N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 5, Number 309 (2016), 168 – 175

E.A. Bakirova, Zh.M. Kadirbayeva

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of MES RK, Almaty, Kazakhstan
bakirova1974@mail.ru, apelman86pm@mail.ru

ON A SOLVABILITY OF LINEAR MULTIPOINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE LOADED DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract. A linear multipoint boundary value problem for the system of loaded differential equations is investigated on the basis of the parameterization method. The essence of the parameterization method is that segment is divided into parts by points of loading which the loaded differential equation is considered and initial problem is reduced to the equivalent boundary value problem with a parameter. The solution of the boundary value problem with parameter is defined as the limit of sequence of systems of pairs of parameter and function. Parameters are defined by the system of the linear algebraic equations, the system of the linear algebraic equations is determined by matrices of boundary conditions and the system of loaded differential equations and functions are solutions of the Cauchy problems at the found values of parameters. An algorithm for finding the solution of linear multipoint boundary value problem for systems of loaded differential equations is offered. The conditions of convergence of the offered algorithm providing existence and uniqueness of the solution of the considering problem are established. Sufficient conditions of unique solvability of a problem in terms of initial data are received.

Keywords: boundary value problem, parameterization method, loaded differential equation, algorithm.

УДК 517.956.3, 517.75

Э.А. Бакирова, Ж.М. Кадирбаева

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

О РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. На основе метода параметризации исследуется линейная многоточечная краевая задача для системы нагруженных дифференциальных уравнений. Суть метода параметризации заключается в том, что отрезок, где рассматривается нагруженное дифференциальное уравнение разбивается на части точками нагружения и исходная задача сводится к эквивалентной краевой задаче с параметром. Решение краевой задачи с параметром определяется как предел последовательности систем пар параметра и функции. Параметры находятся из системы линейных алгебраических уравнений, определяемых по матрицам краевых условий и системы нагруженных дифференциальных уравнений, а функции являются решениями задач Коши при найденных значениях параметров. Предлагается алгоритм нахождения решения линейной многоточечной краевой задачи для систем нагруженных дифференциальных уравнений. Устанавливаются условия сходимости предложенного алгоритма, обеспечивающие существование и единственность решения исследуемой задачи. Получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи в терминах исходных данных.

Ключевые слова: краевая задача, метод параметризации, нагруженное дифференциальное уравнение, алгоритм.

Теория краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений является одной из актуальных и активно развивающихся областей качественной теории дифференциальных уравнений и прикладной математики. В последние годы наблюдается интенсивное исследование нагруженных дифференциальных уравнений, связанное с различными приложениями задач, ассоциированных с нагруженными уравнениями. К задачам приложений, описываемых этими уравнениями, относятся задача долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и почвенной влаги [1-5], моделирования процессов переноса частиц, некоторые задачи оптимального управления [4,5]. Отметим, что нагруженные дифференциальные уравнения описывают процессы с последействием, в которых состояние процесса в какой-либо точке и в какой-либо момент может оказывать влияние на весь процесс в целом [2].

В работах [6-9] предложен численный метод решения систем линейных неавтономных обыкновенных нагруженных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными интегральными условиями. Метод основан на операции свертывания интегральных условий в локальные, что позволяет свести решение исходной задачи к решению задачи Коши относительно систем обыкновенных дифференциальных уравнений и линейных алгебраических уравнений.

В настоящей работе рассматривается линейная многоточечная краевая задача для системы нагруженных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + \sum_{i=1}^{m} A_i(t)x(\theta_i) + f(t), \quad t \in (0,T), \; x \in R^n, \tag{1}$$

$$\sum_{j=0}^{m+1} B_j x(\theta_j) = d, \quad d \in R^n, \tag{2}$$

где матрицы $A_i(t)$, $i = \overline{0,m}$, размерности $(n \times n)$ и $n-$вектор-функция $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$, B_j, $j = \overline{0,m+1}$ – постоянные матрицы размерности $(n \times n)$, $0 = \theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_m < \theta_{m+1} = T$, $\|x\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|$, $\|A(t)\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(t)|$.

Через $C([0,T], R^n)$ обозначим пространство непрерывных функций $x:[0,T] \to R^n$ с нормой $\|x\|_1 = \max\limits_{t\in[0,T]} \|x(t)\|$.

