N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 5, Number 297 (2014), 7 – 11

THE WELL-POSEDNESS OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR DEGENERATE MULTI-DIMENSIONAL HYPERBOLIC-PARABOLIC EGUATION

S. A. Aldashev

Abai kazakh national pedagogical university, Almaty, Kazakstan

Key words: well-posedness, problem, function, eguation, criterion.
Abstract. We show the unique solvability to Dirichletproblem in the cylindrical domain for degenerate multi-dimensional hyperbolic-parabolic eguation. We also obtain the criterion for the unique solvability of the problem.

УДК 517.956

КОРРЕКНОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ МНОГОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С. А. Алдашев

Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: корректность, задача, функция, уравнение, критерия.
Аннотация. В работе показано, что задача Дирихле в цилиндрической области для модельного вырождающегося многомерного гиперболо-параболического уравнения однозначно разрешима. Получена также критерий единственности регулярного решения.

Теория краевых задач для вырождающихся гиперболо-параболических уравнений на плоскости хорошо изучены [1], а их многомерные аналоги насколько известно автору, исследованы мало [2].

Задача Дирихле для этих уравнении еще не рассмотрены.

В работе показано,что задача Дирихле в цилиндрической области для модельного вырождающегося многомерного гиперболо-параболического уравнения однозначно разрешима,получен также критерий единственности регулярного решения.

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ – цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \ldots, x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ – длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m, t)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через Γ_α, Γ_β – части поверхности Γ, лежащие и полупространтствах $t > 0$ и $t < 0$; σ_α – верхнее, а σ_β – нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S -общая часть границ областей Ω_α, Ω_β представляющее множество $\{t = 0, 0 < |x| < 1\}$ в E_m .

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим вырождающееся смешанно гиперболо-параболическое уравнение

$$0 = \begin{cases} t^q \Delta_x u - u_t, t > 0, \\ |t|^p \Delta_x u - u_{tt}, t < 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где p, q = const, $p > 0$, $q \geq 0$, Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m$, $m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, t, r \geq 0, 0 \leq \theta_1 < 2\pi, 0 \leq \theta_i \leq \pi, i = 2,3, \ldots, m-1, \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$.

В качестве многомерной задачи Дирихле рассмотрим следующую задачу

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\bar{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{\sigma_\alpha} = \varphi_1(r, \theta), \quad u|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t, \theta), \tag{2}$$

$$u|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(r, \theta), u|_{\sigma_\beta} = \varphi_2(r, \theta). \tag{3}$$

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!\, n!\, k_n = (n+m-3)!\,(2n+m-2), W_2^l(S), l = 0,1, \ldots$ — пространства Соболева.

Имеет место ([3])

Лемма 1. Пусть $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$. Если $l \geq m-1$, то ряд

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{4}$$

а также ряды,полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того, чтобы $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} \left|f_n^k(r)\right|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = const.$$

Через $\bar{\varphi}_{1n}^k(r), \psi_{1n}^k(t)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (4), соответственно функций $\varphi_1(r, \theta), \psi_1(t, \theta)$.

Тогда справедливы

Теорема 1. Если $\varphi_1(r, \theta), \varphi_2(r, \theta) \in W_2^l(S), \psi_1(t, \theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha), \psi_2(t, \theta) \in W_2^l(\Gamma_\beta), l > \frac{3m}{2}$ и

$$\cos\mu_{s,n}\beta' \neq 0, s = 1,2, \ldots, \tag{5}$$

то задача 1 однозначно разрешима, где $\mu_{s,n}$ – положительные нули функций Бесселя первого рода $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z), \beta' = \frac{-2}{2+p}|\beta|^{\frac{(2+p)}{2}}$.

Теорема 2. Решение задачи 1 единственна, тогда и только тогда , когда выполняется условие (5).

Доказательство теоремы. В сферических координатах уравнения (1) в области Ω_α имеет вид

$$t^q\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u\right) - u_t = 0, \tag{6}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right), g_1 = 1, g_j = (\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{j-1})^2, j > 1.$$

Известно ([3]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0,1,\ldots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Так как искомое решение задачи 1 в области Ω_α принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$, то его можно искать в виде

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{7}$$

где $\bar{u}_n^k(r, t)$ – функции, подлежащие определению.

Подставляя (7) в (6), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^{k}(\theta)$ ([3]), будем иметь

$$t^q\left(\bar{u}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\right)-\bar{u}_{nt}^k=0\,,k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots, \tag{8}$$

при этом краевое условие (2), с учетом леммы 1, соответсвенно запишется в виде

$$\bar{u}_n^k(r,\alpha)=\bar{\varphi}_{1n}^k(r),\ \ \bar{u}_n^k(1,t)=\psi_{1n}^k(t)\,,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots, \tag{9}$$

