наряду с уравнением (10_α) рассмотрим уравнение

$$L_0v_{0,n}^k\equiv v_{0,nrr}^k-v_{0,nx_0x_0}^k+\frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}v_{0,n}^k-\gamma v_{0,n}^k=0, \tag{10_0}$$

Как доказано в [2, 3] (см. также [4]), существует следующая функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнений (10_α) и (10_0).

Утверждения 1. Если $v_{0,n}^{k,1}(r,x_0)$-решение задачи Коши для уравнения (10_0), удовлетворяющее условиям

$$v_{0,n}^{k,1}(r,0)=\tau_n^k(r),\ \frac{\partial}{\partial x_0}v_{0,n}^{k,1}(r,0)=0, \tag{13}$$

то функция

$$v_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)=\gamma_\alpha\int_0^1 v_{0,n}^{k,1}(r,\xi x_0)\left(1-\xi^2\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}d\xi\equiv 2^{-1}\gamma_\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)x_0^{1-\alpha}D_{0x_0^2}^{-\frac{\alpha}{2}}\left[\frac{v_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0^2}\right] \tag{14}$$

при $\alpha>0$ является решением уравнения (10_α) с данными (13).

Утверждения 2. Если $v_{0,n}^{k,1}(r,x_0)$-решение задачи Коши для уравнения (10_0), удовлетворяющее условиям

$$v_{0.n}^{k,1}(r,0)=\frac{v_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)\dots(2q+1-\alpha)},\ \frac{\partial}{\partial x_0}v_{0.n}^{k,1}(r,0)=0,$$

то при $0<\alpha<1$ функция

$$v_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)=\gamma_{2-k+2q}\left(\frac{1}{x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^q\left[x_0^{1-\alpha+2q}\int_0^1 v_{0,n}^{k,1}(r,\xi x_0)\left(1-\xi^2\right)^{q-\frac{\alpha}{2}}d\xi\right]\equiv$$

$$\equiv 2^{q-1}\gamma_{2-k+2q}\Gamma\left(q-\frac{\alpha}{2}+1\right)D_{0x_0^2}^{\frac{\alpha}{2}-1}\left[\frac{v_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0}\right] \tag{15}$$

является решением уравнения (10_α) с начальными данными

$$v_{\alpha.n}^{k,2}(r,0)=0.\ \lim_{x_0\to 0}x_0^\alpha\frac{\partial}{\partial x_0}v_{\alpha.n}^{k.2}(r,x_0)=v_n^k(r),$$

где $\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\gamma_\alpha=2\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$, $\Gamma(z)$- гамма-функция D_{0t}^α - оператор Римана-Лиувилля ([2]), а $q\ge 0$- наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $2-\alpha+2q\ge m-1$.

Учитывая формулу (15), а также обратимость оператора D_{0t}^α ([2]), задачу Дирихле (10_α), (11) сводим к задаче Пуанкаре для уравнения (10_0), с условием

$$\frac{\partial}{\partial x_0}v_{0,n}^{k,1}(r,0)=0,\ v_{0,n}^{k,1}(1,x_0)=0,\ v_{0,n}^{k,1}(r,\beta')=0,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\dots, \tag{16}$$

Используя формулу (14), задачу Пуанкаре (10_α), (12) также приводим к задаче (10_0), (16).

В [5] показано, что 1) если $\gamma\le-\mu_{s,n}^2$, то задача (10_0) (16) имеет только нулевое решение; 2) при $\gamma>-\mu_{s,n}^2$ задача (10_0) (16) имеет только тривиальное решение, тогда и только тогда, когда имеет место условие (4).

Далее, используя утверждения 1 и 2, устанавливаются аналогичные результаты для задач (10_α), (11) и (10_α), (12).

Следовательно, из (6) следует справедливость теоремы 1 для задачи 1.

Заметим, что при $\gamma=0$ теорема 1 согласуется с результатами работы [6].

Отметим, также, что теорема 1 анонсировано в [7].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М.: Физматгиз, 1962-254с.

[2] Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Ғылым, 1994-170с.

[3] Алдашев С.А. Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения, Орал: ЗКАТУ, 2007-139с.

