N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 4, Number 302 (2015), 104 – 117

ABOUT THE PERIODIC PROBLEM ON THE PLANE FOR THE SYSTEM OF HYPERBOLIC EQUATIONS WITH MIXED DERIVATIVES A SPECIAL FORM

A. T. Asanova

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling MES RK, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: anarasanova@list.ru

Key words: hyperbolic, period, condition, solvability, algorithm.

Abstract. The periodic problem on the plane for the system of hyperbolic equations with mixed derivatives the special form is considered. The questions of the existence of unique solution of the considering problem and ways of its construction are investigated. The periodic problem on the plane is reduced to a periodic boundary value problem in a rectangle under the periodicity of the data. For the solve of periodic boundary value problem for system of hyperbolic equations of second order is applied a method of an introducing additional functional parameters. We introduce new unknown functions as the values of the desired solution on the characteristics. The desired solution of periodic boundary value problem for system of the hyperbolic equations is replaced by the sum of the new unknown functions and the introduced functional parameters. The considering periodic boundary value problem is reduced to an equivalent problem consisting of Goursat problem for the system of hyperbolic equations with functional parameters and functional relations. The algorithms of finding solution to setting equivalent problem on the characteristics with functional parameters are proposed. The feasibility and convergence of the constructed algorithm are proved in the terms of the data to problem. Sufficient coefficient conditions of the unique solvability to the equivalent problem on the characteristics with functional parameters are established. Theorem of the existence of unique classical solution to the periodic problem on the plane for system of hyperbolic equations of the special form is proved.

УДК 517.956

О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ НА ПЛОСКОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СМЕШАННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. Т. Асанова

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: гиперболическое, период, условие, разрешимость, алгоритм.

Аннотация. Рассматривается периодическая задача на плоскости для системы гиперболических уравнений со смешанными производными специального вида. Исследуются вопросы существования единственного решения рассматриваемой задачи и способы его построения. При периодичности данных исследуемая

периодическая задача на плоскости сводится к периодической краевой задаче в прямоугольнике. Для решения периодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений второго порядка применяется метод введения дополнительных функциональных параметров. Вводятся новые неизвестные функции как значения искомого решения на характеристиках. Искомое решение периодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений заменяется на сумму новой неизвестной функции и введенных функциональных параметров. Рассматриваемая периодическая краевая задача сводится к эквивалентной задаче, состоящей из задачи Гурса для системы гиперболических уравнений с функциональными параметрами и функциональным соотношениям. Предложены алгоритмы нахождения решения полученной эквивалентной задачи на характеристиках с функциональными параметрами. Доказана осуществимость и сходимость построенного алгоритма в терминах данных задачи. Установлены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости эквивалентной задачи на характеристиках с функциональными параметрами. Доказана теорема о существовании единственного классического решения периодической задачи на плоскости для системы гиперболических уравнений специального вида.

На плоскости R^2 рассматривается система гиперболических уравнений второго порядка специального вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + C(t,x)u + f(t,x), \tag{1}$$

с периодическими условиями

$$u(t+T,x) = u(t,x), \ \ (t,x) \in R^2, \tag{2}$$

$$u(t,x+\omega) = u(t,x), \ \ (t,x) \in R^2, \tag{3}$$

где $(n \times n)$-матрицы $A(t,x)$, $C(t,x)$, n - вектор-функция $f(t,x)$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы по t на R^2, а также (T,ω) – периодичны, т.е. имеют место равенства

$$A(t+T,x) = A(t,x), \ A(t,x+\omega) = A(t,x), \ C(t+T,x) = C(t,x), \ C(t,x+\omega) = C(t,x),$$
$$f(t+T,x) = f(t,x), \ f(t,x+\omega) = f(t,x), \ (t,x) \in R^2.$$

Непрерывная на R^2 функция $u(t,x)$, имеющая непрерывные частные производные $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x}$ называется классическим (T,ω) – периодическим решением системы (1), если она удовлетворяет системе уравнений (1) при всех $(t,x) \in R^2$ и условиям периодичности (2), (3).

Пусть $\|u(t,x)\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |u_i(t,x)|$, $\|A(t,x)\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(t,x)|$, $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$.

Через $C(\Omega, R^n)$ (соответственно $C([0,T],R^n)$, $C([0,\omega],R^n)$ обозначим пространство непрерывных на Ω ($[0,T]$, $[0,\omega]$) функций $u : \Omega \to R^n$ ($\psi : [0,T] \to R^n, \varphi : [0,\omega] \to R^n$) с нормой $\|u\|_0 = \max\limits_{(t,x)\in\Omega} \|u(t,x)\|$ ($\|\psi\|_1 = \max\limits_{t\in[0,T]} \|\psi(t)\|, \|\varphi\|_2 = \max\limits_{x\in[0,\omega]} \|\varphi(x)\|$).

Для рассматриваемой задачи аналогом условия периодичности Пуанкаре по (t,x) являются соотношения

$$u(0,x) = u(T,x), \ \ x \in [0,\omega], \tag{4}$$

$$u(t,0) = u(t,\omega), \ \ t \in [0,T], \tag{5}$$

Функция $u(t,x) \in C(\Omega, R^n)$, имеющая частные производные $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, R^n)$ называется классическим решением задачи (1), (4), (5), если она удовлетворяет системе уравнений (1) при всех $(t,x) \in \Omega$ и выполнены краевые условия (4), (5).

Пусть $u(t,x)$ - классическое решение задачи (1), (4), (5). Тогда в силу свойств характеристик: $t=kT$, $x=m\omega$, $k,m\in Z$ и равенств (4), (5) функция $u^*(t,x)$, являющаяся периодическим продолжением $u(t,x)$ на R^2 по t,x соответственно с периодами T и ω будет классическим $(T,\omega)-$периодическим решением системы (1), т.е. выполнены условия периодичности по обеим переменным $u^*(t+T,x)=u^*(t,x)$, $u^*(t,x+\omega)=u^*(t,x)$, $(t,x)\in R^2$.

Краевые задачи для уравнений гиперболического типа встречаются в приложениях в качестве математической модели реальных физических процессов и представляют собой обширную и активно развивающуюся часть современной теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Важное место в теории дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа занимают уравнения второго порядка, возникающие преимущественно в ходе решения физических задач.

Одной из основных и наиболее изученных задач теории гиперболических уравнений второго порядка является периодическая краевая задача, для решения которой применялись метод Фурье, метод последовательных приближений, методы функционального анализа и вариационный метод6 обзор и библиографию можно посмотреть в [1-6]. Условия существования периодических решений гиперболических уравнений высоких порядков, связанные с проблемой малых знаменателей, изучались в [3]. В монографии [4] для исследования периодических решений волновых уравнений были применены асимптотические методы. Изучение периодических краевых задач для гиперболических уравнений со смешанными частными производными началось в 60-е годы с работы L.Cesari [7]. В его работе разработанные им методы нахождения периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений были распространены на уравнения с частными производными. В работах L.Cesari [7-11] исследовались периодические по переменной t с периодом T на полосе $\{-\infty<t<\infty,\quad -a\le x\le a\}$ решения систем нелинейных гиперболических уравнений. Были установлены достаточные условия существования, единственности и непрерывной зависимости от исходных данных периодического по t решения исследуемой задачи при предположениях непрерывности по всем своим аргументам и периодичности по t вектор-функции $f(t,x,u,v,w)$ правой части, а также липшицевости по последним трем аргументам. В статье [12] рассматривалась периодическая краевая задача на плоскости для гиперболического уравнения, зависящего от малого параметра. При предположениях непрерывности по своим аргументам, периодичности по t,x с периодом 2π и липшицевости по последним трем аргументам функции $f(t,x,u,v,w)$ правой части были получены достаточные условия существования единственного периодического решения с помощью результатов, установленных им для нахождения периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений и теоремы о неявных функциях. Работы [13-15] распространяют результаты L.Cesari на уравнения гиперболического типа со многими независимыми переменными, где для установления достаточных условий существования единственного периодического решения применяется принцип неподвижной точки Шаудера. В работе [16] обобщены результаты L.Cesari, когда правая часть уравнения f принадлежит более широкому классу, а также исследованы для таких классов уравнений периодические по обеим аргументам решения. В статьях [17, 18] исследуются периодические на полосе и плоскости решения уравнения гиперболического типа с линейной и нелинейной частями. Были получены условия существования единственного периодического решения путем сведения исходной задачи к нахождению неподвижной точки некоторого интегрального оператора в соответствующем пространстве функций. В работе [19] рассмотрена система гиперболических уравнений, зависящая от параметра. Используя подход A.C.Lazer и сведя к интегральным уравнениям были доказаны утверждения о существовании единственного периодического решения на полосе и плоскости. В работах [20-21] изучались условия разрешимости периодических краевых задач для линейных и нелинейных уравнений гиперболического типа применяя метод неподвижных точек к некоторому интегральному оператору. В монографии [5] численно-аналитический метод применен к исследованию периодических краевых задач для уравнений и систем уравнений с частными производ-