В (8) , (9) произведя замену $\bar{v}_n^k(r,t)=\bar{u}_n^k(r,t)-\psi_{1n}^k(t)$ получим

$$t^q\left(\bar{v}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{v}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{v}_n^k\right)-\bar{v}_{nt}^k=\bar{f}_n^k(r,t), \tag{10}$$

$$\bar{v}_n^k(r,\alpha)=\varphi_{1n}^k(r),\ \bar{v}_n^k(1,t)=0\,,k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots, \tag{11}$$

$$\bar{f}_n^k(r,t)=\psi_{1nt}^k+\frac{\lambda_n t^q}{r^2}\psi_{1n}^k\,,\varphi_{1n}^k(r)=\bar{\varphi}_{1n}^k(r)-\psi_{1n}^k(\alpha).$$

Произведя замену $\bar{v}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}v_n^k(r,t)$ задачу (10),(11) приведем к следующей задаче

$$Lv_n^k\equiv t^q\left(v_{nrr}^k+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}v_n^k\right)-v_{nt}^k=f_n^k(r,t)\,, \tag{12}$$

$$v_n^k(r,\alpha)=\tilde{\varphi}_{1n}^k(r),\ \ v_n^k(1,t)=0\,, \tag{13}$$

$$\bar{\lambda}_n=\frac{((m-1)(3-m)-4\lambda_n)}{4},\ \ f_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}\bar{f}_n^k(r,t),\tilde{\varphi}_{1n}^k(r)=r^{\frac{(1-m)}{2}}\varphi_{1n}^k(r).$$

Решение задачи (12) , (13) ищем в виде $v_n^k(r,t)=v_{1n}^k(r,t)+v_{2n}^k(r,t)\,,$ где $v_{1n}^k(r,t)-$ решение задачи

$$Lv_{1n}^k=f_n^k(r,t), \tag{14}$$

$$v_{1n}^k(r,\alpha)=0,\ \ v_{1n}^k(r,t)=0, \tag{15}$$

а $v_{2n}^k(r,t)-$ решение задачи

$$Lv_{2n}^k=0, \tag{16}$$

$$v_{2n}^k(r,\alpha)=\tilde{\varphi}_{1n}^k(r),\ \ v_{2n}^k(r,t)=0. \tag{17}$$

Решение выше указанных задач, аналогично [4] рассмотрим в виде

$$v_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}R_s(r)T_s(t), \tag{18}$$

при этом пусть

$$f_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{s,n}(t)R_s(r),\quad \tilde{\varphi}_{1n}^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{s,n}R_s(r). \tag{19}$$

Подставляя (18) в (14) , (15) , с учетом (19) , получим

$$R_{srr}+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}R_s+\mu R_s=0,\ 0<r<1, \tag{20}$$

$$R_s(1)=0\,,|R_s(0)|<\infty\,, \tag{21}$$

$$T_{st}+\mu t^q T_s(t)=-a_{s,n}(t)\,,\ \ 0<t<\alpha, \tag{22}$$

$$T_s(\alpha)=0. \tag{23}$$

Ограниченным решением задачи (20), (21) является ([5])

$$R_s(r)=\sqrt{r}J_v\left(\mu_{s,n}r\right), \tag{24}$$

где $v=\frac{n+(m-2)}{2}\,,\mu=\mu_{s,n}^2.$

Решением задачи (22), (23) является

$$T_{s,n}(t) = \left(exp\left(-\mu_{s,n}^2 \frac{t^{q+1}}{q+1}\right)\right)\int_t^\alpha a_{s,n}(\xi)\left(exp\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}\xi^{q+1}\right)d\xi. \quad (25)$$

Подставляя (24) в (19) получим

$$r^{-\frac{1}{2}} f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t) J_v(\mu_{s,n} r), \;\; r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} J_v(\mu_{s,n} r), 0 < r < 1. \quad (26)$$

Ряды (26) – разложения в ряды Фурье-Бесселя ([6]), если

$$a_{s,n}(t) = 2\left[J_{v+1}(\mu_{s,n})\right]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi}\, f_n^k(\xi,t) J_v(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \quad (27)$$

$$b_{s,n} = 2\left[J_{v+1}(\mu_{s,n})\right]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi}\, \tilde{\varphi}_{1n}^k(\xi) J_v(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \quad (28)$$

$\mu_{s,n}, s = 1,2,\ldots -$положительные нули функций Бесселя $J_v(z)$ расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (18), (24), (25) получим решение задачи (14), (15) в виде

$$v_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_v(\mu_{s,n} r), \quad (29)$$

где $a_{s,n}(t)$ определяется из (27).

Далее, подставляя (18) в (16), (17), с учетом (19), будем иметь задачу

$$T_{st} + \mu_{s,n}^2 t^q T_s = 0, \;\; 0 < t < \alpha, T_s(\alpha) = b_{s,n},$$

решение которого является

$$T_{s,n}(t) = b_{s,n} \exp\left(\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}(\alpha^{q+1} - t^{q+1})\right). \quad (30)$$

Из (24), (30) получим

$$v_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}\sqrt{r} \exp\left(\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}(\alpha^{q+1} - t^{q+1})\right) J_v(\mu_{s,n} r), \quad (31)$$

где $b_{s,n}$ находиться из (28).

