N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 5, Number 297 (2014), 69 – 72

OF THE STURM-LIOUVILLE OPERATORS POSSESSING A COUNTABLE SET AND THE SINGLE-VALUED EIGENVALUE

A. A. Shaldanbaeva, A. Sh. Shaldanbaev, I. O. Orazov

M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan

Key words: border terms, operator, account, great number, task, equalization.
Abstract. In this paper we obtained the boundary conditions of the Sturm-Liouville operators possessing a countable set and the single-valued eigenvalue.

УДК 517.9

ОПЕРАТОРЫ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С КРАТНЫМ СПЕКТРОМ

А. А. Шалданбаева, А. Ш. Шалданбаев, И. О. Оразов

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

(*Представлена академиком НАН РК Т. Ш. Кальменовым*)

Ключевые слова: граничные условия, оператор, счет, множество, задача, уравнение.
Аннотация. В настоящей работе получены граничные условия операторов Штурма-Лиувилля, обладающих счетным множеством, однократных собственных значений.

1. Рассмотрим в пространстве $L^2(0,1)$ краевую задачу, порождаемую на интервале (0,1), уравнением Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x),\ x \in (0,1) \tag{1}$$

и двумя ($i = 1,2$) линейно независимыми граничными условиями

$$U_i[y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0\ \ (i = 1,2), \tag{2}$$

где $a_{i,j}$ ($i = 1,2$; $j = 1,2,3,4$) – комплексные постоянные.

Значения параметра λ, при которых эта краевая задача имеет ненулевые решения, называются собственными значениями, а соответствующие решения – собственными функциями. Совокупность собственных значений: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ составляет спектр краевой задачи (1)–(2).

Собственному значению приписываются кратность k, если при этом значений параметра задачи (1)–(2) k-кратно разрешима [1, с. 193].

Фундаментальная система решений уравнения (1), определяемая начальными данными: $y_1(\lambda,0) = y_2'(\lambda,0) = 1;\ y_1'(\lambda,0) = y_2(\lambda,0) = 0$ имеет вид

$$y_1(\lambda,x) = \cos\sqrt{\lambda}\,x,\ \ y_2(\lambda,x) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}. \tag{3}$$

Так как общее решение $y(\lambda,x)$ уравнения (1) является линейной комбинацией функций $y_1(\lambda,x), y_2(\lambda,x);\ \ y(\lambda,x) = A \times y_1(\lambda,x) + By_2(\lambda,x)$, то

$$U_i[y] = A\big[a_{i1} + a_{i3}y_1(\lambda,1) + a_{i4}y_1'(\lambda,1) + B$$
$$\times [a_{i2} + a_{i3}y_2(\lambda,1) + a_{i4}y_2'(\lambda,1)]\big]\ \ (i = 1,2)$$

откуда следует, что краевая задача (1)–(2) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда система уровнений

$$\begin{cases} A[a_{11} + a_{13}y_1(\lambda, 1) + a_{14}y_1'(\lambda, 1)] + B[a_{12} + a_{13}y_2(\lambda, 1) + a_{14}y_2'(\lambda, 1)] = 0, \\ A[a_{21} + a_{23}y_1(\lambda, 1) + a_{24}y_1'(\lambda, 1)] + B[a_{22} + a_{23}y_2(\lambda, 1) + a_{24}y_2'(\lambda, 1)] = 0 \end{cases}$$

относительно коэффициентов A, B имеет нетривиальное решение. Поэтому собственные значения рассматриваемой задачи совпадают с квадратами корней его характерического детерминанта

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} + a_{13}y_1(\lambda, 1) + a_{14}y_1'(\lambda, 1) & a_{12} + a_{13}y_2(\lambda, 1) + a_{14}y_2'(\lambda, 1) \\ a_{21} + a_{23}y_1(\lambda, 1) + a_{24}y_1'(\lambda, 1) & a_{22} + a_{23}y_2(\lambda, 1) + a_{24}y_2'(\lambda, 1) \end{vmatrix}.$$