ными гиперболического типа с отклоняющимся аргументом при различных зависимостях правой части от своих аргументов. В работе [6] рассматривается математическая модель RSLG-генератора - краевая задача для системы телеграфных уравнений. Указанная задача путем замены и соответствующих нормировок сводится к периодической краевой задаче для нелинейного гиперболического уравнения со смешанной производной. Развивая асимптотическую теорию периодических по времени решений дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа, моделирующих колебательные процессы в автогенераторах с распределенными параметрами, установлены характерные особенности динамики рассматриваемых уравнений, в том числе градиентные катастрофы, выявлена роль резонансности как источника релаксационных колебаний и проведено теоретическое обоснование наблюдаемого в физических системах феномена буферности. В работах [22-28] исследовались периодические краевые задачи для уравнений и систем гиперболического типа. Установлены признаки однозначной разрешимости периодических краевых задач и указаны способы построения их решений. Найдены достаточные условия существования и единственности периодического на плоскости решения в терминах фундаментальной матрицы.

Необходимость исследования периодических краевых задач для гиперболических уравнений определяется как потребностями практики в связи с важностью ее приложения к решению разнообразных проблем задач физики, химии, биологии, радио- и электротехники, так и развитием самой теории.

Линейные и нелинейные гиперболические уравнения со смешанными производными второго порядка от двух независимых переменных применяются при рассмотрении процессов сушки воздушным потоком и изоэнтропического одномерного плоского течения в газовой динамике, в динамике и кинетике сорбции газов при линейной и нелинейной изотерме, при описании кинетики фильтрационного осветления малоконцентрированных водных суспензий на водоочистных фильтрах [29-32]. При изучении ударных волн в упругой или вязкопластической среде также использовались гиперболические уравнения со смешанной частной производной [33, 34]. Системы таких уравнений появляются при исследовании движения адсорбируемых смесей веществ, состоящих из многих компонент, через пористую предварительно насыщенную одним или несколькими веществами среду для малых или больших концентраций адсорбируемых веществ при постоянной или переменной скорости фильтрации [35].

Периодическая задача на плоскости для системы (1) исследовалась в работах [36-37] методом введения функциональных параметров [38-40]. Путем введения новых неизвестных функций рассматриваемая задача была сведена к семейству периодических краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и функциональным соотношениям. Были установлены условия разрешимости при отсутствии в определении решения предположения о существовании непрерывной производной по t. Как следствие этого, не предполагалось непрерывная дифференцируемость коэфициентов системы по переменной t.

В настоящей работе в определении решения предполагается существование непрерывной производной по переменной t, а также непрерывная дифференцируемость исходных данных по этой переменной. Периодическая задача для системы гиперболических уравнений введением новых функциональных параметров и с помощью замены сведена к задаче Гурса для системы гиперболических уравнений с параметрами функциональным соотношениям. Неизвестные параметры ищутся как решения периодических краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены условия существования единственного классического решения изучаемой задачи в терминах исходных данных. Предложен алгоритм построения приближенных решений и доказана его сходимость.

Схема метода. Введем обозначения $\lambda(x) = u(0,x) - \frac{1}{2}u(0,0)$, $\mu(t) = u(t,0) - \frac{1}{2}u(0,0)$. В задаче (1), (4), (5) осуществим замену искомой функции $u(t,x)$: $u(t,x) = \widetilde{u}(t,x) + \lambda(x) + \mu(t)$ и перейдем к следующей задаче

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + C(t,x)\widetilde{u} + A(t,x)\lambda'(x) + C(t,x)\lambda(x) + C(t,x)\mu(t) + f(t,x), \qquad (6)$$

$$\widetilde{u}(0,x)=0,\ \ x\in[0,\omega], \tag{7}$$

$$\widetilde{u}(t,0)=0,\ \ t\in[0,T], \tag{8}$$

$$\widetilde{u}(T,x)=0,\ \ x\in[0,\omega], \tag{9}$$

$$\widetilde{u}(t,\omega)=0,\ \ t\in[0,T], \tag{10}$$

Решением задачи (6)-(10) является тройка функций $(\mu(t),\lambda(x),\widetilde{u}(t,x))$, где функция $\widetilde{u}(t,x)$ имеет непрерывные производные первого порядка и смешанную производную второго порядка на Ω, функция $\mu(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$, функция $\lambda(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0,\omega]$, удовлетворяющая системе уравнений (6) условиям (7)-(10).

Задача (6) - (8) при фиксированных $\lambda(x)$, $\mu(t)$ является задачей Гурса относительно функции $\widetilde{u}(t,x)$ в области Ω. А соотношения (9), (10) позволяют определить неизвестные параметры $\lambda(x)$, $\mu(t)$, где функции $\lambda(x)$, $\mu(t)$ удовлетворяют равенствам $\lambda(0)=\lambda(\omega)$, $\mu(0)=\mu(T)$.

Введем новые неизвестные функции $\widetilde{v}(t,x)=\dfrac{\partial\widetilde{u}(t,x)}{\partial x}$, $\widetilde{w}(t,x)=\dfrac{\partial\widetilde{u}(t,x)}{\partial t}$ и запишем решение задачи Гурса в виде системы трех интегральных уравнений

$$\widetilde{v}(t,x)=\int_0^t\{A(\tau,x)\widetilde{v}(t,x)+C(\tau,x)\widetilde{u}(t,x)+A(\tau,x)\lambda'(x)+C(\tau,x)[\lambda(x)+\mu(\tau)]+f(\tau,x)\}d\tau, \tag{11}$$

$$\widetilde{w}(t,x)=\int_0^x\{A(t,\xi)\widetilde{v}(t,\xi)+C(t,\xi)\widetilde{u}(t,\xi)+A(t,\xi)\lambda'(\xi)+C(t,\xi)[\lambda(\xi)+\mu(t)]+f(t,\xi)\}d\xi, \tag{12}$$

$$\widetilde{u}(t,x)=\int_0^t\int_0^x\{A(\tau,\xi)\widetilde{v}(\tau,\xi)+C(\tau,\xi)\widetilde{u}(\tau,\xi)+A(\tau,\xi)\lambda'(\xi)+C(\tau,\xi)[\lambda(\xi)+\mu(\tau)]+f(\tau,\xi)\}d\xi d\tau. \tag{13}$$

Из соотношений (9), (10), после дифференцирования по x, t, соответственно, вытекает

$$\widetilde{v}(T,x)=0,\ \ x\in[0,\omega], \tag{14}$$

$$\widetilde{w}(t,\omega)=0,\ \ t\in[0,T]. \tag{15}$$

Подставляя соответствующие представления из (11) и (12) при $t=T$ в (14) и при $x=\omega$ в (15) получим

$$\int_0^T A(\tau,x)d\tau\cdot\dot{\lambda}(x)=-\int_0^T C(\tau,x)d\tau\cdot\lambda(x)-\int_0^T C(\tau,x)\mu(\tau)d\tau-$$
$$-\int_0^T\left[A(\tau,x)\widetilde{v}(\tau,x)+C(\tau,x)\widetilde{u}(\tau,x)\right]d\tau-\int_0^T f(\tau,x)d\tau, \tag{16}$$

$$\int_0^\omega C(t,\xi)d\xi\cdot\mu(t)=-\int_0^\omega\left[A(t,\xi)\dot{\lambda}(\xi)+C(t,\xi)\lambda(\xi)\right]d\xi-$$
$$-\int_0^\omega\left[A(t,\xi)\widetilde{v}(t,\xi)+C(t,\xi)\widetilde{u}(t,\xi)\right]d\xi-\int_0^\omega f(t,\xi)d\xi. \tag{17}$$

