N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 4, Number 302 (2015), 208 – 214

ON SPECTRAL ZETA FUNCTIONS OF THE LAPLACE EQUATION WITH THE INTEGRAL BOUNDARY CONDITIONS OF THE POTENTIAL

T. Sh. Kal'menov, D. Suragan

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: suragan@list.ru

Keywords: boundary condition of the potential, Laplace equation, spectral zeta function.
Abstract. In the present paper we prove that a real valued spectral zeta function of the Laplace operator with a nonlocal boundary value integral condition is maximized in a ball among all domains of given measure in multidimensional Euclidean space with a dimension not less than three R^d, $d \geq 3$. By using the Feynmann-Kac formula and spherical rearrangement, Luttinger proved [10] that a ball is the maximizer of the partition function of the Dirichlet Laplacian among all domains of the same volume as the ball. The partition function and the zeta function can be related directly. Our result is an analogue of the Luttinger type inequality for the Laplace equation with the Dirichlet condition and extends our previous three dimensional result. The Newton potential can be related to the nonlocal boundary value problem of the Laplace operator, so we also prove an isoperimetric inequality for the Newton potential. The proof follows Kac's method of probabilistic potential theory.

УДК 517.956

О СПЕКТРАЛЬНЫХ ДЗЕТА-ФУНКЦИЯХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА С ГРАНИЧНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЯМ ПОТЕНЦИАЛА

Т. Ш. Кальменов, Д. Сураган

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: граничная условия потенциала, уравнение Лапласа, спектральная дзэта-функция.
Аннотация. В этой статье мы доказываем, что вещественная спектральная дзэта-функция нелокального оператора Лапласа максимизируется в шаре среди всех областей данной меры в многомерном евклидовом пространстве R^d, $d \geq 3$. Используя формулу Фейнмана-Каца и сферическую перестановку, Люттингер доказал [10], что шар является максимайзером функции разбиения оператора Лапласа с граничным условиям Дирихле среди всех областей данной меры. Функция разбиения и дзета-функция связаны прямим соотношением. Наш результат является аналогом неравенства Люттенгера для уравнения Лапласа с краевым условием Дирихле и обобщает наш предыдущий результат для трехмерного случая. Доказательство следует из метода Каца о вероятностной потенциальной теории.

1. Введение и основный результат. Пусть Ω-односвязная гладкая ограниченная область в R^d , $d \geq 3$. Рассмотрим спектральную задачу для оператора Лапласа

$$-\Delta u(x) = \lambda u(x),\ x \in \Omega, \tag{1}$$

с нелокальным граничным условием

$$-\frac{u(x)}{2}+\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\varepsilon_d(x-y)}{\partial n_y}u(y)dy-\int_{\partial\Omega}\varepsilon_d(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}dy=0,\ \ x\in\partial\Omega, \tag{2}$$

где $\frac{\partial}{\partial n_y}$ обозначает внешнюю нормальную производную на границе $\partial\Omega$,

$$\varepsilon_d(x-y)=\frac{1}{(d-2)s_d}\frac{1}{|x-y|^{d-2}},\qquad d\geq 3,$$

это фундаментальное решение оператора Лапласа, а $s_d=\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ это площадь поверхности единичной сферы в R^d и $|x-y|$ это стандартное Евклидово расстояние между x и y.

Задача (1)-(2) эквивалентна спектральной задаче для интегрального оператора [1]-[2]

$$u(x)=\lambda\int_{\Omega}\varepsilon_d(x-y)u(y)dy,\quad x\in\Omega. \tag{3}$$

Краевая задача (1)-(2) может быть также обобщена для более высокой степени оператора Лапласа [6]. Дискретность спектра интегрального оператора (3) позволяет упорядочить собственные значения (0<) $\lambda_1<\lambda_2\leq\lambda_3$ … (нумерует их значения в порядке возрастания) повторяющиеся каждый раз в соответствии с кратностью. Спектральная задача (1)-(2) имеет различные интересные свойства и приложения (смотрите [1] и [8], для примера). В частности, при помощи явного вычисления (см. [7]), можно доказать, что в единичном шаре спектр Лапласиана (1)-(2) содержит спектр соответствующего Лапласиана Дирихле.