Следовательно, единственным решением задачи (1), (2) в области Ω_α является функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \{\psi_{1n}^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}}\left[v_{1n}^k(r,t) + v_{2n}^k(r,t)\right]\} Y_{n,m}^k(\theta), \quad (32)$$

где $v_{1n}^k(r,t)$, $v_{2n}^k(r,t)$ определяются из (29), (31).

Учитывая формулу ([6]) $2J_v'(z) = J_{v-1}(z) - J_{v+1}(z)$, оценки ([4,3])

$$J_v(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right), v \geq 0,$$

$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2}, \left|\frac{\partial^l}{\partial \theta_j^l} Y_{n,m}^k(\theta)\right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+l}, j = \overline{1, m-1}, l = 0,1,\ldots,$$

а также леммы, ограничения на заданные функции $\psi_1(t,\theta), \varphi_1(r,\theta)$, как в [7], можно доказать, что полученное решение (32) принадлежит классу $C(\overline{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$.

Далее,из (29), (31),(32) $t \to +0$ при имеем

$$u(r,\theta,0) = \tau(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \tau_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta),$$

$$\tau_n^k(r) = \psi_{1n}^k(0) + \sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{(2-m)}{2}} \left[\int_0^{\alpha} a_{s,n}(\xi) \left(exp\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}\xi^{q+1}\right) d\xi + b_{s,n}\left(exp\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}\alpha^{q+1}\right)\right] J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r). \quad (33)$$

Из (27) – (31), а также из лемм вытекает, что $\tau(r,\theta) \in W_2^l(S), l > \frac{3m}{2}$.

Таким образом, учитывая краевые условия (3) и (33), в области Ω_β приходим к задаче Дирихле для многомерного уравнения Геллерстедта

$$|t|^p \Delta_x u - u_{tt} = 0 \quad (34)$$

с данными

$$u|_S = \tau(r,\theta),\ u|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta), u|_{\sigma_\beta} = \varphi_2(r,\theta). \quad (35)$$

В [8] доказана следующая теорема

Теорема 3. Если $\tau(r,\theta), \varphi_2(r,\theta) \in W_2^l(S),\ \psi_2(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\beta),\ l > \frac{3m}{2}$ и выполняется соотношение (5), то задача (34), (35) в классе $C(\overline{\Omega}_\beta) \cap C^2(\Omega_\beta)$ однозначно разрешима.

Теорема 4. Решение задачи (34),(35) единственна, если и только,если имеет место условие (5).

Далее, используя теорему 3,4 получим справедливость теоремы 1 и 2.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнения в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.
[2] Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. – Новосибирск: НГУ, 1983. – 84 с.
[3] Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.
[4] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
[5] Камкэ Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965. – 703 с.
[6] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – Т. 2. – М.: Наука, 1974. – 297 с.
[7] Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. – Алматы: Ғылым, 1994. – 170 с.
[8] Алдашев С. А. Корректность задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Геллерстедта // Укр. матем. журнал. – 2012. – Т. 64, № 3. – С. 3-9.

REFERENCES

[1] Nahushev A.M. Zadachi so smeshheniem dlja uravnenija v chastnyh proizvodnyh. M.: Nauka, 2006. 287 s.
[2] Vragov V.N. Kraevye zadachi dlja neklassicheskih uravnenij matematicheskoj fiziki. Novosobirsk: NGU, 1983. 84 s.
[3] Mihlin S.G. Mnogomernye singuljarnye integraly i integral'nye uravnenija. M.: Fizmatgiz, 1962. 254 s.
[4] Tihonov A.N., Samarskij A.A. Uravnenija matematicheskoj fiziki. M.: Nauka, 1966. 724 s.
[5] Kamkje Je. Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravnenijam. M.: Nauka, 1965. 703 s.
[6] Bejtmen G., Jerdeji A. Vysshie transcendentnye funkcii. T. 2. M.: Nauka, 1974. 297 s.
[7] Aldashev S.A. Kraevye zadachi dlja mnogomernyh giperbolicheskih i smeshannyh uravnenij. Almaty: Fylym, 1994. 170 s.
[8] Aldashev S. A. Korrektnost' zadachi Dirihle i Puankare v cilindricheskoj oblasti dlja mnogomernogo uravnenija Gellerstedta. Ukr. matem. zhurnal. 2012. T. 64, N 3. C. 3-9.

КӨП ӨЛШЕМДІ АЗҒЫНДАЛҒАН ГИПЕРБОЛА-ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУГЕ ДИРИХЛЕ ЕСЕБІНІҢ КОРРЕКТІЛІГІ

С. А. Алдашев

Абай атындағы қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: корректность, задача, функция, уравнение, критерия.

Аннотация. Жұмыста көп өлшемді азғындалған гипербола-параболалық теңдеуге Дирихле есебінің бір мәнділігі дәлелденген. Және де регулярлық шешімнің жалғыздық критериясы алынған.

Поступила 01.10.2014 г.