N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 5, Number 309 (2016), 176 – 187

UDC 517.956.32

G. A. Besbayev, A.A. Kopzhasarova, M.B. Saprygina, A.Sh. Shaldanbayev

M. Auezov South Kazakhstan State University
shaldanbaev51@mail.ru

ON SELF-CONJUGATION OF THE OPERATOR OF GOURSAT IN CRANE SPACE

Abstract. The wave equations are used in various branches of science and techniques, such as hydrologies, seismology and when studying the dynamics of an advance of waves in liquid and gas. Nevertheless, boundary value problems of this equation are little studied. In this work an attempt of studying of spectral properties of a nonlocal problem by methods of the theory of operators in spaces with indefinite metrics is made.

Keywords: wave equation, nonlocal boundary conditions, the regular solubility, range, operator of Goursat, Crane space, self-conjugacy, automorphisms.

ӘОЖ 517.956.32

Г.А. Бесбаев, А.А. Көпжасарова, М.Б. Сапрыгина, А.Ш. Шалданбаев

Онтүстік-Қазақстан мемлекеттік университеті

ГУРСА ОПЕРАТОРЫНЫҢ КРЕЙН КЕҢІСТІГІНДЕГІ ЖАЛҚЫЛЫҒЫ ТУРАЛЫ

Аннотация. Толқындық теңдеулер гидрология, сейсмология сияқты ғылым мен техниканың әр түрлі салаларында кездеседі, алайда, сұйық және газ толқындардың таралу динамикасын зерттегенде теңдеудің осы шеттік мәселесі аз зерттелген. Шартарапты мәселелеріне арналған жұмыстар өте аз.

Бұл мақалада индефиниттік метрикалармен кеңістіктірде операторлар теориясының әдістерімен шартарапты есептің спектрлік қасиеттерін зерттеуге әрекет жасалынды.

Түйін сөздер: толқындық теңдеулер, шартарапты шекаралық шарттар, тұрақты шешілуі, спектр, Гурс операторы, Крейна кеңістігі, өзін-өзі түйіндес, автоморфизмы.

1.Кіріспе. Гиперболалық теңдеулердің шекаралық есептері аз зерттелген. Мұның бір себебі, оның характеристикалық формасының бір таңбалы болмауында болса керек, дәл осы себепті, вариациялық әдістер-де жарамайды . Тағы да, бір себебі [1], ертеректе француз ғалымы Ж-Адамар өз еңбектерінде гиперболалық теңдеулерге бастапқы есептер қолайлы, екеніне, назар аударған.

Өткен ғасырдың 60- жылдарынан бастап, математикалық физика саласына сызықтық операторлар теориясы қолданыла бастады, оған мұрындық болған К. Фридрихс [2], Дж.Ф. Нейман [3] және С.Л.Соболевтің [4] еңбектері болса керек . Нейманның еңбектерінен бастау алған, М.И.Вишик [5] өзінің әйгілі операторларды ширату теориясын жасады , бұл еңбек Қазақстанда М.Өтелбаев [6] пен Калменовтың [7] еңбектерінде жалғасын тапты . Өкінішке орай , бұл теориялар-да гиперболалық теңдеулерде сәтсіздікке ұшырады, оның себебі мынада .Сызықтық операторлар теориясын шекаралық есептерге қолданған сәтте кішік (минимальный) оператор мен ұлық (максимальный) операторларды тұрғызу қажет болады , сонда L_0 кішік оператор болса оның сыңары (сопряженный) L_0^* ұлық оператор , болады , яғни көп жағдайда (әркез емес) $L_0 \subset L_0^*$ шарты орындалады. Сонда біздің шекаралық есебіміз осы екі оператордың арасында жатуы керек , яғни

$$L_0 \subset L \subset L_0^*$$

Әлгі, операторларды шыйрату (кеңіту) теориясында L_0 операторының қайтымды болуы талап етіледі [7,57 б], яғни шектеулі L_0^{-1} - кері операторы бар болуы қажет , бұл шарт әркез орындала бермейді , мысалы,

$$L_0 u = u_{xx} - u_{yy} , D(L_0) = C_0^{\infty}(\Omega) ,$$

$\Omega = [0,1]Ч[0,1]$, болса, онда

$$u_{xx}(x,y) = sinm\pi x \cdot sinm\pi y , n, m = 1,2, \ldots$$

функциялары үшін

$$L_0 u_{mn} = \pi^2(m^2 - n^2)u_{mn} , m, n = 1,2, \ldots$$

теңдіктері орындалары, айдан анық , мұнан, біз $\lambda = 0$ шамасының L_0

операторының шексіз еселі меншікті мәні екенін көреміз, яғни L_0^{-1} операторы жоқ .