Кац [1] доказал:

$$1=\lim_{\delta\to 0}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{1+\lambda_j\delta}u_j(y)\int_{\Omega}u_j(x)dx,\ \ y\in\Omega, \tag{4}$$

где $\lambda_j, j=1,2\ldots$ и $u_j, j=1,2\ldots$ являются собственными значениями и соответствуют нормирующим собственным функциям нелокальному Лапласиану (1)-(2). Аналитический факт (4) выражает то, что разложение 1 в ряд ортонормированных функций u_j суммируется к 1 для каждого $y\in\Omega$. Следует также отметить, что неравенства типа Березин-Ли-Яу действительны (см. [9]) для собственных значений краевой спектральной задачи (1)-(2). В [4] Кац представляет основные асимптотические формулы для собственных значений (3) в R^d, $d\geq 3$. В этой статье мы заинтересованы в применении его вероятностных методов [1]–[4] для спектральных геометрических задач (3).

Функция

$$\zeta_\Omega(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{[\lambda_j(\Omega)]^z},$$

Называется спектрально дзета-функцией, где $\lambda_j, j=1,2\ldots$ это собственные значения соответствующей спектральной задачи.

Используя формулу Фейнмана-Каца и сферическую перестановку, Люттингер доказал, что шар Ω^* является максимайзером функции разбиения Лапласиана Дирихле среди всех областей, таких как Ω^*, для всех положительных значений времени [10], т.е.

$$Z_\Omega^D(t):=\sum_{j=1}^{\infty}\exp\left(-t\lambda_i^D(\Omega)\right)\leq Z_{\Omega*}^D(t):=\sum_{j=1}^{\infty}\exp\left(-t\lambda_i^D(\Omega^*)\right),\ \ |\Omega|=|\Omega^*|,\forall t>0,$$

где $\lambda_i^D, i=1,2\ldots$ есть собственные значения Лапласиана Дирихле.

Функция разбиения и дзета-функция связаны соотношением:

$$\zeta_\Omega^D(z)=\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^{\infty}t^{z-1}Z_\Omega^D(t)dt,$$

где Γ это гамма-функция. Следовательно, из этого следует

$$\zeta_\Omega^D(z)\leq\zeta_{\Omega^*}^D(z), |\Omega|=|\Omega^*|, \tag{5}$$

где $z>{}^{d}/_{2}, \Omega\subset R^d$. Правая часть неравенства дает точную верхнюю грань спектральной дзэта-функции. И может быть точно подсчитана, когда z натуральное число.

Пример 1. Пусть U - единичная пластина, тогда

$$\zeta_U^D(2) = 0.0493 \dots$$

Следовательно, из (5) мы имеем

$$\zeta_U^D(2) \leq 0.0493 \dots, |\Omega| = |U|.$$

Это неравенство лучше чем неравенство представленное в [11]

$$\zeta_U^D(z) \leq \frac{\Gamma\left(z-\frac{d}{2}\right)Vol|\Omega|^{\frac{2x}{d}}}{\Gamma(z) \quad (4\pi)^{\frac{d}{2}}}, z > \frac{d}{2}, \tag{6}$$

Из которого следует

$$\zeta_U^D(2) \leq 0.7853 \dots,$$

когда $|\Omega| = |U|$. Однако, важно отметить что в (6) z это произвольное действительное число, большее чем $\frac{d}{2}$.

Условие $z > \frac{d}{2}$ в (5) необходимо для абсолютной сходимости рядов [12], но в случае $z \leq \frac{d}{2}$ можно использовать процесс регуляризации, чтобы получить абсолютную сходимость рядов.