Решением задачи (1), (2) называется непрерывно дифференцируемая на $[0,T]$ вектор-функция $x^*(t) \in C([0,T], R^n)$, удовлетворяющая на $[0,T]$ системе нагруженных дифференциальных уравнений (1) (при этом в точках $t = 0$, $t = T$ системе (1) удовлетворяют односторонние производные $\dot{x}^*_{пр}(0)$, $\dot{x}^*_{лев}(T)$) и для $x^*(\theta_j)$, $j = \overline{0,m+1}$ справедливо равенство (2).

Пусть $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица решений однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt} = A_0(t)x$ и $\Phi(0) = I$, где I – единичная матрица размерности $(n \times n)$.

Тогда решение системы (1) можно записать в виде

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(\tau)\left[\sum_{i=1}^{m} A_i(\tau)x(\theta_i) + f(\tau)\right]d\tau, \quad t \in [0,T] \tag{3}$$

Найдя из представления (3) значения функции $x(t)$ в точках $t = \theta_j$, $j = \overline{0,m+1}$ и подставив в многоточечное условие (2) получим:

$$\left[B_0 + \sum_{i=1}^{m+1} B_i \Phi(\theta_i)\right]x(0) + \sum_{i=1}^{m+1} B_i \Phi(\theta_i)\int_0^{\theta_i} \Phi^{-1}(\tau)\left[\sum_{i=1}^{m} A_i(\tau)x(\theta_i) + f(\tau)\right]d\tau = d. \tag{4}$$

Здесь учтено, что $\theta_0 = 0$, $\Phi(0) = I$.

Предположим, что матрица $B_0+\sum_{i=1}^{m+1}B_i\Phi(\theta_i)$ обратима. Тогда начальная функция $x(0)$ определяется единственным образом из соотношения (4):

$$x(0)=\left[B_0+\sum_{i=1}^{m+1}B_i\Phi(\theta_i)\right]^{-1}\left\{d-\sum_{i=1}^{m+1}B_i\Phi(\theta_i)\int_0^{\theta_i}\Phi^{-1}(\tau)\left[\sum_{i=1}^{m}A_i(\tau)x(\theta_i)+f(\tau)\right]d\tau\right\}.$$

Таким образом, решение краевой задачи (1), (2) имеет вид

$$x(t)=\Phi(t)\left[B_0+\sum_{i=1}^{m+1}B_i\Phi(\theta_i)\right]^{-1}\left\{d-\sum_{i=1}^{m+1}B_i\Phi(\theta_i)\int_0^{\theta_i}\Phi^{-1}(\tau)\left[\sum_{i=1}^{m}A_i(\tau)x(\theta_i)+f(\tau)\right]d\tau\right\}+$$

$$+\Phi(t)\int_0^{t}\Phi^{-1}(\tau)\left[\sum_{i=1}^{m}A_i(\tau)x(\theta_i)+f(\tau)\right]d\tau,$$

при условии, что матрица $B_0+\sum_{i=1}^{m+1}B_i\Phi(\theta_i)$ обратима.

Так как фундаментальную матрицу решений $\Phi(t)$ удается построить в очень редких случаях, возникает необходимость в получении коэффициентных условий разрешимости задачи (1), (2) и построения алгоритмов нахождения ее решений. Ранее в работах Д.С.Джумабаева [10, 11] был разработан метод параметризации для исследования и решения двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод параметризации позволил установить необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости рассматриваемой задачи в терминах исходных данных. На основе этого метода были предложены двухпараметрические семейства алгоритмов нахождения решений двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, условия осуществимости и сходимости которых одновременно обеспечивают существование единственного решения исследуемой задачи.

В работах [12-14] метод параметризации развит на многоточечные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, установлены эффективные условия разрешимости и построены конструктивные алгоритмы нахождения решения. Ранее в работах [15-20] на основе метода параметризации найдены коэффициентные признаки однозначной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для систем нагруженных дифференциальных уравнений и построены алгоритмы нахождения решения этой задачи.