Так как данные задачи непрерывно дифференцируемы по переменной t, соотношение (17) можно продифференцировать по t. Тогда с учетом системы уравнений (6) для производной $\dfrac{\partial\widetilde{v}(t,\xi)}{\partial t}$ получим

$$\int_0^\omega C(t,\xi)d\xi\cdot\dot{\mu}(t)=-\int_0^\omega\left[\frac{\partial C(t,\xi)}{\partial t}+A(t,\xi)C(t,\xi)\right]d\xi\cdot\mu(t)-$$

$$-\int_0^{\omega}\left[\left\{\frac{\partial A(t,\xi)}{\partial t}+A^2(t,\xi)\right\}\dot{\lambda}(\xi)+\left\{\frac{\partial C(t,\xi)}{\partial t}+A(t,\xi)C(t,\xi)\right\}\lambda(\xi)\right]d\xi-$$

$$-\int_0^{\omega}\left[\left\{\frac{\partial A(t,\xi)}{\partial t}+A^2(t,\xi)\right\}\tilde{v}(t,\xi)+\left\{\frac{\partial C(t,\xi)}{\partial t}+A(t,\xi)C(t,\xi)\right\}\tilde{u}(t,\xi)+C(t,\xi)\tilde{w}(t,\xi)\right]d\xi-$$

$$-\int_0^{\omega}\left[\frac{\partial f(t,\xi)}{\partial t}+A(t,\xi)f(t,\xi)\right]d\xi. \qquad (18)$$

Добавим к соотношениям (16), (18) периодические условия

$$\lambda(0)=\lambda(\omega), \qquad (19)$$

$$\mu(0)=\mu(T). \qquad (20)$$

Таким образом получили замкнутую систему уравнений относительно тройки функций $(\mu(t),\lambda(x),\tilde{u}(t,x))$: неизвестная функция $\tilde{u}(t,x)$ и ее производные $\tilde{v}(t,x)$, $\tilde{w}(t,x)$ определяются из задачи Гурса (6)-(8) при фиксированных $\dot{\lambda}$, λ, μ, неизвестный функциональный параметр $\lambda(x)$ - из периодической краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (16), (19) при фиксированных μ, $\tilde{v}$, $\tilde{u}$, а неизвестный функциональный параметр $\mu(t)$ - из периодической краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (18), (20) при фиксированных $\dot{\lambda}$, λ, $\tilde{v}$, $\tilde{u}$, $\tilde{w}$.

Предположим, что коэффициенты при старших производных - матрица $\tilde{A}(x)=\int_0^T A(\tau,x)d\tau$ обратима для всех $x\in[0,\omega]$, а матрица $\tilde{C}(t)=\int_0^{\omega}C(t,\xi)d\xi$ обратима для всех $t\in[0,T]$.

Если известны $\dot{\lambda}(x)$, $\lambda(x)$, $\mu(t)$, то из (11) - (13) находим функции $\tilde{v}(t,x)$, $\tilde{w}(t,x)$, $\tilde{u}(t,x)$. Обратно, если известны функции $\tilde{v}(t,x)$, $\tilde{w}(t,x)$, $\tilde{u}(t,x)$, то из периодических краевых задач (16), (19) и (18), (20) можем найти $\dot{\lambda}(x)$, $\lambda(x)$, $\dot{\mu}(t)$, $\mu(t)$.

Так как неизвестными являются как $\tilde{v}(t,x)$, $\tilde{w}(t,x)$, $\tilde{u}(t,x)$, так и $\dot{\lambda}(x)$, $\lambda(x)$, $\dot{\mu}(t)$, $\mu(t)$, для нахождения решения задачи (6) - (10) используем итерационный метод.

Тройку $(\mu^*(t),\lambda^*(x),\tilde{u}^*(t,x))$ - решение задачи (6) - (10), определяем как предел последовательности троек $(\mu^{(m)}(t),\lambda^{(m)}(x),\tilde{u}^{(m)}(t,x))$, $m=0,1,2,\ldots$, по следующему алгоритму:

Шаг-0. а) Используя условия (7), (8) из периодической краевой задачи (16), (19), где в правой части системы дифференциальных уравнений $\tilde{u}(t,x)=0$, $\tilde{v}(t,x)=0$, $\mu(t)=0$, находим $\lambda^{(0)}(x)$ для всех $x\in[0,\omega]$, а из периодической краевой задачи (18), (20), где в правой части системы дифференциальных уравнений $\tilde{v}(t,x)=0$, $\tilde{w}(t,x)=0$, $\lambda(x)=0$, $\dot{\lambda}(x)=0$, находим $\mu^{(0)}(t)$ для всех $t\in[0,T]$.

б) Из задачи Гурса (6)-(8) при $\mu(t)=\mu^{(0)}(t)$, $\lambda(x)=\lambda^{(0)}(x)$, $\dot{\lambda}(x)=\dot{\lambda}^{(0)}(x)$, определяем $\tilde{u}^{(0)}(t,x)$ и ее производные $\tilde{v}^{(0)}(t,x)$, $\tilde{w}^{(0)}(t,x)$ для всех $(t,x)\in\Omega$.

Шаг-1. а) Из периодической краевой задачи (16), (19), где в правой части системы дифференциальных уравнений $\tilde{u}(t,x)=\tilde{u}^{(0)}(t,x)$, $\tilde{v}(t,x)=\tilde{v}^{(0)}(t,x)$, $\mu(t)=\mu^{(0)}(t)$, находим $\lambda^{(1)}(x)$ для всех $x\in[0,\omega]$, а из периодической краевой задачи (18), (20), где в правой части системы дифференциальных уравнений $\tilde{u}(t,x)=\tilde{u}^{(0)}(t,x)$, $\tilde{v}(t,x)=\tilde{v}^{(0)}(t,x)$, $\tilde{w}(t,x)=\tilde{w}^{(0)}(t,x)$, $\lambda(x)=\lambda^{(0)}(x)$, $\dot{\lambda}(x)=\dot{\lambda}^{(0)}(x)$, находим $\mu^{(1)}(t)$ для всех $t\in[0,T]$.

б) Из задачи Гурса (6)-(8) при $\mu(t)=\mu^{(1)}(t)$, $\lambda(x)=\lambda^{(1)}(x)$, $\dot{\lambda}(x)=\dot{\lambda}^{(1)}(x)$, определяем $\widetilde{u}^{(1)}(t,x)$ и ее производные $\widetilde{v}^{(1)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(1)}(t,x)$ для всех $(t,x)\in\Omega$.

И т.д.

Шаг-m. а) Из периодической краевой задачи (16), (19), где в правой части системы дифференциальных уравнений $\widetilde{u}(t,x)=\widetilde{u}^{(m-1)}(t,x)$, $\widetilde{v}(t,x)=\widetilde{v}^{(m-1)}(t,x)$, $\mu(t)=\mu^{(m-1)}(t)$, находим $\lambda^{(m)}(x)$ для всех $x\in[0,\omega]$, а из периодической краевой задачи (18), (20), где в правой части системы дифференциальных уравнений $\widetilde{u}(t,x)=\widetilde{u}^{(m-1)}(t,x)$, $\widetilde{v}(t,x)=\widetilde{v}^{(m-1)}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)=\widetilde{w}^{(m-1)}(t,x)$, $\lambda(x)=\lambda^{(m-1)}(x)$, $\dot{\lambda}(x)=\dot{\lambda}^{(m-1)}(x)$, находим $\mu^{(m)}(t)$ для всех $t\in[0,T]$.

б) Из задачи Гурса (6)-(8) при $\mu(t)=\mu^{(m)}(t)$, $\lambda(x)=\lambda^{(m)}(x)$, $\dot{\lambda}(x)=\dot{\lambda}^{(m)}(x)$, определяем $\widetilde{u}^{(m)}(t,x)$ и ее производные $\widetilde{v}^{(m)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(m)}(t,x)$ для всех $(t,x)\in\Omega$, $m=1,2,\ldots$.