Раскрывая этот определитель и замечая, что вронскиан $W[y_1, y_2] = y_1(\lambda, x) \times y_2'(\lambda, x) - y_1'(\lambda, x) \times y_2(\lambda, x)$ тождественно равен единице, находим

$$\Delta(\lambda) = \Delta_{12} + \Delta_{34} + \Delta_{13}\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + (\Delta_{14} + \Delta_{32})\cos\sqrt{\lambda} - \Delta_{42}\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} = 0, \qquad (4)$$

где $\Delta_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{1j} \times a_{2i}$ – минор, составленный из i- и j-го столбцов матрицы A, составленной из коэффициентов граничных условий

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

Кратность собственного значения λ_0 меньше или равна кратности λ_0 как корня функций $\Delta(\lambda)$. $\Delta(\lambda)$ представляет собой целую функцию от λ. Эти две кратности не обязаны совпадать, например, $\lambda = 0$ есть простое собственное значение задачи [1, с. 193]

$$-y''(x) = \lambda y(x); y(0) - y(1) + \frac{1}{2}y'(1) = 0, y'(0),$$

но оно является двукратным корнем соответствующего детерминанта

$$\Delta(\lambda) = 1 - chk + \frac{k}{2}shk, \ (k^2 = \lambda).$$

ПРИМЕР. Для задачи о собственных значениях

$$y'' + \lambda y = 0; \ y(a) = y(b), \ y'(a) = y'(b)$$

следует положить

$$\varphi(x) = \begin{cases} coskx \\ 1, \\ chkx \end{cases} \qquad \varphi_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}\sin kx & \text{при } \lambda = k^2 > 0 \\ x & \text{при } \lambda = 0, \\ \frac{1}{k}shkx & \text{при } \lambda = -k^2 < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\Delta(\lambda) = \begin{cases} 2 - 2cosk(b-a) \\ 0 \\ 2 - 2chk(b-a) \end{cases}$$

т.е. собственные значение образуют последовательность

$$\lambda_m = \left(\frac{2\pi m}{b-a}\right)^2, m = 0,1,2, \ldots,$$

причем все λ_m при $m \neq 0$ двукратны [1, с. 194].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Предположим, что характеристический детерминант $\Delta(\lambda)$ имеет счетное множество кратных корней, то какой вид принимает граничные условия такой краевой задачи. Например, известно, что если краевая задача (1)–(2) имеет не менее двух двукратных собственных значений, то она принимает вид

$$y(0) + ky(1) = 0, \ y'(0) + ky'(1) = 0, \ (k^2 = 1).$$

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

ЛЕММА 1. Если $a \times d \neq 0$, то уравнение

$$\Delta(\lambda) = a + \left(\frac{b}{\sqrt{\lambda}} + d\sqrt{\lambda}\right)\sin\sqrt{\lambda} + c \times \cos\sqrt{\lambda} = 0 \qquad (6)$$

может иметь не более четырех кратных нулей, отличных от нуля;

б) Если $a = 0$, $d \neq 0$, то уравнение (6) может иметь не более двух кратных нулей, отличных от нуля.

в) Если $d = 0$, $b \neq 0$, то уравнения (6) может иметь не более двух кратных нулей.

СЛЕДСТВИЕ 1.

Если $d = 0$, $b \neq 0$, $c^2(a^2 - c^2) = 0$, то уравнение (6) может иметь не более одного кратного нуля.

СЛЕДСТВИЕ 2.

Если $d = 0, 2bc(a^2 - c^2) - 2b^2c^2 + a^2b^2 = 0,\ b^2(a^2 - c^2) - b^4 - 2b^3c \neq 0$, то уравнение (6) не имеет кратных нулей, например, при ($c = 0$, $a = 0$, $b \neq 0$).

ЛЕММА 2. Если $c \neq 0$ и функция

$$\Delta(\lambda) = a + \frac{b}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda} + c \times \cos\sqrt{\lambda}$$

имеет более двух кратных нулей, то $b = 0$, $a^2 = c^2$.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 1. Если характеристический детерминант $\Delta(\lambda)$ краевой задачи (1)–(2) имеет счетное множество кратных нулей, то краевые условия (2) не усиленно регулярны [2, с. 71].

