N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 5, Number 297 (2014), 60 – 63

MODEL OF TORSIONAL VIBRATIONS OF THE RUBBER–SHAFT ON THE BASIS OF BARTENEV-HAZANOVICH POTENTIAL

L. Khajiyeva, S. Abdrakhman, A. Rakhimzhanova

Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Kazakhstan

Key words: dynamics, nonlinearity, damping, potential, torsional fluctuations.

Abstract. Dynamics of rotating rod elements of mechanisms and machines from physically nonlinear material is considered. The rod material is characterised by Bartenev-Hazanovich elastic potential. The deformation characteristic is the corner of torsion of one section concerning of a another section. For a considered case the hypothesis of flat sections is accepted. The dynamic model of torsion of a rod element is constructed. The received model has nonlinear character. It is caused by physically nonlinear properties of a material and finiteness of its deformations.

УДК 539.3:621.01

МОДЕЛЬ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ РЕЗИНОКОРДНОГО ВАЛА НА ОСНОВЕ ПОТЕНЦИАЛА БАРТЕНЕВА-ХАЗАНОВИЧА

Л. А. Хаджиева, С. Н. Абдрахман, А. Ж. Рахимжанова

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: динамика, нелинейность, демпфирование, потенциал, крутильные колебания.

Аннотация. В работе рассматривается динамика вращающихся стержневых элементов механизмов и машин из физически нелинейного материала. Свойства материала стержня задаются упругим потенциалом Бартенева-Хазановича. В рассматриваемом случае характеристикой деформирования является угол кручения одного сечения вала относительно другого. В данном случае принимается гипотеза плоских сечений. Построена динамическая модель крутильных колебаний вала. Полученная модель имеет нелинейный характер. Это вызвано физически нелинейными свойствами материала вала и конечностью его деформаций.

Известно, что высокомолекулярные материалы типа пластмасс и резины характеризуются большим внутренним трением. Установлено, что для наполненных резин величина относительного гистерезиса превышает аналогичную величину для сталей более чем в 100 раз. Поэтому резина, как конструкционный материал, находит широкое применение в технике. В силу своих особенностей резина применяется в качестве демпферов и поглотителей колебаний, применяется в муфтах, соединяющих наиболее перегруженные элементы кинематической цепи машин, в целях гашения возникающих в них нежелательных колебательных процессов.

Резина и подобные материалы относятся к физически нелинейным средам, работа которых далека от принятых в большинстве традиционных расчетных схем моделей линейного деформирования. Поэтому для их моделирования необходимо привлекать общую теорию больших упругих деформаций с физическим законом, отражающим основные свойства материала, и математический аппарат для выведения из этого закона отдельных следствий, необходимых для решения технических задач. Таким законом является зависимость между тензором напряжений и тензором деформаций – упругий потенциал.

В работе рассматривается динамика вращающихся стержневых элементов механизмов и машин из физически нелинейного материала, свойства которого задаются упругим потенциалом Бартенева-Хазановича [1]:

$$W = 2G(\lambda_1 + \lambda_1 + \lambda_1 - 3), \tag{1}$$

где λ_1, λ_2, λ_3 – относительное удлинение единичного элемента среды в трех главных направлениях деформации, G – модуль сдвига. Указанный потенциал описывает поведение упругого, несжимаемого, изотропного тела.

Используя условия изотропности и несжимаемости резины при конечных деформациях $\lambda_1\lambda_1\lambda_1 = 1$, представим упругий потенциал (1) в главных компонентах тензора деформации ε_I (i = 1,2,3):

$$W = 2G\left(\sqrt{1+2\varepsilon_1} + \sqrt{1+2\varepsilon_3} + \frac{1}{\sqrt{1+2(\varepsilon_1+\varepsilon_3+2\varepsilon_1\varepsilon_3)}}\right). \tag{2}$$

Для удобства моделирования в (2) осуществляется переход к главным компонентам деформации $\varepsilon_{xx},..\varepsilon_{zz}$ через следующие соотношения [2]:

$$\varepsilon_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{e}\sin\left(\bar{\phi}+\frac{2}{3}\pi\right)+\frac{1}{3}e,\quad \varepsilon_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{e}\sin\bar{\phi}+\frac{1}{3}e,\quad \varepsilon_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{e}\sin\left(\bar{\phi}+\frac{4}{3}\pi\right)+\frac{1}{3}e, \tag{3}$$