Пусть

$$\alpha=\max_{(t,x)\in\Omega}\|A(t,x)\|,\ \beta=\max_{(t,x)\in\Omega}\|C(t,x)\|,\ \sigma=\alpha+\beta,\ A_1(x)=[\widetilde{A}(x)]^{-1}\int_0^T C(\tau,x)d\tau,$$

$$A_2(t)=[\widetilde{C}(t)]^{-1}\int_0^{\omega}\left[\frac{\partial C(t,\xi)}{\partial t}+A(t,\xi)C(t,\xi)\right]d\xi,\ \widetilde{\alpha}=\max_{x\in[0,\omega]}\|[\widetilde{A}(x)]^{-1}\|,\ \widetilde{\beta}=\max_{t\in[0,T]}\|[C(t)]^{-1}\|,$$

$$\alpha_1=\max_{x\in[0,\omega]}\|A_1(x)\|,\ a_1(x)=\max_{t\in[0,T]}\|C(t,x)\|,\ b_1(x)=\max_{t\in[0,T]}\{\|A(t,x)\|+\|C(t,x)\|\},$$

$$\alpha_2=\max_{t\in[0,T]}\|A_2(t)\|,\ a_2(t)=\max_{x\in[0,\omega]}\left\{\left\|\frac{\partial A(t,x)}{\partial t}+A^2(t,x)\right\|+\left\|\frac{\partial C(t,x)}{\partial t}+A(t,x)C(t,x)\right\|\right\},$$

$$b_2(t)=\max_{x\in[0,\omega]}\left\{\left\|\frac{\partial A(t,x)}{\partial t}+A^2(t,x)\right\|+\left\|\frac{\partial C(t,x)}{\partial t}+A(t,x)C(t,x)\right\|+\|C(t,x)\|\right\}.$$

Следующее утверждение дает условия реализуемости и сходимости предложенного алгоритма, которые одновременно обеспечивают существование единственного решения задачи (6)-(10).

Теорема 1. *Пусть*

i) матрицы $A(t,x)$, $C(t,x)$, вектор-функция $f(t,x)$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы по переменной t на Ω;

ii) матрица $\widetilde{A}(x)=\int_0^T A(\tau,x)d\tau$ обратима для всех $x\in[0,\omega]$, а матрица $\widetilde{C}(t)=\int_0^{\omega}C(t,\xi)d\xi$ обратима для всех $t\in[0,T]$;

iii) матрицы $Q_1(\omega)=\int_0^{\omega}A_1(\xi)d\xi$ и $Q_2(T)=\int_0^T A_2(\tau)d\tau$ обратимы;

iv) выполняются неравенства $\|[Q_1(\omega)]^{-1}\|\le\gamma_1(\omega)$, $\|[Q_2(T)]^{-1}\|\le\gamma_2(T)$, где $\gamma_1(\omega)$, $\gamma_2(T)$ - положительные числа,

$$q_1(\omega)=\gamma_1(\omega)\cdot\left(e^{\alpha_1\omega}-1-\alpha_1\omega\right)<1,\ q_2(T)=\gamma_2(T)\cdot\left(e^{\alpha_2 T}-1-\alpha_2 T\right)<1;$$

v) справедливо неравенство $q(T,\omega)=$

$$=\max[T,\omega]\max\{\kappa_1(\omega),\alpha_1\kappa_1(\omega)+1,\kappa_2(T),\alpha_2\kappa_2(T)+1\}\max\left[\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\right]\left\{\max\left\{\max_{x\in[0,\omega]}a_1(x),\max_{t\in[0,T]}a_2(t)\right\}+\right.$$

$$\left.+(\sigma+\beta)\max\left[\max_{x\in[0,\omega]}b_1(x),\max_{t\in[0,T]}b_2(t)\right]\max\left[e^{\sigma(T+\omega)}-e^{\sigma T},e^{\sigma(T+\omega)}-e^{\sigma\omega}\right]\right\}<1,$$

где $k_1(\omega)=\left\{e^{\alpha_1\omega}\dfrac{\gamma_1(\omega)}{1-q_1(\omega)}\alpha_1\omega^2+1\right\}\left[(e^{\alpha_1\omega}-1)\gamma_1(\omega)(1+\omega)+e^{\alpha_1\omega}\right]\omega+\gamma_1(\omega)\omega(1+\omega)$,

$$k_2(T)=\left\{e^{\alpha_2 T}\frac{\gamma_2(T)}{1-q_2(T)}\alpha_2 T^2+1\right\}\left[(e^{\alpha_2 T}-1)\gamma_2(T)(1+T)+e^{\alpha_2 T}\right]T+\gamma_2(T)T(1+T).$$

Тогда задача (6) - (10) имеет единственное решение.

Доказательство. В соответствии с нулевым шагом алгоритма и условий *i)-ii)* теоремы, неизвестные параметры $\lambda^{(0)}(x)$, $\mu^{(0)}(t)$ определяются как решения периодических краевых задач:

$$\dot{\lambda}(x)=-A_1(x)\cdot\lambda(x)-[\widetilde{A}(x)]^{-1}\int_0^T f(\tau,x)d\tau,\ \lambda(0)=\lambda(\omega), \tag{21}$$

$$\dot{\mu}(t)=-A_2(t)\cdot\mu(t)-[\widetilde{C}(t)]^{-1}\int_0^\omega\left[\frac{\partial f(t,\xi)}{\partial t}+A(t,\xi)f(t,\xi)\right]d\xi,\ \mu(0)=\mu(T). \tag{22}$$

При выполнении условий *iii)-iv)* теоремы вытекает существование единственного решения задач (21) и (22) и справедливость оценок [41]

$$\max_{x\in[0,\omega]}\|\lambda^{(0)}(x)\|\le k_1(\omega)\max_{x\in[0,\omega]}\|F_1(x)\|,\ \text{где}\ F_1(x)=[\widetilde{A}(x)]^{-1}\int_0^T f(\tau,x)d\tau,$$

$$\max_{x\in[0,\omega]}\|\dot{\lambda}^{(0)}(x)\|\le[\alpha_1 k_1(\omega)+1]\max_{x\in[0,\omega]}\|F_1(x)\|,$$

$$\max_{t\in[0,T]}\|\mu^{(0)}(t)\|\le k_2(T)\max_{t\in[0,T]}\|F_2(t)\|,\ \text{где}\ F_2(t)=[\widetilde{C}(t)]^{-1}\int_0^\omega\left[\frac{\partial f(t,\xi)}{\partial t}+A(t,\xi)f(t,\xi)\right]d\xi,$$

$$\max_{t\in[0,T]}\|\dot{\mu}^{(0)}(t)\|\le[\alpha_2 k_2(T)+1]\max_{t\in[0,T]}\|F_2(t)\|.$$

Решая систему интегральных уравнений (11)-(13) при найденных значениях параметров находим $\widetilde{v}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{u}^{(0)}(t,x)$, для которых имеют место оценки

$$\|\widetilde{v}^{(0)}(t,x)\|\le\max(T,\omega)e^{\sigma(t+x)}M,\quad \|\widetilde{w}^{(0)}(t,x)\|\le\max(T,\omega)e^{\sigma(t+x)}M,$$

$$\|\widetilde{u}^{(0)}(t,x)\|\le\max(T,\omega)e^{\sigma(t+x)}M,$$

где $M=\alpha\max_{x\in[0,\omega]}\|\dot{\lambda}^{(0)}(x)\|+\beta\max_{x\in[0,\omega]}\|\lambda^{(0)}(x)\|+\beta\max_{t\in[0,T]}\|\mu^{(0)}(t)\|+\max_{(t,x)\in\Omega}\|f(t,x)\|$.