Пример 2. В $\Omega \subset R^2$, сумма

$$\zeta_\Omega^D(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^D(\Omega)} = \infty, \Omega \subset R^2.$$

Однако, используя следующую регуляризацию мы находим, что $U \equiv \Omega \subset R^2$ это единичная пластина, тогда

$$\tilde{\zeta}_\Omega^D(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k^D(U)} - \frac{1}{4k}\right) = -0.3557 \dots,$$

-урегуляризированная $\zeta_\Omega^D(1)$.

В [7] мы точно вычислили собственные значения спектральной задачи (1)-(2) в шаре. Итак мы получили аналогию неравенства (5) для нелокального оператора Лапласа (1)-(2), т.е. основной результат этого раздела это

Теорема 1.1. *Пусть* $\Omega \subset R^d, d \geq 3$ *есть открытая ограниченная область. Для любого* $\rho \in R, \rho > \frac{d}{2}$

$$\zeta_\Omega(\rho) \leq \zeta_{\Omega^*}(\rho), \tag{7}$$

где ζ_Ω *- это спектральная дзэта-функция нелокального оператора Лапласа (1.1)-(1.2) и* Ω^* *- это такой шар, что* $|\Omega^*| = |\Omega|$.

2. Предварительные замечания. Пусть Ω ограниченное измеримое множество в R^d. Его симметрическая перестановка Ω^* - открытый шар с центром в нуле и мерой, равной мере Ω, т.е. $|\Omega^*| = |\Omega|$. Пусть u неотрицательная измеримая функция, стремящаяся к бесконечности, в том смысле, что все ее подмножества, состоящие из положительных значений имеют конечную меру.

В определении симметрической убывающей перестановки u может быть использовано разложение layer-cake [13], которое выражает неотрицательную функцию u

$$u(x) = \int_0^\infty X\{u(x) > t\}dt \tag{8}$$

где X – характеристическая функция соответствующей области.

Определение 2.1. Функция

$$u^*(x) = \int_0^\infty X\{u(x) > t\}^* dt$$

называется symmetric decreasing rearrangement неотрицательной измеримой функции u.

Лемма 2.2. [13] Для каждой неотрицательной измеримой функции $u \in L^2(\Omega)$ имеем

$$||u||_{L^2(\Omega)} = ||u^*||_{L^2(\Omega)}$$

Пусть $x(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_d(t))$ – d-мерное Броуновское движение, т.е. $\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_d(t)$ - независимый Виенровский процесс (смотрите [5] или более позднюю книгу [15]. По определению

$$Prob\{y + x(\tau)\epsilon\Omega\} = \int_\Omega (2\pi\tau)^{-d/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\tau^{-1}|x-y|^2\right)dx \tag{9}$$

где $Prob\{y + x(\tau)\epsilon\Omega\}$ означает вероятность нахождения $y + x(\tau)$ в $\Omega\epsilon R^d$ во время τ.

Лемма 2.3. Пусть Ω – ограниченное измеримое множество в R^d, $d \geq 3$ и Ω^* - его симметрическая перестановка. Для любого $\tau > 0$

$$\int_\Omega Prob\{y + x(\tau) \in \Omega\}\mathrm{dy} \leq \int_{\Omega^*} Prob\{y + x(\tau) \in \Omega^*\}dy$$

Геометрически, это означает, что Броуновские частицы, выходящие из Ω чаще покидают Ω, чем те, которые выходят из шара Ω^* с таким же объемом как у Ω.

Доказательство. Вернемся к неравенству Рица [13]

$$\int_{R^d}\int_{R^d} f(y)g(x-y)h(y)dydx \leq \int_{R^d}\int_{R^d} f^*(y)g^*(x-y)h^*(y)dydx \tag{10}$$