[4] Терсенов С.А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе, Новосибирск: НГУ, 1973-94с.

[5] Алдашев С.А. Критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного волнового уравнения// Материалы I международной конференции молодых ученых «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики», Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2011-с. 35-39.

[6] Алдашев С.А. Корректность задач Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Геллерстедта// Украинский математический журнал, 2012, т.64, №3-с.3-9.

[7] Алдашев С.А. Критерий однозначной разрешимости спектральной задач Дирихле и Пуанкаре для многомерного уравнения Геллерстедта// Материалы международной конференции «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики», Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2013-с. 31-33.

REFERENCES

[1] Mikhlin S.G. Multidimensional singular integrals and integral equations, M.: Physmathgiz, **1962**, 254 p. (in Russ.).

[2] Aldashev S.A. Boundary value problems for multidimensional hyperbolic and mixed equations, Almaty: Gylym, **1994**, 170 p. (in Russ.).

[3] Aldashev S.A. Confluent multidimensional hyperbolic equations, Oral: ZKATU, **2007**, 139 p. (in Russ.).

[4] Tersenov S.A. Introduction to the theory of equations confluent on the boundary, Novosibirsk: NGU, **1973**, 94 p. (in Russ.).

[5] Aldashev S.A. Criterion of one-valued solvability of Poincare spectral problem in a cylindrical domain for a multi-dimensional wave equation, Materials of the IInternational conference of young scientists "Math modeling of fractal processes, related problems of analysis and informatics", Nalchik: SRI PMA KBSC RAS, **2011**. P. 35-39. (in Russ.).

[6] Aldashev S.A. Correctness of Dirichlet and Poincare problems in a cylindrical domain for Gellerstedt multidimensional equation , Ukrainian math journal, **2012**, v.64, №3, p.3-9. (in Russ.).

[7] Aldashev S.A. Criterion nfone-valueds olvability of Dirichlet and Poincare spectral problem for Gellerstedt multi-dimensional equation, Materials of the International conference of young scientists "Math modeling of fractal processes, related problems of analysis and informatics", Nalchik: SRI PMA KBSC RAS, **2013**, p. 31-33. (in Russ.).

КӨП ӨЛШЕМДІ ГЕЛЛЕРСТЕДТ ТЕҢДЕУІНЕ СПЕКТАРЛІК ДИРИХЛЕ ЖӘНЕ ПУАНКАРЕ ЕСЕПТЕРІНІҢ БІР МӘНДІ ШЕШІМДІЛІК КРИТЕРИЯСЫ

С. А. Алдашев[1], Б. Уаисов[2]

[1]Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университет, Алматы, Қазакстан,
[2]М. Тынышбаев атындағы Қазақ көлік және коммуникация академиясы, Алматы, Қазакстан

Тірек сөздер: критерия, спектрлік есептер, көп өлшемді, Бессель функциясы.

Аннотация. Жазықтықта көрсетілгендей, ішектің толқуының қозғалысы математикалық физиканың негізгі есептері болып келеді. Дирихле есебі, тек ғана толқын теңдеуіне емес және де жалпы гиперболалық теңдеулерге де корректна емес екендігі дәлелденген.

Жұмыста көп өлшемді Геллерстедт теңдеуіне спектрлік Дирихле және Пуанкаре есептерінің бір мәнді шешімділік критериясы алынған.

Поступила 07.07.2015 г.

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 4, Number 302 (2015), 124 – 129

ABOUT ONE METHOD OF THE SOLUTION OF THE RETURN TASK OF CAUCHY FOR THE STORM LIOUVILLE EQUATION

S. T. Ahmetova, A. B. Imanbaeva, A. Sh. Shaldanbaev

M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan.
E-mail: shaldanbaev51@mail.ru

Keywords: self-conjugacy, quite continuity, Cauchy's task, operator Shturma-Liuvillya.

Abstract. We will consider the operator equation in Hilbert space

$$Au = f, \tag{1.1}$$

where - quite continuous operator, and and space elements. If the operator one-to-one displays spaces on the area of value, there is a return operator displaying sets in spaces who is the unlimited operator. In this case the equation (1.1) has the only decision for any right part from which has an appearance