N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 5, Number 297 (2014), 73 – 76

SPECTRAL RESOLUTION OF THE STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH THE VOLTERRA PROPERTY

A. A. Shaldanbaev, A. Sh. Shaldanbaev, I. O. Orazov

M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan

Key words: spectrum, decomposition, task, space, number.
Abstract. In this paper we obtained a spectral resolution of the Sturm-Liouville operator with the Volterra property in the Krein space.

УДК 517.9

СПЕКТРАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ВОЛЬТЕРРОВЫХ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

А. А. Шалданбаев, А. Ш. Шалданбаев, И. О. Оразов

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

Ключевые слова: спектр, разложение, задача, пространство, число.
Аннотация. В данной работе получено спектральное разложение вольтеррова оператора Штурма-Лиувилля в пространстве Крейна.

Рассмотрим в пространстве $H = L^2(0,1)$ краевую задачу Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x);\ x \in (0,1) \tag{1}$$

$$U_i[y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0\ \ (i = 1,2) \tag{2}$$

с двумя (i = 1,2) линейно независимыми граничными условиями (2), где $a_{ij}(i = 1,2; j = 1,2,3,4)$ – произвольные комплексные числа, λ – спектральный параметр. Линейная независимость граничных условий (i = 1,2) имеет место тогда и толька тогда, когда хотя бы один из миноров

$$\Delta_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{1j} \times a_{2i} \quad (i,j = 1,2,3,4) \tag{3}$$

граничной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}a_{24} \end{pmatrix},$$

отличен от нуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор Штурма-Лиувилля (1)–(2) называется вольтерровой, если он не имеет собственных значений на всей конечной части комплексной z плоскости C.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Получить «спектральное» разложение вольтеррова оператора Штурма-Лиувилля в пространстве с индефинитной метрикой, порожденной скалярным произведением $[u, v] = (Su, v)$, где $Su(x) = u(1 - x)$, $(.,.)$ – скалярное произведение пространства H.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

ЛЕММА 1. Если оператор Штурма-Лиувилля (1)-(2) вольтерров, то он подобен оператору Коши

$$Cz = -z''(x), \qquad x \in (0,1)(4)$$

$$z(0) = 0, \qquad z'(0) = 0, \tag{5}$$

где оператор подобия имеет вид

$$z(x) = Ty(x) = (I - kS)y(x),\ k^2 \neq 1 \tag{6}$$

$$Sy(x) = y(1-x), \tag{7}$$

I – тождественный оператор, т.е.

$$L = T^{-1}C\,T \tag{8}$$

ЛЕММА 2. Оператор SC является самосопряженным оператором в пространстве H. Обратный оператор $(SC)^{-1}$ является самосопряженным и вполне непрерывным оператором а пространстве $L^2(0,1)$, поэтому имеет место спектральное разложение

$$(SC)^{-1}f = C^{-1}Sf = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f,\varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n; \tag{9}$$

$$SCg = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (g,\varphi_n) \times \varphi_n, \tag{10}$$

где $\quad SC\varphi_n = \lambda_n\varphi_n, n = 1,2,\ldots..;\ (\varphi_n,\varphi_m) = \delta_{nm}.$

Эта лемма играет в дальнейшем существенную роль и является следствием теоремы Гилберта-Шмидта [1, с. 231].

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 1. Если $k^2 \neq 1$, то оператор Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x);\ \ x \in (0,1)(1)$$

$$y(0) = ky(1), \qquad y'(0) = -ky'(1) \tag{2}$$

вольтерров и для него имеет место спектральные разложения

$$L^{-1}f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, S\,T^*\varphi_n)T^{-1}\varphi_n,$$

$$Lg = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (g, T^*\varphi_n)\,ST^{-1}\varphi_n,$$

где $\{\varphi_n\}$ – ортонормированные собственные векторы оператора SC, соответствующие собственным значениям λ_n, т.е. $SC\varphi_n = \lambda_n\varphi_n,\ (\varphi_n,\varphi_m) = \delta_{nm}.;$ C – оператор Коши, оператор S определен формулой (7), $T = I - KS$ – оператор подобия, f и g пройзвольные элементы пространства H.