Где f^*, g^*, h^* симметрические убывающие перестановки положительно измеримых функций f, g, h соответственно. Теперь обратим внимание, что для $\tau > 0$ функция $\exp\left(-\frac{1}{2}\tau^{-1}|x|^2\right)$ симметрическая строго-убывающая функция, т.е. не меняет свою формулу при перестановке, получим

$$\int_\Omega Prob\{y + x(\tau) \in \Omega\}\mathrm{dy} = \int_\Omega\int_\Omega (2\pi\tau)^{-\frac{d}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\tau^{-1}|x-y|^2\right)dxdy$$
$$= \int_{R^d}\int_{R^d} X_\Omega(\mathrm{x})(2\pi\tau)^{-\frac{d}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\tau^{-1}|x-y|^2\right)X_\Omega(\mathrm{y})\,dxdy$$
$$\leq \int_{R^d}\int_{R^d} X_{\Omega^*}(\mathrm{x})(2\pi\tau)^{-\frac{d}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\tau^{-1}|x-y|^2\right)X_{\Omega^*}(\mathrm{y})\mathrm{dxdy}$$
$$= \int_{\Omega^*}\int_{\Omega^*} (2\pi\tau)^{-\frac{d}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\tau^{-1}|x-y|^2\right)dxdy =$$
$$= \int_{\Omega^*} Prob\{y + x(\tau) \in \Omega^*\}dy$$

где $X_\Omega(\mathrm{x})$ – характеристическая функция Ω, т.е. $X_\Omega(\mathrm{x}) = 1$ если $x \in \Omega$, $X_\Omega(\mathrm{x}) = 0$ если $x \in R^d\backslash\Omega$.

Вычислим математическое ожидание (Винеровский интеграл) для $A \subset \Omega \subset R^d$, $d \geq 3$

$$E\{\int_0^\infty X_A\big(y + x(\tau)\big)d\tau\} = \int_0^\infty E\{X_A\big(y + x(\tau)\big)\}d\tau$$
$$= \int_0^\infty P\{y + x(\tau) \in A\}d\tau = \int_0^\infty\int_A \frac{1}{(2\pi\tau)^{\frac{d}{2}}}exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{2\tau}\right\}dxd\tau$$
$$= \int_A\int_0^\infty \frac{1}{(2\pi\tau)^{\frac{d}{2}}}exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{2\tau}\right\}d\tau dx = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)}{2\pi^{\frac{d}{2}}}\int_A \frac{1}{|y-x|^{d-2}}dx$$
$$= \int_A \bar{\varepsilon}_d(y-x)dx = \sum_{j=1}^\infty \bar{\lambda}\int_A u_j(x)dx\,u_j(y)$$

где $\bar{\varepsilon}_d = 2\varepsilon_d$, $\bar{\lambda}_j$, $j = 1, 2, \dots$ - собственные значения (3) и $u_j, j = 1, 2, \dots$ - соответствующие нормализующие собственные функции. Таким же образом вычисляем

$$E\left\{\int_0^{\infty}\int_0^{t} X_\Omega(y+x(\tau))\,d\tau X_A(y+x(\tau))dt\right\}$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{t} E\{X_\Omega(y+x(\tau))X_A(y+x(\tau))\}d\tau dt=\int\int_{0\le\tau_1\le\tau_2<\infty} E\{X_\Omega(y+x(\tau_1))\,X_A(y$$

$$+x(\tau_2))\}d\tau_1 d\tau_2=\int\int_{0\le\tau_1\le\tau_2<\infty} P\{y+x(\tau_1)\in\Omega, y+x(\tau_2)\in A\}d\tau_1 d\tau_2$$

$$=\int\int_{0\le\tau_1\le\tau_2<\infty}\int_A\int_\Omega P(y|\,x_1;\tau_1)P(x_1|x_2;\tau_2-\tau_1)dx_1dx_2d\tau_1d\tau_2$$

$$=\int_A\int_\Omega \bar{\varepsilon}_d(x_1-y)\,\bar{\varepsilon}_d(x_2-x_1)dx_1dx_2=\sum_{j=1}^{\infty}\bar{\lambda}_j^2\int_A u_j\,(x)dxu_j(y).$$

Также для каждого неотрицательного целого k и любого $y\in\Omega$ имеем

$$E\left\{\int_0^{\infty}(\int_0^{t} X_\Omega(y+x(\tau))d\tau)^k X_A(y+x(t))dt\right\}=\sum_{j=1}^{\infty}\bar{\lambda}_j^{k+1}\,k!\int_A u_j\,(x)dxu_j(y). \qquad (11)$$