где

$$e = \varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz} = E_1, \tag{4}$$

$$\bar{\phi} = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{e_3}{\bar{e}^{3}}\right),\quad -\frac{\pi}{6}\le\bar{\phi}\le\frac{\pi}{6}, \tag{5}$$

$$\bar{e}^2 = \frac{1}{6}\left[\left(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}\right)^2+\left(\varepsilon_{yy}-\varepsilon_{zz}\right)^2+\left(\varepsilon_{zz}-\varepsilon_{xx}\right)^2+\frac{3}{2}\left(\varepsilon_{xx}{}^2+\varepsilon_{yy}{}^2+\varepsilon_{zz}{}^2\right)\right], \tag{6}$$

$$e_3 = -3\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}-\frac{1}{3}E_1 & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy}-\frac{1}{3}E_1 & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz}-\frac{1}{3}E_1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Принимая гипотезу плоских сечений, получен вид потенциала (1) для рассматриваемого случая вращения вала с круглым сечением:

$$W = 2G\left(\sqrt{1+\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}} + \sqrt{1-\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2)}}\right). \tag{8}$$

Компоненты тензора напряжения в любой точки сечения вала при этом определяются как:

$$\tau_{xz} = 2G\frac{\varepsilon_{xz}}{\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}}}-\frac{1}{2\sqrt{1-\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}}}+\frac{\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}}{\left(1-\varepsilon_{xz}^2-\varepsilon_{yz}^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right),$$

$$\tau_{yz} = 2G\frac{\varepsilon_{yz}}{\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}}}-\frac{1}{2\sqrt{1-\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}}}+\frac{\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}}{\left(1-\varepsilon_{xz}^2-\varepsilon_{yz}^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right). \tag{9}$$

Соотношения (9) представляют собой нелинейный закон деформирования вала из резинокордного материала, описываемого упругим потенциалом Бартенева-Хазановича. Частным случаем (9) является закон Гука. Задавая абсолютную величину векторов напряжений через его составляющие:

$$|\sigma| = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}\,, \tag{10}$$

определена ее величина

$$|\sigma| = 2G\left(\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}}} - \frac{1}{2\sqrt{1-\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}}} + \frac{\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}}{\left(1-\varepsilon_{xz}^2-\varepsilon_{yz}^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{11}$$

В рассматриваемом случае характерным типом деформации является угол поворота сечения $\varphi(z,t)$. Полагая отсутствие депланации сечения вала и используя известные соотношения между перемещениями и углами поворота сечения при допущении конечности деформаций согласно второй системе упрощений В.В. Новожилова, имеем:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(-y - \frac{1}{2}x\varphi\right), \tag{12}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(x - \frac{1}{2}y\varphi\right). \tag{13}$$

Полагая отсутствие депланации сечения вала, переходим от зависимости напряжений от тензора деформаций в общем виде (11) к зависимости между напряжением и характерной в данном случае видом деформации – углом поворота сечения $\varphi(z,t)$:

$$|\sigma| = G\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\partial\varphi}{\partial z}r\sqrt{1+\frac{1}{4}\varphi^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\partial\varphi}{\partial z}r\sqrt{1+\frac{1}{4}\varphi^2}}} + \frac{2\frac{\partial\varphi}{\partial z}r\sqrt{1+\frac{1}{4}\varphi^2}}{\left(1-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}r\right)^2\left(1+\frac{1}{4}\varphi^2\right)\right)^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{14}$$

Здесь $\partial\varphi/\partial x$ – относительный угол закручивания, r – радиус-вектор элемента сечения. Зависимость напряжений от угла поворота φ и крутки $\partial\varphi/\partial x$ носит нелинейный характер.

После упрощения (14) согласно второй системе упрощений В.В. Новожилова [3], получена нелинейная зависимость между напряжением и углом поворота сечения, которая отлична от известного закона Гука:

$$\sigma = Gr\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(1+\frac{1}{8}\varphi^2\right) + \frac{19}{8}G\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^3\left(1+\frac{1}{8}\varphi^2\right)^3. \tag{15}$$

Суммируя по длине момент касательных напряжений сечения относительно оси вала

$$M_{кр} = \int_F R|\sigma|dF\,, \tag{16}$$

находится внутренний момент кручения:

$$M_{кр} = GJ_p r\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(1+\frac{1}{8}\varphi^2\right) + \frac{19}{8}GJ_p r^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^3\left(1+\frac{1}{8}\varphi^2\right)^3, \tag{17}$$