В данной работе метод параметризации развивается на линейную многоточечную краевую задачу для системы нагруженных дифференциальных уравнений (1), (2). По схеме метода параметризации предлагаются алгоритмы построения приближенных решений рассматриваемой задачи. Устанавливаются достаточные условия осуществимости и сходимости предложенных алгоритмов, а также существования единственного решения многоточечной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений (1), (2). Одним из основных условий однозначной разрешимости исследуемой задачи является обратимость специальной матрицы, составляемой по данным задачи.

Краевую задачу (1), (2) исследуем методом параметризации. Интервал $[0,T]$ разбиваем на части точками нагружения: $[0,T)=\bigcup_{r=1}^{m+1}[\theta_{r-1},\theta_r)$.

Введем пространство $C([0,T],\theta,R^{n(m+1)})$ систем функций $x[t]=(x_1(t),x_2(t),\dots,x_{m+1}(t))$, где функции $x_r(t)$, $r=\overline{1,m+1}$, непрерывны на $[\theta_{r-1},\theta_r)$ и имеют конечные левосторонние пределы $\lim_{t\to\theta_r-0}x_r(t)$, $r=\overline{1,m+1}$, с нормой $\|x[\cdot]\|_2=\max_{r=\overline{1,m+1}}\sup_{t\in[\theta_{r-1},\theta_r)}\|x_r(t)\|$.

Сужение вектор-функции $x(t)$ на r-ый интервал $[\theta_{r-1},\theta_r)$ обозначим через $x_r(t)$, т.е. $x_r(t)=x(t)$ при $t\in[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$. При этом задача (1), (2) сведется к эквивалентной многоточечной краевой задаче для нагруженных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_r}{dt}=A_0(t)x_r+\sum_{j=1}^{m}A_j(t)x_{j+1}(\theta_j)+f(t),\quad t\in[\theta_{r-1},\theta_r),\ r=\overline{1,m+1},, \tag{5}$$

$$\sum_{j=0}^{m}B_jx_{j+1}(\theta_j)+B_{m+1}\lim_{t\to T-0}x_{m+1}(t)=d, \tag{6}$$

$$\lim_{t\to\theta_p-0}x_p(t)=x_{p+1}(\theta_p),\quad p=\overline{1,m}. \tag{7}$$

Здесь равенства (7) являются условиями склеивания или непрерывности решения в точках нагрузки.

Решением задачи (5)–(7) является система функций $x^*[t]=(x_1^*(t),x_2^*(t),...,x_{m+1}^*(t))\in C([0,T],\theta,R^{n(m+1)})$, где непрерывно дифференцируемая и ограниченная на $[\theta_{r-1},\theta_r)$ функция $x_r^*(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (5) при всех $t\in[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$ (при $t=\theta_{r-1}$ уравнению (5) удовлетворяет правосторонняя производная функции $x_r^*(t)$), имеют место равенства (6), (7).

Если $x^*(t)$ – решение задачи (1), (2), то система функций $x^*[t]=(x_1^*(t),x_2^*(t),...,x_{m+1}^*(t))\in C([0,T],\theta,R^{n(m+1)})$, где $x_r^*(t)$– сужение функции $x^*(t)$ на интервал $[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$, $\lim\limits_{t\to T-0}x_{m+1}^*(t)=x^*(T)$, является решением задачи (5) –(7). И, обратно, если система функций $\widetilde{x}[t]=(\widetilde{x}_1(t),\widetilde{x}_2(t),...,\widetilde{x}_{m+1}(t))\in C([0,T],\theta,R^{n(m+1)})$, является решением задачи (5) – (7), то функция $\widetilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\widetilde{x}(t)=\widetilde{x}_r(t)$, $t\in[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$, $\widetilde{x}(T)=\lim\limits_{t\to T-0}\widetilde{x}_{m+1}(t)$ будет решением задачи (1), (2).