Отсюда следует, что

Лемма 2.4. Пусть $A\subset\Omega\subset R^d, d\ge 3$. Для любого $y\in\Omega$ и остаточно маленького $\mu>0$ имеем

$$\int_0^{\infty}E\left\{\exp\left(-\mu\int_0^{t} X_\Omega(y+x(\tau))\right)X_A(y+x(t))\right\}dt=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\bar{\lambda}_j}{1+\mu\bar{\lambda}_j}\int_A u_j\,(x)dxu_j(y) \qquad (12)$$

Доказательство. Разлагая обе части (12) в ряд Тейлора относительно $\mu<<1$ и используя (11) мы легко увидим, что (12) выполняется.

Лемма 2.5. Для любого $\beta>0$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\exp\,(-\frac{\beta}{\bar{\lambda}_j})\bar{\lambda}_j=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_\Omega\int_0^{\infty}\frac{1}{t^{\frac{d}{2}}}Prob\{\int_o^{t} X_\Omega(y+x(\beta\eta))d\eta>1|x(t)=0\}dtdy \qquad (13)$$

Доказательство. Инвертируя (12) относительно μ, получаем

$$\int_0^{\infty}Prob\{\int_o^{t} X_\Omega(y+x(\tau))d\tau>\beta;\ y+x(\tau)\in A\}dt=\sum_{j=1}^{\infty}\exp\,(-\frac{\beta}{\bar{\lambda}_j})\bar{\lambda}_j\int_A u_j\,(x)dxu_j(y), y\in\Omega$$

Пусть теперь A – d-шар, радиуса r и с центром в y: разделим обе части на объем A при $r\to 0$, получаем

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_0^{\infty}\frac{1}{t^{\frac{d}{2}}}Prob\{\int_0^{t} X_\Omega(y+x(\tau))d\tau>\beta|x(t)=0\}dt=\sum_{j=1}^{\infty}\exp\,(-\frac{\beta}{\bar{\lambda}_j})\bar{\lambda}_j u_j^2(y) \qquad (14)$$

Здесь мы воспользовались

$$Prob\{\int_0^{t} X_\Omega(y+x(\tau))d\tau>\beta|x(t)=0\}=\lim_{r\to\infty}\frac{Prob\{\int_0^{t} X_\Omega(y+x(\tau))d\tau>\beta|y+x(t)\in A\}}{Prob\{y+x(t)\in A\}}$$

и

$$\lim_{r\to\infty}\frac{Prob\{y+x(t)\in A\}}{|A|}=\frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}}$$

Интегрируя (14) по Ω в соответствии с y мы получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty}\exp\,(-\frac{\beta}{\bar{\lambda}_j})\bar{\lambda}_j=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_\Omega\int_0^{\infty}\frac{1}{t^{\frac{d}{2}}}Prob\{\int_0^{t} X_\Omega(y+x(\tau))d\tau>\beta|x(t)=0\}dtdy$$

Если мы сейчас положим $\tau=\beta\eta$ то мы получим (13).

3. Доказательство Теоремы 1.1. Перепишем (13) в эквивалентную форму

$$\frac{1}{2(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_\Omega\int_0^{\infty}\frac{1}{t^{\frac{d}{2}}}Prob\left(\int_0^{t}\chi_\Omega(y+x(2\beta\eta))d\eta>1|x(t)=0\right)dtdy=$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\exp\left(-\beta\lambda_j(\Omega)\right)\frac{1}{\lambda_j(\Omega)}, \forall\beta>0,\ \forall y\in\Omega, \qquad (15)$$

где $\lambda_j(\Omega), j = 1,2 \ldots$ и $u_j, j = 1,2 \ldots$ являются собственными значениями и соответствующими нормирующими собственными функциями нелокального оператора Лапласа (1)-(2) в Ω и $\chi_\Omega(x)$ это характеристическая функция Ω, т.е. $\chi_\Omega(x) = 1$ при $x \in \Omega, \chi_\Omega(x) = 0$ при $x \in R^d\backslash\Omega$.