Из m-го шага алгоритма и условий *i)-iv)* теоремы вытекает существование функций $\lambda^{(m)}(x)$ и $\mu^{(m)}(t)$ - решений периодических краевых задач

$$\dot{\lambda}(x)=-A_1(x)\cdot\lambda(x)-F_1(x)-$$
$$-[\widetilde{A}(x)]^{-1}\left[\int_0^T C(\tau,x)\mu^{(m-1)}(\tau)d\tau+\int_0^T\left[A(\tau,x)\widetilde{v}^{(m-1)}(\tau,x)+C(\tau,x)\widetilde{u}^{(m-1)}(\tau,x)\right]d\tau\right],\lambda(0)=\lambda(\omega), \tag{23}$$

$$\dot{\mu}(t)=-A_2(t)\cdot\mu(t)-F_2(t)-$$
$$-[\widetilde{C}(t)]^{-1}\int_0^\omega\left[\left\{\frac{\partial A(t,\xi)}{\partial t}+A^2(t,\xi)\right\}\dot{\lambda}^{(m-1)}(\xi)+\left\{\frac{\partial C(t,\xi)}{\partial t}+A(t,\xi)C(t,\xi)\right\}\lambda^{(m-1)}(\xi)\right]d\xi-$$
$$-[\widetilde{C}(t)]^{-1}\int_0^\omega\left[\left\{\frac{\partial A(t,\xi)}{\partial t}+A^2(t,\xi)\right\}\widetilde{v}^{(m-1)}(t,\xi)+\left\{\frac{\partial C(t,\xi)}{\partial t}+A(t,\xi)C(t,\xi)\right\}\widetilde{u}^{(m-1)}(t,\xi)\right]d\xi-$$
$$-[\widetilde{C}(t)]^{-1}\int_0^\omega C(t,\xi)\widetilde{w}^{(m-1)}(t,\xi)d\xi,\quad \mu(0)=\mu(T). \tag{24}$$

При найденных функциях $\lambda^{(m)}(x)$, $\mu^{(m)}(t)$ решаем интегральные уравнения (11)-(13) и находим m-е приближения $\widetilde{v}^{(m)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(m)}(t,x)$, $\widetilde{u}^{(m)}(t,x)$ для всех $(t,x)\in\Omega$, $m=1,2,\ldots$.

Для разностей m-ых и $(m-1)$-ых приближений $\widetilde{v}^{(m)}(t,x)-\widetilde{v}^{(m-1)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(m)}(t,x)-\widetilde{w}^{(m-1)}(t,x)$, $\widetilde{u}^{(m)}(t,x)-\widetilde{u}^{(m-1)}(t,x)$ справедливы оценки

$$\| \widetilde{v}^{(m)}(t,x)-\widetilde{v}^{(m-1)}(t,x) \| \le \max(T,\omega)e^{\sigma(t+x)}\Big\{\alpha \max_{x\in[0,\omega]}\left\|\dot{\lambda}^{(m)}(x)-\dot{\lambda}^{(m-1)}(x)\right\| +$$
$$+\beta \max_{x\in[0,\omega]}\left\|\lambda^{(m)}(x)-\lambda^{(m-1)}(x)\right\| + \beta \max_{t\in[0,T]}\left\|\mu^{(m)}(t)-\mu^{(m-1)}(t)\right\|\Big\}, \tag{25}$$

$$\| \widetilde{w}^{(m)}(t,x)-\widetilde{w}^{(m-1)}(t,x) \| \le \max(T,\omega)e^{\sigma(t+x)}\Big\{\alpha \max_{x\in[0,\omega]}\left\|\dot{\lambda}^{(m)}(x)-\dot{\lambda}^{(m-1)}(x)\right\| +$$
$$+\beta \max_{x\in[0,\omega]}\left\|\lambda^{(m)}(x)-\lambda^{(m-1)}(x)\right\| + \beta \max_{t\in[0,T]}\left\|\mu^{(m)}(t)-\mu^{(m-1)}(t)\right\|\Big\}, \tag{26}$$

$$\| \widetilde{u}^{(m)}(t,x)-\widetilde{u}^{(m-1)}(t,x) \| \le \max(T,\omega)e^{\sigma(t+x)}\Big\{\alpha \max_{x\in[0,\omega]}\left\|\dot{\lambda}^{(m)}(x)-\dot{\lambda}^{(m-1)}(x)\right\| +$$
$$+\beta \max_{x\in[0,\omega]}\left\|\lambda^{(m)}(x)-\lambda^{(m-1)}(x)\right\| + \beta \max_{t\in[0,T]}\left\|\mu^{(m)}(t)-\mu^{(m-1)}(t)\right\|\Big\}. \tag{27}$$

А для разностей $(m+1)$-ых и m-ых приближений параметров $\dot{\lambda}^{(m+1)}(x)-\dot{\lambda}^{(m)}(x)$, $\lambda^{(m+1)}(x)-\lambda^{(m)}(x)$, $\dot{\mu}^{(m+1)}(t)-\dot{\mu}^{(m)}(t)$, $\mu^{(m+1)}(t)-\mu^{(m)}(t)$ получим

$$\max_{x\in[0,\omega]} \| \lambda^{(m+1)}(x)-\lambda^{(m)}(x) \| \le k_1(\omega)\widetilde{\alpha}\Big(\max_{x\in[0,\omega]} a_1(x)T\left\|\mu^{(m)}-\mu^{(m-1)}\right\|_1 +$$
$$+\max_{x\in[0,\omega]} b_1(x)\int_0^T \max\left\{\left\|\widetilde{v}^{(m)}(\tau,x)-\widetilde{v}^{(m-1)}(\tau,x)\right\|,\left\|\widetilde{u}^{(m)}(\tau,x)-\widetilde{u}^{(m-1)}(\tau,x)\right\|\right\}d\tau\Big), \tag{28}$$

$$\max_{x\in[0,\omega]} \| \dot{\lambda}^{(m+1)}(x)-\dot{\lambda}^{(m)}(x) \| \le [\alpha_1 k_1(\omega)+1]\widetilde{\alpha}\Big(\max_{x\in[0,\omega]} a_1(x)T\left\|\mu^{(m)}-\mu^{(m-1)}\right\|_1 +$$
$$+\max_{x\in[0,\omega]} b_1(x)\int_0^T \max\left\{\left\|\widetilde{v}^{(m)}(\tau,x)-\widetilde{v}^{(m-1)}(\tau,x)\right\|,\left\|\widetilde{u}^{(m)}(\tau,x)-\widetilde{u}^{(m-1)}(\tau,x)\right\|\right\}d\tau\Big), \tag{29}$$

$$\max_{t\in[0,T]} \| \mu^{(m+1)}(t)-\mu^{(m)}(t) \| \le k_2(T)\widetilde{\beta}\Big(\max_{t\in[0,T]} a_2(t)\omega \max\left\{\left\|\dot{\lambda}^{(m)}-\dot{\lambda}^{(m-1)}\right\|_2,\left\|\lambda^{(m)}-\lambda^{(m-1)}\right\|_2\right\}+$$
$$+\max_{t\in[0,T]} b_2(t)\int_0^\omega \max\left\{\left\|\widetilde{v}^{(m)}(t,\xi)-\widetilde{v}^{(m-1)}(t,\xi)\right\|,\left\|\widetilde{u}^{(m)}(t,\xi)-\widetilde{u}^{(m-1)}(t,\xi)\right\|,\left\|\widetilde{w}^{(m)}(t,\xi)-\widetilde{w}^{(m-1)}(t,\xi)\right\|\right\}d\xi\Big), \tag{30}$$

$$\max_{t\in[0,T]} \| \dot{\mu}^{(m+1)}(t)-\dot{\mu}^{(m)}(t) \| \le [\alpha_2 k_2(T)+1]\widetilde{\beta}\Big(\max_{t\in[0,T]} a_2(t)\omega \max\left\{\left\|\dot{\lambda}^{(m)}-\dot{\lambda}^{(m-1)}\right\|_2,\left\|\lambda^{(m)}-\lambda^{(m-1)}\right\|_2\right\}+$$
$$+\max_{t\in[0,T]} b_2(t)\int_0^\omega \max\left\{\left\|\widetilde{v}^{(m)}(t,\xi)-\widetilde{v}^{(m-1)}(t,\xi)\right\|,\left\|\widetilde{u}^{(m)}(t,\xi)-\widetilde{u}^{(m-1)}(t,\xi)\right\|,\left\|\widetilde{w}^{(m)}(t,\xi)-\widetilde{w}^{(m-1)}(t,\xi)\right\|\right\}d\xi\Big). \tag{31}$$