ТЕОРЕМА 2. Если характеристический детерминант $\Delta(\lambda)$ краевой задачи (1)-(2) имеет счетное количество кратных нулей, то оператор Штурма-Лиувилля соответствующий этой краевой задаче принимает один из следующих видов

$$L_1(k)y = -y''(x), x \in (0,1)$$

$$\begin{cases} y'(0) + y'(1) = 0, & k \in \bar{C}, k \neq -1; \\ y(0) + ky(1) = 0 \end{cases}$$

$$L_3(k)y = -y''(x), \quad x \in (0,1)$$

$$\begin{cases} k \times y'(0) - y'(1) = 0, & k \in \bar{C}, k \neq -1 \\ y(0) - y(1) = 0 \end{cases}$$

или им сопряженных, где k принадлежит к расширенной комплексной плоскости

ТЕОРЕМА 3. Если операторы A и B определены формулами

$$Ay = iy'(x), y(0) + ky(1) = 0, \quad k \in \bar{C},\ k \neq -1$$

$$Bz = iz'(x), z(0) + z(1) = 0,$$

то имеет место формулы

1) $L_1(k) = BA,$ $\qquad k \in \bar{C}, k \neq -1$

2) $L_2\left(\frac{1}{k}\right) = AB,$

где $L_1(k)y = -y''(x), x \in (0,1)$

$$\begin{cases} y'(0) + y'(1) = 0, \\ y(0) + ky(1) = 0 \end{cases} \quad k \in \bar{C},\ k \neq -1$$

$$L_2(k)y = -y''(x),\ x \in (0,1);$$

$$\begin{cases} ky'(0) + y'(1) = 0, \\ y(0) + y(1) = 0 \end{cases} \quad k \in \bar{C},\ k \neq -1$$

ТЕОРЕМА 4. Если операторы C и D определены формулами

$$Cy = i\,y'(x),\ ky(0) - y(1) = 0,\ k \in \bar{C},\ k \neq -1$$

$$Dz = i\,z'(x),\ z(0) - z(1) = 0,$$

то имеет место формулы

3) $L_3(k) = C \times D;$

4) $L_4(k) = D \times C,$

где

$$L_3(k)y = -y''(x),\ x \in (0,1)$$

$$\begin{cases} ky'(0) - y'(1) = 0, \\ y(0) - y(1) = 0; \end{cases} \qquad k \in \bar{C},\ k \neq -1$$

$$L_4(k)y = -y''(x),\ x \in (0,1)$$

$$\begin{cases} y'(0) - y'(1) = 0, \\ y(0) - ky(1) = 0 \end{cases} \qquad k \in \bar{C},\ k \neq -1$$

ТЕОРЕМА 5. Если $k^2 \neq 1$, то имеет место формулы

а) $L_1(k) = P^{-1}(k)L_1(o)\,P(k),\ P(k)y(x) = y(x) + ky(1-x);$

б) $L_3(k) = Q^{-1}(k)L_3(\infty)Q(k),\ Q(k)y(x) = ky(x) + y(1-x).$

ТЕОРЕМА 6. Имеет место уравнение Лакса

$$\dot{L}_1(k) \doteq L_1(k)(kI + S)^{-1} - (kI + S)^{-1}L_1(k),$$

где (°) – означает дифференцирование по параметру k.

Следует отметить, что тема настоящей работы мало исследовано [2, с. 9].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с.

[2] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

REFERENCES

[1] Kamke E. Spravochnik po differencial’nym uravneniyam. M.: Nauka, 1971. 576 p. (in Russ.).

[2] Naimark M.A. Lineinye differencial’nye operatory. M.: Nauka, 1969. 528 p. (in Russ.).

ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЛАРЫНЫҢ ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТТАРЫ

А. А. Шалданбаева, А. Ш. Шалданбаев, И. О. Оразов

М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан

Тірек сөздер: шекаралық шарт, оператор, есепшот, көпшілік, мақсат, уравнение.

Аннотация. Бұл еңбекте бір еселі меншікті мәндері шексіз көп, Штурм-Лиувилл операторларының шекаралық шарттары алынды.

Поступила 01.10.2014 г.