интенсивность которого есть величина:

$$\frac{\partial M_{кр}}{\partial z}=GJ_p\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{8}GJ_p\varphi^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{4}GJ_p\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2+\frac{57}{8}r^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{171}{64}r^2\varphi^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \tag{18}$$

Исключая номинальное вращение вала, одинаковое для любого элемента его сечений, построено уравнение крутильных колебаний стержня из резиноподобного материала, поведение которого задавалось потенциалом Бартенева-Хазановича:

$$GJ_p\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\frac{1}{8}GJ_p\phi^2\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\frac{1}{4}GJ_p\phi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2+\frac{57}{8}r^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{171}{64}r^2\varphi^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-$$
$$-\rho J_p\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\xi_1\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^2\partial t}-\xi_2\frac{\partial\varphi}{\partial t}=F(z,t), \tag{19}$$

где G_0J_p – жесткость вала на кручение; ρJ_p – момент инерции единицы длины вала; ξ_1,ξ_2 – коэффициенты, характеризирующие внутреннее и внешнее трение, соответственно; $\varphi(z,t)$ – угол скручивания в некотором сечении вала; $F(z,t)$ – интенсивность внешнего скручивающего момента.

Таким образом, на основе ранее разработанной методики построения модели колебаний стержневых элементов из физически нелинейных материалов [4-5], здесь на основе потенциала Бартенева-Хазановича построена нелинейная динамическая модель крутильных колебаний вала. Она существенно отличается от известного в литературе линейного уравнения крутильных колебаний вала [6].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.
[2] Новожилов В.В. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 374 с.
[3] Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – М.-Л.: ОГИЗ, 1948. – 211 с.
[4] Кыдырбекулы А.Б., Хаджиева Л.А. О моделировании физически нелинейных сред и сред с начальными напряжениями // Труды Всероссийской школы-семинара по современным проблемам МДТТ. – Новосибирск, 2003. – С. 119-123.
[5] Хаджиева Л.А. Нелинейные модели динамических систем: Учеб. пособие. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. – 132 с.
[6] Филиппов И. Г. Математическая теория колебаний упругих и вязкоупругих пластин и стержней. – Кишинев: Штиинца, 1988. – 188 с.

REFERENCES

[1] Chernykh K.F. Nonlinear theory of elasticity in engineering calculations. L.: Mashinostroenie, 1986. P. 336.
[2] Novozhilov V.V. Theory of elasticity. L.: Sudpromgiz, 1958. P. 374.
[3] Novozhilov V.V. Fundamentals of the nonlinear theory of elasticity. M.-L.: OGIZ 1948. P. 211.
[4] Kydyrbekuly A.B., Khajiyeva L. On the modeling of physically nonlinear media and media with initial stresses. Proceedings of the All-Russian School-Seminar on contemporary issues MRTT. Novosibirsk, 2003. P. 119-123.
[5] Khajiyeva L. Nonlinear models of dynamic systems: Studies. Manual. Almaty: Kazakh University, 2009. P. 132.
[6] Filippov I.G. Mathematical theory of vibrations of elastic and viscoelastic plates and rods. Chisinau: Shtiintsa, 1988. P. 188.

БАРТЕНЕВА-ХАЗАНОВИЧ ПОТЕНЦИАЛЫ НЕГІЗІНДЕГІ РЕЗЕҢКЕЛІ-КОРДТЫҚ БІЛІКТІҢ АЙНЫМАЛЫ ТЕРБЕЛІСТЕР МОДЕЛІ

Л. А. Хаджиева, С. Н. Абдрахман, А. Ж. Рахимжанова

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: динамика, сызықсыздық, демпфирлік, потенциал, айнымалы тербелістер.

Аннотация. Берілген жұмыста айналмалы стержндік элементтер механизімінің динамикасы және физикалық сызықты емес материалды машиналар қарастырылады. Стержн материалының құрамы Бартенева-Хазанович серпімді потенциалымен беріледі. Қарастырылған жағдайда деформация сипаттамасы болып белгілі бір біліктің екінші білікпен қиылысуының айнымалы бұрышы табылады. Бұл жағдайда жазық қиылысу гипотезасы алынған. Айнымалы тербелістер білігінің динамикалық моделі құрылған. Нәтижесінде алынған модель сызықсыз сипаттамалы. Бұл жағдай материалдың физикалық сызықты емес сипаттамасы мен оның ақырғы деформациясы әсерінен туындаған.

Поступила 01.10.2014 г.