По Лемме 2.3 (см. [1]) мы имеем

$$\int_\Omega Prob\left(\int_0^t \chi_\Omega(y + x(2\beta\eta))d\eta > 1|x(t) = 0\right)dy \leq$$

$$\int_{\Omega^*} Prob\left(\int_0^t \chi_{\Omega^*}(y + x(2\beta\eta))d\eta > 1|x(t) = 0\right)dy$$

для любого $\beta > 0$.

Поэтому, из (15) получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \exp\left(-\beta\lambda_j(\Omega)\right)\frac{1}{\lambda_j(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \exp\left(-\beta\lambda_j(\Omega^*)\right)\frac{1}{\lambda_j(\Omega^*)} \tag{16}$$

для любого $\beta > 0$.

Применяя преобразования Меллина

$$\frac{1}{\lambda^l} = \frac{1}{\Gamma(l)}\int_0^\infty \exp\,(-\beta\lambda)\beta^{l-1}\,d\beta$$

к неравенству (16), получаем

$$\zeta_\Omega\,(\rho) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j^\rho(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j^\rho(\Omega^*)} = \zeta_{\Omega^*}(\rho) \tag{17}$$

для любого $\rho > d/2$. Это завершает Теорему 1.1.

Замечание 3.1. Доказательство Теоремы 1.1. гораздо проще когда p – натуральное число. Действительно,

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j^\rho(\Omega)} = \int_\Omega \ldots\int_\Omega \varepsilon_d(y_1 - y_2)\ldots\varepsilon_d(y_p - y_1)dy_1\ldots y_p, \tag{18}$$

$$p \in N,\ \ p > \frac{d}{2}.$$

Из неравенства Браскампа-Либа-Люттингера следует, что

$$\int_\Omega \ldots\int_\Omega \varepsilon_d(y_1 - y_2)\ldots\varepsilon_d(y_p - y_1)dy_1\ldots y_p \leq$$

$$\int_{\Omega^*}\ldots\int_{\Omega^*}\varepsilon_d(y_1 - y_2)\ldots\varepsilon_d(y_p - y_1)dy_1\ldots y_p, \tag{19}$$

что доказывает

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j^\rho(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j^\rho(\Omega^*)},\qquad p \in N,\ \ p > \frac{d}{2}, \tag{20}$$

где Ω^* - шар и $|\Omega^*| = |\Omega|$.

Благодарности. *Авторы выражают благодарность профессору А. Лаптеву, факультет математики, Имперский колледж Лондона за его полезные советы.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kac M. On some connections between probability theory and differential and integral equations // Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, – 1951, – P. 189-215.

[2] Kac M. An application of probability theory to the study of Laplaces equation // Ann. Soc. Polon. Math., – 1953, – N 25, – P. 122-130.

[3] Kac M. Integration in function spaces and some of its applications. – 1980. – PISA.

[4] Kac M. Distribution of eigenvalues of certain integral operators // Mich. Math. J., – 1955, – No 3, – P. 141-148.

[5] Kalmenov T. Sh., Suragan D. On spectral zeta functions for a nonlocal boundary value problem of the Laplacian // AIP Conference Proceedings, – 2013, – Vol. 1611, – P. 19-24.

[6] Kalmenov T. Sh., Suragan D. Boundary conditions for the volume potential for the polyharmonic equation // Differential Equations, – 2012. – No 48, – P. 604-608.

[7] Kalmenov T. Sh., Suragan D. To spectral problems for the volume potential // Doklady Mathematics, – 2009. – No 80, – P. 646-649.

[8] Saito N. Data analysis and representation on a general domain using eigenfunctions of Laplacian // Appl. Comput. Harmon. Anal. , – 2008, –No 25, – P. 68-97.

[9] Laptev A. Dirirchlet and Neumann eigenvalue problems on domains in Euclidean spaces // Journal of Functional Analysis, – 1997,–No 151, – P. 531-545.