Введем параметры $\lambda_r=x_r(\theta_{r-1})$, $r=\overline{1,m+1}$, и на каждом интервале $[\theta_{r-1},\theta_r)$ произведем замену $u_r(t)=x_r(t)-\lambda_r$, $r=\overline{1,m+1}$. Введение дополнительных параметров позволяет получить начальные данные. Тогда получим эквивалентную краевую задачу с параметрами

$$\frac{du_r}{dt}=A_0(t)(u_r+\lambda_r)+\sum_{j=1}^{m}A_j(t)\lambda_{j+1}+f(t),\quad t\in[\theta_{r-1},\theta_r), \tag{8}$$

$$u_r(\theta_{r-1})=0,\quad r=\overline{1,m+1}, \tag{9}$$

$$\sum_{j=0}^{m}B_j\lambda_{j+1}+B_{m+1}\lambda_{m+1}+B_{m+1}\lim_{t\to T-0}u_{m+1}(t)=d, \tag{10}$$

$$\lambda_p+\lim_{t\to\theta_p-0}u_p(t)=\lambda_{p+1},\quad p=\overline{1,m}. \tag{11}$$

Решением задачи (8)–(11) является пара $(\lambda,u[t])$ с элементами $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{m+1})\in R^{n(m+1)}$, $u[t]=(u_1(t),u_2(t),...,u_{m+1}(t))\in C([0,T],\theta,R^{n(m+1)})$, где функции $u_r(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$, и при $\lambda_r=\lambda_r^*$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений (8) и условиям (9)–(11).

Задачи (1), (2) и (8)–(11) эквивалентны. Если пара $(\widetilde{\lambda},\widetilde{u}[t])$, где $\widetilde{\lambda}=(\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{\lambda}_2,...,\widetilde{\lambda}_{m+1})\in R^{n(m+1)}$, $\widetilde{u}[t]=(\widetilde{u}_1(t),\widetilde{u}_2(t),...,\widetilde{u}_{m+1}(t))\in C([0,T],\theta,R^{n(m+1)})$ – решение задачи (8)–(11), то функция $\widetilde{x}(t)$ определяемая равенствами $\widetilde{x}(t)=\widetilde{\lambda}_r+\widetilde{u}_r(t),\ t\in[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$,

$\widetilde{x}(T)=\widetilde{\lambda}_{m+1}+\lim\limits_{t\to T-0}\widetilde{u}_{m+1}(t)$ будет решением исходной задачи (1), (2). И наоборот, если функция $x(t)$ является решением задачи (1), (2), то пара $(\lambda, u[t])$ где $\lambda=(x(\theta_0), x(\theta_1),..., x(\theta_m))$, $u[t]=(x(t)-x(\theta_0),\ x(t)-x(\theta_1),..., x(t)-x(\theta_m))$, будет решением задачи (8)–(11).

Появление начальных условий $u_r(\theta_{r-1})=0$, $r=\overline{1,m+1}$, позволяют при фиксированных $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{m+1})$ определить функции $u_r(t)$, $r=\overline{1,m+1}$, из интегральных уравнений Вольтерра второго рода:

$$u_r(t)=\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t}A_0(\tau)[u_r(\tau)+\lambda_r]d\tau+\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t}\left[\sum_{j=1}^{m}A_j(\tau)\lambda_{j+1}+f(\tau)\right]d\tau,\ t\in[\theta_{r-1},\theta_r),\quad r=\overline{1,m+1}.$$
(12)

В уравнении (12) вместо $u_r(\tau)$, $r=\overline{1,m+1}$, подставляя соответствующую правую часть и повторив этот процесс $\nu\ (\nu=1,2,...)$ раз, получим представление функции $u_r(t)$, $r=\overline{1,m+1}$, вида:

$$u_r(t)=D^0_{\nu,r}(t)\lambda_r+\sum_{j=1}^{m}D^j_{\nu,r}(t)\lambda_{j+1}+F_{\nu,r}(t)+G_{\nu,r}(u,t),\quad t\in[\theta_{r-1},\theta_r),\quad r=\overline{1,m+1}, \tag{13}$$

где

$$D^j_{\nu,r}(t)=\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t}A_j(\tau_1)d\tau_1+...+\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t}A_0(\tau_1)...\int\limits_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}A_0(\tau_{\nu-1})\int\limits_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}A_j(\tau_\nu)d\tau_\nu...d\tau_1,\quad j=\overline{0,m},$$

$$F_{\nu,r}(t)=\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t}f(\tau_1)d\tau_1+\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t}A_0(\tau_1)\int\limits_{\theta_{r-1}}^{\tau_1}f(\tau_2)d\tau_2d\tau_1+...+\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t}A_0(\tau_1)...\int\limits_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}A_0(\tau_{\nu-1})\int\limits_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}f(\tau_\nu)d\tau_\nu...d\tau_1,$$

$$G_{\nu,r}(u,t)=\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t}A_0(\tau_1)...\int\limits_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}A_0(\tau_{\nu-1})\int\limits_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}A_0(\tau_\nu)u_r(\tau_\nu)d\tau_\nu...d\tau_1,\ r=\overline{1,m+1}.$$