Введем обозначение

$$\Delta_m = \max\Big(\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\dot{\lambda}^{(m)}(x)-\dot{\lambda}^{(m-1)}(x)\right\|, \max_{t\in[0,T]}\left\|\dot{\mu}^{(m)}(t)-\dot{\mu}^{(m-1)}(t)\right\|,$$
$$\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\lambda^{(m)}(x)-\lambda^{(m-1)}(x)\right\|, \max_{t\in[0,T]}\left\|\mu^{(m)}(t)-\mu^{(m-1)}(t)\right\|\Big),\ m=1,2,\ldots.$$

Тогда из оценок (28)-(31) с учетом неравенств (25)-(27) следует

$$\max_{x\in[0,\omega]} \| \lambda^{(m+1)}(x)-\lambda^{(m)}(x) \| \le k_1(\omega)\widetilde{\alpha}\Big(\max_{x\in[0,\omega]} a_1(x)T +$$

$$+\max_{x\in[0,\omega]} b_1(x)\cdot\max(T,\omega)[\alpha+2\beta]\left(e^{\sigma(T+\omega)}-e^{\sigma\omega}\right)\Big)\Delta_m, \tag{32}$$

$$\max_{x\in[0,\omega]}\|\dot{\lambda}^{(m+1)}(x)-\dot{\lambda}^{(m)}(x)\|\le[\alpha_1 k_1(\omega)+1]\widetilde{\alpha}\Big(\max_{x\in[0,\omega]} a_1(x)T+$$

$$+\max_{x\in[0,\omega]} b_1(x)\cdot\max(T,\omega)[\alpha+2\beta]\left(e^{\sigma(T+\omega)}-e^{\sigma\omega}\right)\Big)\Delta_m, \tag{33}$$

$$\max_{t\in[0,T]}\|\mu^{(m+1)}(t)-\mu^{(m)}(t)\|\le k_2(T)\widetilde{\beta}\Big(\max_{t\in[0,T]} a_2(t)\omega+$$

$$+\max_{t\in[0,T]} b_2(t)\cdot\max(T,\omega)[\alpha+2\beta]\left(e^{\sigma(T+\omega)}-e^{\sigma T}\right)\Big)\Delta_m, \tag{34}$$

$$\max_{t\in[0,T]}\|\dot{\mu}^{(m+1)}(t)-\dot{\mu}^{(m)}(t)\|\le[\alpha_2 k_2(T)+1]\widetilde{\beta}\Big(\max_{t\in[0,T]} a_2(t)\omega+$$

$$+\max_{t\in[0,T]} b_2(t)\cdot\max(T,\omega)[\alpha+2\beta]\left(e^{\sigma(T+\omega)}-e^{\sigma T}\right)\Big)\Delta_m. \tag{35}$$

Из оценок (32)-(35) получим основное неравенство

$$\Delta_{m+1}\le q(T,\omega)\Delta_{m-1},\quad m=1,2,\dots\ . \tag{36}$$

Из условия *v)* теоремы вытекает сходимость последовательности $\{\Delta_m\}$ при $m\to\infty$ к Δ^*. Отсюда получаем равномерную сходимость последовательностей $\{\lambda^{(m)}(x)\}$, $\{\dot{\lambda}^{(m)}(x)\}$, $\{\mu^{(m)}(t)\}$, $\{\dot{\mu}^{(m)}(t)\}$ при $m\to\infty$ соответственно к $\lambda^*(x)$, $\widetilde{\lambda}^*(x)$, $\mu^*(t)$, $\widetilde{\mu}^*(t)$ для всех $x\in[0,\omega]$, $t\in[0,T]$. Функции $\lambda^*(x)$, $\mu^*(t)$ являются непрерывными на $[0,\omega]$, $[0,T]$, соответственно. Из равномерной сходимости последовательностей $\{\dot{\lambda}^{(m)}(x)\}$, $\{\dot{\mu}^{(m)}(t)\}$ при $m\to\infty$ вытекает, что $\dfrac{d\lambda^*(x)}{dx}\equiv\dot{\lambda}^*(x)=\widetilde{\lambda}^*(x)$ для всех $x\in[0,\omega]$ и $\dfrac{d\mu^*(t)}{dt}\equiv\dot{\mu}^*(t)=\widetilde{\mu}^*(t)$ для всех $t\in[0,T]$. На основе оценок (25), (26), (27) установим равномерную сходимость последовательностей $\{\widetilde{v}^{(m)}(t,x)\}$, $\{\widetilde{w}^{(m)}(t,x)\}$, $\{\widetilde{u}^{(m)}(t,x)\}$ при $m\to\infty$ к функциям $\widetilde{v}^*(t,x)$, $\widetilde{w}^*(t,x)$, $\widetilde{u}^*(t,x)$, соответственно, для всех $(t,x)\in\Omega$. Очевидно, что функция $\widetilde{u}^*(t,x)$ является непрерывной на Ω и имеет непрерывные частные производные $\dfrac{\partial\widetilde{u}^*(t,x)}{\partial x}=\widetilde{v}^*(t,x)$, $\dfrac{\partial\widetilde{u}^*(t,x)}{\partial t}=\widetilde{w}^*(t,x)$ для всех $(t,x)\in\Omega$.

Тройка функций $(\mu^*(t),\lambda^*(x),\widetilde{u}^*(t,x))$ является решением задачи (6)-(10). Единственность решения задачи (6)-(10) доказывается от противного.

Теорема 1 доказана. Определим сумму функций $\widetilde{u}^*(t,x)+\mu^*(t)+\lambda^*(x)=u^*(t,x)$. Из эквивалентности задач (1), (4), (5) и (6)-(10) следует

Теорема 2. *Пусть выполнены условия i)-v) теоремы 1.*

Тогда периодическая краевая задача для системы гиперболических уравнений (1), (4), (5) имеет единственное классическое решение $u^*(t,x)$.

Для исходной задачи с учетом $(T,\omega)-$периодичности исходных данных и свойств характеристик будет справедлива

Теорема 3. *Пусть i) матрицы* $A(t,x)$, $C(t,x)$, *вектор-функция* $f(t,x)$ *непрерывны и непрерывно дифференцируемы по переменной* t *на* R^2, *а также* $(T,\omega)-$*периодичны на плоскости;*

и выполнены условия ii)-v) теоремы 1.

Тогда периодическая задача на плоскости для системы гиперболических уравнений (1)-(3) имеет единственное классическое $(T,\omega)-$*периодическое решение* $u^*(t,x)$.

Замечание. 1) Аналогичные утверждения можно получить для системы $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + f(t,x)$, при предположениях, что $(n \times n)$-матрицы $B(t,x)$, $C(t,x)$, n- вектор-функция $f(t,x)$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы по x на R^2, а также (T,ω) – периодичны.

2) Для системы $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = C(t,x)u + f(t,x)$, где $(n \times n)$-матрица $C(t,x)$, n- вектор-функция $f(t,x)$ предплагаются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми по переменным t, x на R^2, а также (T,ω) – периодичными, также можно установить аналоги теорем 1-3.

Заключение. Таким образом, периодическая задача на плоскости для системы гиперболических уравнений (1)-(3) на основе свойств характеристик системы и путем введения новых функциональных параметров $\lambda(x)$, $\mu(t)$ как значений искомой функции $u(t,x)$ на характеристиках $t=0$, $x=0$ со специальным смещением в точке $(0,0)$, а также осуществления замены $u(t,x) = \widetilde{u}(t,x) + \lambda(x) + \mu(t)$ сводится к эквивалентной задаче, состоящей из задачи Гурса для системы гиперболических уравнений с функциональными параметрами на прямоугольнике и функциональных соотношений относительно параметров. Построен алгоритм нахождения решения полученной задачи и доказана его сходимость. Получены условия существования единственного классического решения задачи (1)-(3) в терминах матриц $A(t,x)$, $C(t,x)$, чисел ω, T.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Vejvoda O. Herrmann L., Lovicar V. et al. Partial differential equations: time - periodic solutions. Prague: Martinus Nijhoff Publ, Hague, Boston, London, 1982. - 358 p.

[2] Перов А.И. Вариационные методы в теории нелинейных колебаний. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1981. -196с.

[3] Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев: Наук. думка, 1984. - 264с.

[4] Митропольский Ю.А., Хома Г.П., Громяк М.И. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. Киев: Наук. думка, 1991. - 232с.