[10] Luttinger J. M. Generalized isoperimetric inequalities // J. Math. Phys., – 1973,–No 14, – P. 586-593.

[11] Harrell E. M., Hermib L. Differential inequalities for Riesz means and Weyl-type bounds for eigenvalues // Journal of Functional Analysis, – 2008, –No 254, – P. 3173-3191.

[12] Eskin G. Lectures on Linear Partial Differential Equations. – 2011. – Amer. Math. Soc.

[13] Lieb E., Loss M. Analysis, 2nd ed. – 2001. – Amer. Math. Soc.

[14] Henrot A. Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators. – 2006. – Birkhauser, Basel.

[15] Vladimirov V. S. Equations of mathematical physics, 2nd ed. – 1983. – Mir Publishers, Moscow.

REFERENCES

[1] Kac M. *On some connections between probability theory and differential and integral equations*, Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1951, 189-215.

[2] Kac M. *An application of probability theory to the study of Laplaces equation*, Ann. Soc. Polon. Math., – 1953, 25, 122-130.

[3] Kac M. Integration in function spaces and some of its applications. 1980. PISA.

[4] Kac M. *Distribution of eigenvalues of certain integral operators*, Mich. Math. J., 1955, 3, 141-148.

[5] Kalmenov T. Sh., Suragan D. *On spectral zeta functions for a nonlocal boundary value problem of the Laplacian*, AIP Conference Proceedings, 2013, 1611, 19-24.

[6] Kalmenov T. Sh., Suragan D. *Boundary conditions for the volume potential for the polyharmonic equation,* Differential Equations, – 2012. 48, 604-608.

[7] Kalmenov T. Sh., Suragan D. *To spectral problems for the volume potential*, Doklady Mathematics, 2009. 80, 646-649.

[8] Saito N. *Data analysis and representation on a general domain using eigenfunctions of Laplacian*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 2008, 25, 68-97.

[9] Laptev A. *Dirirchlet and Neumann eigenvalue problems on domains in Euclidean spaces*, Journal of Functional Analysis, 1997, 151, 531-545.

[10] Luttinger J. M. *Generalized isoperimetric inequalities*, J. Math. Phys., 1973, 14, 586-593.

[11] Harrell E. M., Hermib L. *Differential inequalities for Riesz means and Weyl-type bounds for eigenvalues*, Journal of Functional Analysis, 2008, 254, 3173-3191.

[12] Eskin G. Lectures on Linear Partial Differential Equations. 2011. Amer. Math. Soc.

[13] Lieb E., Loss M. Analysis, 2nd ed., 2001. Amer. Math. Soc.

[14] Henrot A. Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators. 2006. Birkhauser, Basel.

[15] Vladimirov V. S. Equations of mathematical physics, 2nd ed., 1983. Mir Publishers, Moscow.

ПОТЕНЦИАЛДЫҢ ИНТЕГРАЛДЫҚ ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТТЫ ЛАПЛАС ТЕҢДЕУІ ҮШІН СПЕКТРАЛДЫҚ ЗЕТА ФУНКЦИЯЛАР ЖАЙЫНДА

Т. Ш. Кәлменов, Д. Сұраған

ҚР БҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: потенциалдың шекаралық шарты, Лаплас теңдеу, спектралдық зета функциясы.

Аннотация. Жұмыста локалды емес Лаплас операторы үшін нақты мәнді спектралдық зета функциясын көп өлшемді евклиддік R^d, $d \geq 3$ кеңістігіндегі өлшемі бірдей обылыстардың ішінде шар максималдайтындығын дәлелдейміз. Бұл нәтиже негізінде Дирихле шекаралық шартымен Лаплас теңдеуіне арналған Люттингер теңсіздігінің баламасы болып табылады және біздің бұрынғы үш өлшемді жағдайда алынған нәтижемізді жалпылайды. Дәлелдеу Кацдың потенциалдық ықтималдық теориясынан туындайды.

Поступила 07.07.2015 г.