Переходя в правой части (13) к пределу при $t\to\theta_r-0$, и подставив соответствующие им выражения в условия (10), (11), получим систему уравнений относительно неизвестных параметров λ_r, $r=\overline{1,m+1}$:

$$\sum_{j=0}^{m}B_j\lambda_{j+1}+B_{m+1}[I+D^0_{\nu,m+1}(T)]\lambda_{m+1}+B_{m+1}\sum_{j=1}^{m}D^i_{\nu,m+1}(T)\lambda_{j+1}= \\ =d-B_{m+1}F_{\nu,m+1}(T)-B_{m+1}G_{\nu,m+1}(u_{m+1},T), \tag{14}$$

$$[I+D^0_{\nu,p}(\theta_p)]\lambda_p+\sum_{j=1}^{m}D^j_{\nu,p}(\theta_p)\lambda_{j+1}-\lambda_{p+1}=-F_{\nu,p}(\theta_p)-G_{\nu,p}(u_p,\theta_p),\quad p=\overline{1,m}. \tag{15}$$

где I - единичная матрица размерности $(n\times n)$. Обозначив через $Q_\nu(\theta)$ матрицу, соответствующей левой части системы (14), (15) и введя векторы

$F_\nu(\theta)=(-d+B_{m+1}F_{\nu,m+1}(T), F_{\nu,1}(\theta_1), F_{\nu,2}(\theta_2),..., F_{\nu,m}(\theta_m))$,

$G_\nu(u,\theta)=(B_{m+1}G_{\nu,m+1}(u_{m+1},T),\ G_{\nu,1}(u_1,\theta_1), G_{\nu,2}(u_2,\theta_2),..., G_{\nu,m}(u_m,\theta_m))$

запишем ее в виде

$$Q_\nu(\theta)\lambda=-F_\nu(\theta)-G_\nu(u,\theta),\quad \lambda\in R^{n(m+1)}. \tag{16}$$

Таким образом, для нахождения неизвестной пары $(\lambda, u[t])$ имеем замкнутую систему уравнений (12), (16).

Применяя метод последовательных приближений найдем решение краевой задачи (8) – (11) и соответственно эквивалентной краевой задачи (1), (2). В этом и заключается суть метода параметризации.

Пара $(\lambda, u[t])$ – решение задачи (8)–(11), находится как предел последовательности пар $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$, k = 0,1,2,... , определяемой по следующему алгоритму:

0-шаг. а) Предполагая, что при выбранном $\nu \in N$ матрица $Q_\nu(\theta)$ обратима, начальное приближение по параметру $\lambda^{(0)} = \left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, ..., \lambda_{m+1}^{(0)}\right) \in R^{n(m+1)}$ определим из уравнения $Q_\nu(\theta)\lambda = -F_\nu(\theta)$, т.е. $\lambda^{(0)} = -[Q_\nu(\theta)]^{-1} F_\nu(\theta)$. б) Используя компоненты вектора $\lambda^{(0)} \in R^{n(m+1)}$ и решая задачу Коши (8), (9) при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$, $r = \overline{1, m+1}$, на интервалах $t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)$, $r = \overline{1, m+1}$ находим функции $u_r^{(0)}(t)$, $r = \overline{1, m+1}$.

1-шаг. а) Подставляя найденные $u_r^{(0)}(t)$, $r = \overline{1, m+1}$ в правую часть (16), из уравнения $Q_\nu(\theta)\lambda = -F_\nu(\theta) - G_\nu\left(u^{(0)}, \theta\right)$ определим $\lambda^{(1)} = \left(\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, ..., \lambda_{m+1}^{(1)}\right) \in R^{n(m+1)}$. б) На отрезках $t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)$, $r = \overline{1, m+1}$ решая задачу Коши (8), (9) при $\lambda_r = \lambda_r^{(1)}$, $r = \overline{1, m+1}$, находим функции $u_r^{(1)}(t)$, $r = \overline{1, m+1}$. И т.д.