[5] Самойленко А.М., Ткач Б.П. Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. Киев: Наук. думка, 1992. - 208с.

[6] Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений. М.: Наука, 1998. - 191 с. - (Тр. МИАН; Т. 222)

[7] Cesari L. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Proc. Internat. Sympos. Non-linear Vibrations (Kiev 1961), Izd. Akad. Nauk Ukrain. SSR. Kiev. 1963. Vol. 2. P. 440-457.

[8] Cesari L. A criterion for the existence in a strip of periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1965. Vol. 14. No 2. P. 95-118.

[9] Cesari L. Existence in the large of periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Arch. Rational Mech. Anal. 1965. Vol. 20. No 2. P. 170-190.

[10] Cesari L. A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems in Shauder's canonic form // Ann. Scuola norm. super. Pisa. 1974. Vol. 1. No 3-4. P. 311-358.

[11] Cesari L. Un problema ai limiti per sistemi di equazioni iperboliche quasi lineari nella forma canonica di Shauder // Rend. Accad. Naz. Lincei. Cl. Sc. fis. mat. e natur. 1974. Vol. 57. No 5. P. 303-307.

[12] Hale J.K. Periodic solutions of a class of hyperbolic equations containing a small parameter // Arch. Rational Mech. Anal. 1967. Vol. 23. No 5. P. 380-398.

[13] Hecquet G. Utilisation de la methode d'Euler-Cauchy pour la demonstration d'un theoreme de L.Cesari // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser.A. 1971. Vol.273. P.712-715.

[14] Hecquet G. Contribution a la recherche des solutions periodiques en x_1 de l'equation $u_{x_1 \ldots x_n} = f(x_1,\ldots,x_n,u_{x_1},\ldots,u_{x_n},u_{x_1x_2},\ldots,u_{x_2x_n})$ // C. R. Acad. Sci. Paris Ser.A. 1973. Vol. 276. P. 997-1000.

[15] Hecquet G. Contribution a la recherche des solutions periodiques en x_1 et x_2 de l'equation $u_{x_1 \ldots x_n} = f(x_1,\ldots,x_n,u_{x_1},\ldots,u_{x_n},u_{x_1x_2},\ldots,u_{x_2x_n})$ // C. R. Acad. Sci. Paris Ser.A. 1973. Vol.276. P.1047-105

[16] Aziz A.K. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 17. No 3. P. 557-566.

[17] Aziz A.K., Brodsky S.L. Periodic solutions of a class of weakly nonlinear hyperbolic partial differential equations // SIAM J. Math. Anal. 1972. Vol. 3. No 2. P. 300-313.

[18] Aziz A.K., Horak M.G. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations in the large // SIAM J. Math. Anal. 1972. Vol. 3. No 1. P. 176-182.

[19] Aziz A.K., Meyers A.M. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations in a strip // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 146. P. 167-178.

[20] Lakshmikantham V., Pandit S.G. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Comput. and Math. 1985. Vol. 11. No 1-3. P. 249-259.

[21] Жестков С.В. О двоякопериодических решениях нелинейных гиперболи-ческих систем в частных производных //Украинский математический журнал. 1987. Т. 39. No 4. С. 521-523.

[22] Кигурадзе Т.И. О периодических краевых задачах для линейных гиперболических уравнений. I // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. No 2. С. 281-297.

[23] Кигурадзе Т.И. О периодических краевых задачах для линейных гиперболических уравнений. II // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. No 4. С. 637-645.

[24] Kiguradze T. Some boundary value problems for systems of linear partial differential equations of hyperbolic type //Mem. Differential Equations Math. Phys. 1994. Vol. 1. P. 1-144.

[25] Kiguradze T. On periodic in the plane solutions of second order hyperbolic systems // Archivum mathematicum. 1997. Tomus 33. No 4. P. 253-272.

[26] Кигурадзе Т.И. О двоякопериодических решениях одного класса нелинейных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. No 2. С. 238-245.

[27] Kiguradze T. On periodic in the plane solutions of nonlinear hyperbolic equations // Nonlinear Analysis. 2000. Vol. 39. No 1. P. 173-185.

[28] Kiguradze T., Lakshmikantham V. On doubly periodic solutions of fourth-order linear hyperbolic equations // Nonlinear Analysis. 2002. Vol. 49. No 1. P. 87-112.

[29] Веницианов Е.В., Рубинштейн Р.Н. Динамика сорбции из жидких сред. М.: Наука, 1983. - 237с.

[30] Веницианов Е.В., Сенявин М.М. Математическое описание фильтраци-онного осветления суспензий //Теорет. основы хим. технологии. 1976. Т. 10. No 4. С.584-592.

[31] Рачинский В.В. Введение в общую теорию динамики сорбции и хроматографии. М.: Наука, 1964. - 136 с.

[32] Минц Д.М. Кинетика фильтрации малоконцентрированных водных суспензий на водоочистных фильтрах // Доклады АН СССР. 1951. Т. 78. No 2. С. 315-318.

[33] Perzyna P. The propagation of shock waves non-homogeneous elastic-ves-koplastic bodies // Arch. mech. stosow. 1961. Vol. 13. P. 75-106.

[34] Perzina P. The propagation of stress wave in a rate sensitive and workhardning plastic medium // Arch. mech. stosow. 1964. Vol. 16. P. 1215-1244.

[35] Цабек Л.К. О новых режимах при движении адсорбируемых смесей через пористую среду // Доклады АН СССР. 1980. Т. 254. No 6. С. 1372-1376.

[36] Асанова А.Т. Периодическая краевая задача для систем гиперболических уравнений // Доклады НАН РК. 2002. No 4. С. 5-11.

[37] 37 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Periodic solutions of systems of hyperbolic equations bounded on a plane // Ukranian Mathematical Journal. 2004. Vol. 56. No 4. P.682-694.

[38] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique solvability of the boundary value problem for systems of hyperbolic equations with data on the characteristics // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2002. Vol.42. No 11. P. 1609-1621.

[39] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations // Differential Equations. 2003. Vol.39. No 10. P. 1414-1427.

[40] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations //Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2013. Vol. 402. No 1. P.167-178.

[41] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // USSR Computational mathematics and mathematical Physics. 1989. Vol. 29. No 1. P.34-46.

REFERENCES

[1] Vejvoda O. Herrmann L., Lovicar V. et al. Partial differential equations: time - periodic solutions. Prague : Martinus Nijhoff Publ, Hague, Boston, London, 1982. - 358p.

[2] Perov A.I. Variational methods in the theory of nonlinear oscillations. Voronezh: Izd-vo Voronezh. Un-ta, 1981. -196p. (in Russ.).

[3] Ptashnik B.I. Invalid boundary value problems for differential equations with partial derivatives. Kiev: Nauk. dumka, 1984. – 264p. (in Russ.).

[4] Mitropol'skii Yu.A., Khoma G.P., Gromiyak M.I. Asymptotic methods of investigation of quasi-wave equations of hyperbolic type. Kiev: Nauk. dumka, 1991. – 232p. (in Russ.).

[5] Samoilenko A.M., Tkach B.P. Numerical and analytical methods in the theory of periodic solutions of partial differential equations. Kiev: Nauk. dumka, 1992. – 208p. (in Russ.).

[6] Kolesov A.Yu., Mishenko E.F., Rozov N.Kh. Asymptotic methods of investigation of periodic solutions of nonlinear hyperbolic equations. M.: Nauka, 1998. - 191 p. - (Trudy MIAN; V.222) (in Russ.).

[7] Cesari L. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Proc. Internat. Sympos. Non-linear Vibrations (Kiev 1961), Izd. Akad. Nauk Ukrain. SSR. Kiev. 1963. Vol. 2. P. 440-457.

[8] Cesari L. A criterion for the existence in a strip of periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1965. Vol. 14. No 2. P. 95-118.

[9] Cesari L. Existence in the large of periodic solutions of hyperbolic partial differential equations //Arch. Rational Mech. Anal. 1965. Vol.20. No 2. P.170-190.

[10] Cesari L. A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems in Shauder's canonic form // Ann. Scuola norm. super. Pisa. 1974. Vol. 1. No 3-4. P. 311-358.