Системы $\{ST^*\varphi_n\}$ и $\{ST^{-1}\varphi_n\}$ образуют биортогональную пару в пространстве Крейна [2] со скалярным пройзведением

$$[u,v] = (Su,v),$$

где (., .) – скалярное пройзведение пространства H.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы (1) имеет место формула (8) $L = T^{-1}C\,T$, где $I - kS$, C – оператор Коши. Несложно заметить, что операторы S и T коммутируют. В самом деле

$$ST = S - kS^2 = S - kI; TS = (I - kS)S = S - kS^2 = S - kI.$$

т.е. $ST = TS, \Longrightarrow T^{-1}S = ST^{-1}$, где T^{-1} оператор обратный к оператору T, оно существует при $k^2 \neq 1$. Действуя оператором S, слева на формулу

$$L = T^{-1}CT\ ,$$

имеем

$$SL = S\,T^{-1}C\,T = T^{-1}S\,C\,T.$$

В силу леммы (2) оператор SC самосопряжен и его собственные функций $\{\varphi_n\}$ полны и ортогональны в пространстве H, т.е. имеют место формулы

$$SC\varphi_n = \lambda_n\varphi_n, \qquad (\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm},$$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty}(f, \varphi_n) \times \varphi_n.$$

$$SCf = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(f, \varphi_n)\varphi_n \quad ; \rightarrow$$

Заменив в этом формуле f на Tg имеем

$$SCTg = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(Tg, \varphi_n)\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(g, T^*\varphi_n)\varphi_n\,, \rightarrow$$

$$SLg = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(g, T^*\varphi_n)T^{-1}\varphi_n\,, \qquad \rightarrow$$

$$Lg = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(g, T^*\varphi_n)ST^{-1}\varphi_n.$$

Далее, из формулы $SL = T^{-1}SCT$, имеем $(SL)^{-1} = T^{-1}(SL)^{-1}T.$

В силу той же леммы (2) имеем

$$(SC)^{-1}g = L^{-1}Sg = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(g, \varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n.$$

Заменив в этой формуле g на Tf, имеем

$$(SC)^{-1}Tf = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(Tf, \varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f, T^*\varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n;$$

следовательно

$$(SL)^{-1}f = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f, T^*\varphi_n)}{\lambda_n}T^{-1}\varphi_n.$$

Преобразуем левую часть этой формулы

$$L^{-1}Sf = \sum_{n=1}^{\infty}(f, T^*\varphi_n)\,T^{-1}\varphi_n.$$

Заменив f на Sf, получим

$$L^{-1}f = \sum_{n=1}^{\infty}(Sf, T^*\varphi_n)T^{-1}\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}(f, ST^*\varphi_n)T^{-1}\varphi_n.$$

Пусть $[u, v] = (Su, v)$, тогда

$$[T^*\varphi_n, ST^{-1}\varphi_m] = (ST^*\varphi_n, ST^{-1}\varphi_m) = (T^*\varphi_n, T^{-1}\varphi_m) = (\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm};$$

$$[ST^*\varphi_n, T^{-1}\varphi_m] = (T^*\varphi_n, T^{-1}\varphi_m) = (\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
[2] Пятков С.Г., Егоров И.Е., Попов С.В. Неклассические дифференциально-операторные уравнения. – Новосибирск: Наука, 2000. – 336 с.

REFERENCES

[1] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funkcii I funkcional'nogo analiza. M.: Nauka, 1976. 544 p. (in Russ.).
[2] Pyatovskii S.G., Egorov I.E., Popov S.V. Neklassicheskie differencial'no-operatornye uravneniya. Novosibirsk: Nauka, 2000. 336 p. (in Russ.).

ВӨЛТЕРЛІ ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫНЫҢ КРЕЙН КЕҢІСТІГІНДЕГІ СПЕКТРӘЛДІ ТАРАЛЫМЫ

А. А. Шалданбаев, А. Ш. Шалданбаев, И. О. Оразов

М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан

Тірек сөздер:спектр, кеңістік, таралым, есеп, сан.

Аннотация. Бұл еңбекте вөлтерлі Штурм-Лиувилл операторының Крейн кеңістігіндегі спектрәлді таралымы алынды.

Поступила 01.10.2014 г.