Продолжая процесс, на k-ом шаге получаем систему пар $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$, k = 0,1,2,... Отметим, что в пункте б) при фиксированных значениях параметра λ_κ, $r = \overline{1, m+1}$, решение задачи Коши находится отдельно на каждом интервале $t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)$, $r = \overline{1, m+1}$.

Достаточные условия сходимости алгоритма, существования единственного решения задачи (1), (2) дает следующая теорема:

Теорема. Пусть при некотором $\nu \in N$ матрица $Q_\nu(\theta): R^{n(m+1)} \to R^{n(m+1)}$ обратима и выполняются неравенства:

$$\left\|[Q_\nu(\theta)]^{-1}\right\| \le \gamma_\nu(\theta), \tag{17}$$

$$q_\nu(\theta) = \gamma_\nu(\theta)\max[1, \|B_{m+1}\|]\left\{e^{\alpha_0 h} - \sum_{i=0}^{\nu} \frac{(\alpha_0 h)^i}{i!} + h\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left[e^{\alpha_0 h} - \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha_0 h)^i}{i!}\right]\right\} < 1, \tag{18}$$

где $h = \max\limits_{r=\overline{1,m+1}}(\theta_r - \theta_{r-1})$, $\|A_i(t)\| \le \alpha_i$, $i = \overline{0, m}$.

Тогда линейная многоточечная краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений (1), (2) имеет единственное решение.

Пример. На $[0,1]$ рассматривается линейная многоточечная краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ t/4 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1/8 & 0 \\ 0 & t/16 \end{pmatrix} x(1/2) + f(t),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(0) + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x\left(\frac{1}{2}\right) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x(1) = d.$$

Отрезок $[0,1]$ делим на две части: $[0, 1) = [0, 1/2) \cup [1/2, 1)$, вводя дополнительные параметры $\lambda_1 = x(0)$, $\lambda_2 = x_2(1/2)$, переходим к эквивалентной краевой задаче с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ t/4 & 0 \end{pmatrix}[u_r + \lambda_r] + \begin{pmatrix} 1/8 & 0 \\ 0 & t/16 \end{pmatrix}\lambda_2 + f(t), \quad r = \overline{1,2},$$

$$u_1(0)=0,\ u_2(1/2)=0,$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\lambda_1+\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\lambda_2+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\lambda_2+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\lim_{t\to T-0}u_2(t)=d\,,$$

$$\lambda_1+\lim_{t\to\theta_1-0}u_1(t)=\lambda_2.$$

При $\nu=1$ матрица $Q_1(\theta)$ имеет вид

$$Q_1(\theta)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3.0625 & 1.25\\ 0 & 1 & 0.1875 & 3.0469\\ 1 & 0.25 & -0.9375 & 0\\ 0.0312 & 1 & 0 & -0.9922\end{pmatrix}.$$

Матрица $Q_1(\theta)$ обратима и

$$[Q_1(\theta)]^{-1}=\begin{pmatrix}0.24056 & -0.12122 & 0.7616 & -0.06918\\ -0.01728 & 0.25137 & -0.00617 & 0.75017\\ 0.25199 & -0.06227 & -0.25594 & 0.12625\\ -0.00984 & 0.24953 & 0.01777 & -0.25398\end{pmatrix}$$

Проверим выполнение условия теоремы:

$$\|[Q_1(\theta)]^{-1}\|\le 1.1925,$$

$$q_1(\theta)=1.1925\cdot\max[1,\|B_2\|][e^{0.25}-1-0.25+0.125\cdot 0.5\cdot(e^{0.25}-1)]=0.1235<1.$$

Таким образом, все условия теоремы выполнены и задача имеет единственное решение.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги грунтовых вод // Дифференц. Уравнения, 1982. - Т. 18. -№ 1. - С. 72-81.

[2] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. -М.: Наука, 2012. -232 с.

[3] Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. - Алматы: Ғылым, 2010. -334 с.

[4] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. -М:Высшая школа,1995.– 205с.

[5] Нахушев А.М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // Дифференц. Уравнения. -1979. - Т. 15, № 1. - С. 96-105.