[11] Cesari L. Un problema ai limiti per sistemi di equazioni iperboliche quasi lineari nella forma canonica di Shauder // Rend. Accad. Naz. Lincei. Cl. Sc. fis. mat. e natur. 1974. Vol. 57. No 5. P. 303-307.

[12] Hale J.K. Periodic solutions of a class of hyperbolic equations containing a small parameter // Arch. Rational Mech. Anal. 1967. Vol. 23. No 5. P. 380-398.

[13] Hecquet G. Utilisation de la methode d'Euler-Cauchy pour la demonstration d'un theoreme de L.Cesari //C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. A. 1971. Vol. 273. P. 712-715.

[14] Hecquet G. Contribution a la recherche des solutions periodiques en x_1 de l'equation $u_{x_1 \ldots x_n} = f(x_1, \ldots, x_n, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_1 x_2}, \ldots, u_{x_2 x_n})$ //C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A. 1973. Vol. 276. P. 997-1000.

[15] Hecquet G. Contribution a la recherche des solutions periodiques en x_1 et x_2 de l'equation $u_{x_1 \ldots x_n} = f(x_1, \ldots, x_n, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_1 x_2}, \ldots, u_{x_2 x_n})$ //C.R. Acad. Sci. Paris Ser.A. 1973. Vol. 276. P. 1047-105

[16] Aziz A.K. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations. // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 17. No 3. P. 557-566.

[17] Aziz A.K., Brodsky S.L. Periodic solutions of a class of weakly nonlinear hyperbolic partial differential equations // SIAM J. Math. Anal. 1972. Vol. 3. No 2. P. 300-313.

[18] Aziz A.K., Horak M.G. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations in the large // SIAM J. Math. Anal. 1972. Vol. 3. No 1. P. 176-182.

[19] Aziz A.K., Meyers A.M. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations in a strip // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 146. P. 167-178.

[20] Lakshmikantham V., Pandit S.G. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Comput. and Math. 1985. Vol. 11. No 1-3. P. 249-259.

[21] Zhestkov S.V. About two-periodic solutions of nonlinear hyperbolic-cal systems of partial // Ukrainskii matematicheskii journal. 1987. T. 39. No 4. p. 521-523. (in Russ.).

[22] Kiguradze T.I. Periodic boundary value problems for linear hyperbolic equations. I // Differents. uravneniya. 1993. V.29. No 2. p.281-297. (in Russ.).

[23] Kiguradze T.I. Periodic boundary value problems for linear hyperbolic equations. II // Differents. uravneniya. 1993. V. 29. No 4. p. 637-645. (in Russ.).

[24] Kiguradze T. Some boundary value problems for systems of linear partial differential equations of hyperbolic type // Mem. Differential Equations Math. Phys. 1994. Vol. 1. P. 1-144.

[25] Kiguradze T. On periodic in the plane solutions of second order hyperbolic systems // Archivum mathematicum. 1997. Tomus 33. No 4. P. 253-272.

[26] Kiguradze T.I. O dvoiyakoperiodicheskih resheniyah odnogo klassa nelineinyh giperbolicheskih uravnenii // Differents. uravneniya. 1998. T.34. No 2. S.238-245.

[27] Kiguradze T. On periodic in the plane solutions of nonlinear hyperbolic equations // Nonlinear Analysis. 2000. Vol. 39. No 1. P. 173-185.

[28] Kiguradze T., Lakshmikantham V. On doubly periodic solutions of fourth-order linear hyperbolic equations // Nonlinear Analysis. 2002. Vol. 49. No 1. P. 87-112.

[29] Venetsianov E.V., Rubinshtein R.N. Sorption dynamics of liquid media. M.: Nauka, 1983. – 237p. (in Russ.).

[30] Venetsianov E.V., Seniyavin M.M. The mathematical description of filtration, clarification tional suspensions // Teoret. osnovy khim. tekhnologii. 1976. V. 10. No 4. p.584-592. (in Russ.).

[31] Rachinskii V.V. Introduction to the general theory of sorption dynamics and chromatography. M.: Nauka, 1964. - 136 p. (in Russ.).

[32] Mints D.M. Kinetics of filtering low-concentration aqueous suspensions in water treatment filters // Doklady AN SSSR. 1951. V. 78. No 2. p. 315-318. (in Russ.).

[33] Perzyna P. The propagation of shock waves non-homogeneous elastic - veskoplastic bodies // Arch. mech. stosow. 1961. Vol. 13. P. 75-106.

[34] Perzina P. The propagation of stress wave in a rate sensitive and workhardning plastic medium // Arch. mech. stosow. 1964. Vol. 16. P. 1215-1244.

[35] Tsabek L.K. On the new modes of motion of adsorbed compounds through a porous medium // Doklady AN SSSR. 1980. V. 254. No 6. p. 1372-1376. (in Russ.).

[36] Asanova A.T. Periodic boundary value problem for systems of hyperbolic equations // Doklady NAN RK. 2002. No 4. p. 5-11. (in Russ.).

[37] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Periodic solutions of systems of hyperbolic equations bounded on a plane // Ukranian Mathematical Journal. 2004. Vol. 56. No 4. P.682-694.

[38] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique solvability of the boundary value problem for systems of hyperbolic equations with data on the characteristics // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2002. Vol.42. No 11. P. 1609-1621.

[39] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations //Differential Equations. 2003. Vol. 39. No 10. P. 1414-1427.
[40] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations //Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2013. Vol. 402. No 1. P.167-178.
[41] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // USSR Computational mathematics and mathematical Physics. 1989. Vol. 29. No 1. P.34-46.

АРАЛАС ТУЫНДЫЛАРЫ БАР ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ АРНАЙЫ ТҮРДЕГІ ЖҮЙЕСІ ҮШІН ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ПЕРИОДТЫ ЕСЕП ТУРАЛЫ

А. Т. Асанова

ҚР БҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: гиперболалық, период, шарт, шешілімділік, алгоритм.

Аннотация. Аралас туындылары бар гиперболалық теңдеулердің арнайы түрдегі жүйесі үшін жазықтықтағы периодты есеп қарастырылады. Қарастырылып отырған есептің жалғыз шешімінің бар болуы мәселелері және оны құру тәсілдері зерттеледі. Берілімдері периодты болған жағдайда зерттелінетін жазықтықтағы периодты есеп тіктөртбұрыштағы периодты шеттік есепке келтіріледі. Екінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін периодты шеттік есепті шешу үшін қосымша функционалдық параметрлер енгізу әдісі қолданылады. Жаңа белгісіз функциялар ізделінді шешімнің характеристикалардағы мәндері ретінде енгізіледі. Гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін периодты шеттік есептің ізделінді шешімі жаңа белгісіз функция мен енгізілген функционалдық параметрлердің қосындысына алмастырылады. Қарастырылып отырған периодты шеттік есеп функционалдық параметрлері бар гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін Гурса есебінен және функционалдық қатынастардан тұратын пара-пар есепке келтіріледі. Алынған функционалдық параметрлері бар характеристикалардағы пара-пар есептің шешімін табудың алгоритмдері ұсынылған. Құрылған алгоритмнің жүзеге асырылымдығы мен жинақтылығы есептің берілімдері терминінде дәлелденген. Функционалдық параметрлері бар характеристикалардағы пара-пар есептің бірмәнді шешілімділігінің коэффициенттік жеткілікті шарттары тағайындалған. Арнайы түрдегі гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін жазықтықтағы периодты есептің жалғыз классикалық шешімінің бар болуы туралы теорема дәлелденген.

Поступила 07.07.2015 г.

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 4, Number 302 (2015), 117 – 120

THE CALCULATION INDEX OF SCATTERING IN THE EARTH'S ATMOSPHERE

A. M. Karimov

Kazakh national university named after Al-Farabi, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: karalik0@yandex.ru

Key words: Index, indicatrix, scattering, atmosphere.

Abstract. In this article two options of calculation the index of scattering of sunlight passing through the Earth's atmosphere are discussed. Depending on the availability of certain parameters, it can be used in the calculation of one of the options. The essential components of computing are the latitude of observing site and the index of refraction in the Earth's atmosphere. In another instance, it is required more parameters: atmospheric density, refractive index, wavelength, and the number of drops of water vapor per unit volume, the number of dust