[6] Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. О численном решении нагруженных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 2004. - Т. 44. -№ 9. - С. 1585-1595.

[7] Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. О численном решении задач оптимального управления с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Ж. вычисл. матем. и математической физики. - 2012. - Т.52. -№12. - С. 2163-2177.

[8] Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. Численный метод решения нагруженных нелокальных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - 2014. - Т.54, №7. -С. 1096-1109.

[9] Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. On Numerical Solution to Loaded Systems of Ordinary Differential Equations with Non-separated Multipoint and Integral Conditions // Numerical Analysis and Applications. - 2014. - Vol. 17, № 1. - P. 1-16.

[10] Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - 1989. - Т.29. -№1. -С. 50-66.

[11] Джумабаев Д.С. Аппроксимация задачи нахождения ограниченного решения двухточечными краевыми задачами // Дифференц. Уравнения. -1987. -Т. 23, № 12. – С. 2188-2189.

[12] Джумабаев Д.С., Иманчиев А.Е. Корректная разрешимость линейной многоточечной краевой задачи // Математический журнал. - 2005. - Т.5, №1. - С. 30-38.

[13] Иманчиев А.Е. Необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости линейной многоточечной краевой задачи // Известия МОН РК, НАН РК. Серия физико-математическая. - 2002. -№ 3. - С.79-84.

[14] Иманчиев А.Е. О существовании изолированного решения нелинейной многоточечной краевой задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Материалы V-международной научной конференции "Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры", Актобе, 9-10 октября 2009, С. 64-66.

[15] Бакирова Э.А. О признаке однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений // Известия НАН РК. Сер. физ-матем. - 2005. - №1. -С. 95-102.

[16] Бакирова Э.А. О необходимых и достаточных условиях однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Математический журнал. - 2005. -Т. 5, № 3. - С. 25-34.

[17] Кадирбаева Ж.М. Об одном алгоритме нахождения решения линейной двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Матем. журнал МОН РК. - 2009. - Т. 9. -№ 2. - С. 64-70.

[18] Кадирбаева Ж.М. Об однозначной и кор-ректной разрешимости ли-нейной двухточечной крае-вой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Математический журнал. - Алматы, 2009. Т. 9, № 4. -С. 63-71.

[19] Akzhigitov E.A., Kadirbayeva Zh.M. On a solvability of two-point boundary value problem for loaded differential equations // Science review. S.Seifullin Kazakh Agro Technical University. - 2012. - № 2(10). –С. 35-40.

[20] Джумабаев Д.С., Илиясова Г.Б. Об одной численной реализации метода параметризации решения линейной краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнений // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. - 2014. - № 2. –С. 275-280.

REFERENCES

[1] Nakhushev A.M. On an approximate method of solving boundary value problems for differential equations and its applications to the dynamics of soil moisture groundwater. *Differential equations,* **1982,** 18, 1, 72-81 (in Russ.).

[2] Nakhushev A.M. Loaded equations and their applications. M.: Science, **2012**. 232 p. (in Russ.).

[3] Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I. Loaded equation as a perturbation of differential equations. Almaty: Science, **2010**. 334 p. (in Russ.).

[4] Nakhushev A.M. Equations of mathematical biology. M.: Visshaya Shkola, **1995**. 205 p. (in Russ.).

[5] Nakhushev A.M. Boundary value problems for loaded integro-differential equations of hyperbolic type and some of their applications to the forecast of soil moisture. *Differential equations*, **1979**, 15, 1, 96-105 (in Russ.).

[6] Abdullaev V.M., Aida-zade K.R. On a numerical solution of loaded differential equations. *Journal of Computational Mathematics and mathematical physics,* **2004,** 44, 9, 1585-1595 (in Russ.).

[7] Abdullaev V.M., Aida-zade K.R. Numerical solution of optimal control problems with unseparated multipoint and integral conditions. *Journal of Computational Mathematics and mathematical physics,* **2012**, 52, 12, 2163-2177 (in Russ.).

[8] Abdullaev V.M., Aida-zade K.R. Numerical method of solution to loaded nonlocal boundary value problems for ordinary differential equations. *Journal of Computational Mathematics and mathematical physics*, **2014**, 54, 7, 1096-1109 (in Russ.).

[9] Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. On Numerical Solution to Loaded Systems of Ordinary Differential Equations with Non-separated Multipoint and Integral Conditions. *Numerical Analysis and Applications*, **2014**, 17, 1, 1-16 (in Eng.).

[10] Dzhumabaev D.S. Criterions of the unique solvability of a linear boundary value problem for ordinary differential equation. *Journal of Computational Mathematics and mathematical physics*, **1989**, 29, 1, 50-66 (in Russ.).

[11] Dzhumabaev D.S. Approximation of problem of finding a bounded solution by two-point boundary value problems. *Differential equations*, **1987**, 23, 12, 2188-2189 (in Russ.).

[12] Dzhumabaev D.S., Imanchiev A.E. Correct solvability of linear multipoint boundary value problem. *Mathematical Journal*, **2005**, 5, 1, 30-38 (in Russ.).

[13] Imanchiev A.E. Necessary and sufficient conditions of the unique solvability of linear multi-point boundary value problem. *Izvestia NAS RK. Seria phys.-math.,* **2002**, 3, 79-84 (in Russ.).

[14] Imanchiev A.E. On an existence of isolated solution of the nonlinear multi-point boundary value problem for systems of ordinary differential equations. *Proceedings of the V-international scientific conference "Problems of differential equations, analysis and algebra".,* **2009**, 64-66 (in Russ.).

[15] Bakirova E.A. On a criterion of the unique solvability of a two-point boundary value problem for loaded differential equations. *Izvestia NAS RK. Seria phys.-math.,* **2005**, 1, 95-102 (in Russ.).

[16] Bakirova E.A. On necessary and sufficient conditions of the unique solvability of a two-point boundary value problem for loaded differential equations. *Mathematical Journal*, **2005**, 5, 3, 25-34 (in Russ.).

[17] Kadirbayeva Zh.M. On one algorithm of finding solution of linear two-point boundary value problem for loaded differential equations. *Mathematical Journal*, **2009**, 9, 2, 64-70 (in Russ.).

[18] Kadirbayeva Zh.M. On the unique and correct solvability of a linear two-point boundary value problem for loaded differential equations. *Mathematical Journal*, **2009**, 9, 4, 63-71 (in Russ.).

[19] Akzhigitov E.A., Kadirbayeva Zh.M. On a solvability of two-point boundary value problem for loaded differential equations. *Science review*. S.Seifullin Kazakh Agro Technical University, **2012**, 2(10), 35-40 (in Eng.).

[20] Dzhumabaev D.S., Iliyassova G.B. On one numerical implementation of the parameterization method for solving of linear boundary value problem for loaded differential equations. *Izvestia NAS RK. Seria phys.-math.,* **2014**, 2, 275-280 (in Russ.).

Э.А. Бакирова, Ж.М. Қадырбаева

Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан

ЖҮКТЕЛГЕН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН СЫЗЫҚТЫ КӨПНҮКТЕЛІ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІЛІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

Аннотация. Параметрлеу әдісі негізінде жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін сызықты көпнүктелі шеттік есеп зерттеледі. Параметрлеу әдісінің маңызы жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі қарастырылып отырған кесінді жүктеу нүктелерімен бөліктерге бөлінеді және бастапқы есеп параметрі бар пара пар шеттік есепке келтіріледі. Параметрі бар шеттік есептің шешімі параметр және функция жұптар жүйесі тізбегінің шегі ретінде анықталады. Параметрлер шеттік шарттар матрицалары және жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі арқылы анықталатын сызықты алгебралық теңдеулер жүйесінен табылады, ал функциялар табылған параметрлер мәндері үшін Коши есебінің шешімдері болады. Жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты көпнүктелі шеттік есептің шешімін табудың алгоритмі ұсынылады. Зерттеліп отырған есептің шешімі бар болуы мен жалғыздығын қамтамасыз ететін ұсынылған алгоритмнің жинақтылығының шарттары тағайындалған. Есептің бірмәнді шешілімділігінің жеткілікті шарттары бастапқы берілімдер терминінде алынған.

Түйін сөздер: шеттік есеп, параметрлеу әдісі, жүктелген дифференциалдық теңдеу, алгоритм.