Десек-те, интегралдық кейіп пен Риман – Адамар, және алғы бағалау әдістері бойынша, гиперболалық теңдеулердің біраз шекаралық есептері Т.Ш. Калменовтың еңбектерінде зерттеледі , және оның монографиясында [7] көрініс тапты.Сондай-ақ, [8-15] еңбектер-де осы мәселенің төңірегінде,біздің зерттеуіміз барысында [16-19] еңбектер басшылыққа алынды,зерттеу нысанының кейбір мәселелері [20] еңбекте қарастырылды.

Толқын теңдеуінің бір ерекше қасиеті, оның нақты характеристикаларының болуында , алғы шартты , параллел жатқан екі характеристиканың тек біреуінде ғана беруге болады , екіншісі бос болуы керек , міне осы жай толқын теңдеуіне шартарапты (нелокальный) есепті қоюға негіз болды . Бұрынырақ біз [14],[21] еңбектерде біз толқын теңдеуінің шартарапты есебінің тұрлаулы (регулярный) шешілетінін көрсетеміз, яғни шешімнің бар екенін, және оның бастапқы шарттарға үзіксіз тәуелді екенін дәлелдегенбіз,ал [22] еңбекте вөлтерлі есептер класы анықталды. Бұл еңбекте біз толқындық оператордың Крейннің кеңістігіндегі жалқылық белгісін таппақбыз.

Есептің қойылуы.

Характеристикалық айнымалыларға көшкен сәтте толқындық оператор, мына,

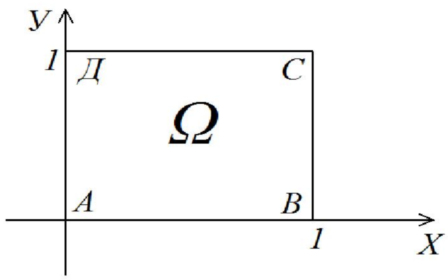
$$Lu = u_{xy}, (xy) \in D \tag{1}$$

$$u\big|_{AB} = 0, u\big|_{BC} = 0 \tag{2}$$

түрге енеді (1-суретке қара), сонда оның сыңарлы қандай болады деген сұрақ бізді мазалайды. Бұл мәселені шешу үшін Гриннің, мына,

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \tag{3}$$

формуласына жүгінеміз.



1-сурет

Егер де $Q(x,y)=\dfrac{1-u_y}{2}, P(x,y)=\dfrac{1\cdot(-u_x)}{2}$, десек онда, мынадай,

$\oint\limits_C \dfrac{-u_x}{2}dx+\dfrac{u_y}{2}dy=\iint\limits_D \dfrac{u_{yx}+u_{xy}}{2}dxdy=\iint\limits_D u_{yx}dxdy$ болар еді.

Ал егер, былай,

$$Q=\frac{v\cdot u_y}{2}, P=\frac{-u_x}{2}v$$

іздесек, онда, мынадай,

$$\oint\limits_C \frac{-u_x v}{2}dx+\frac{u_y v}{2}dy=\frac{1}{2}\iint\limits_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}(u_y v)+\frac{\partial}{\partial y}(u_x v)\right]dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_\Omega\left[(u_{yx}+u_{xy})v+u_y v_x+u_x v_y\right]dxdy=$$

$$=\iint\limits_\Omega u_{yx}vdxdy+\frac{1}{2}\iint\limits_\Omega(u_y v_x+u_x v_y)dxdy;$$

мұнан

$$\oint\limits_C \frac{-u_x\bar v}{2}dx+\frac{u_y\bar v}{2}dy=(Lu,v)+\frac{1}{2}\iint\limits_\Omega(u_y\bar v_x+u_x\bar v_y)dxdy \qquad (4)$$

Енді осы формуладағы u мен v –ның орындарын ауыстырсақ, онда

$$\oint\limits_C \frac{-v_x\bar u}{2}dx+\frac{v_y\bar u}{2}dy=(Lv,u)+\frac{1}{2}\iint\limits_\Omega(v_y\bar u_x+v_x\bar u_y)dxdy\cdot$$

Комплекс жұптасына көшсек, онда, мына,

$$\oint\limits_C \frac{-\bar v_x u}{2}dx+\frac{\bar v_y u}{2}dy=(u,Lv)+\frac{1}{2}\iint\limits_\Omega(\bar v_y u_x+\bar v_x u_y)dxdy \quad (5)$$

формуланы аламыз.

Енді, жоғарыдағы, (4) формуладан (5) формуланы алып тастасақ, онда, мына,

$$(Lu,v)-(u,Lv)=\oint\limits_C \frac{-u_x\bar v}{2}dx+\frac{u_y\bar v}{2}dy-\oint\limits_C \frac{-\bar v_x u}{2}dx+\frac{\bar v_y u}{2}dy=$$

$$=\oint\limits_C \frac{(-u_x\bar v+\bar v_x u)}{2}dx+\oint\limits_C \frac{u_y\bar v-\bar v_y u}{2}dy. \qquad (6)$$

Енді осы алынған (6) формуланы, жоғарыдағы □ABCD –төртбұрышына қолданайық.

$$AB: dx=0, \int\limits_{AB} \frac{u_y\overline{v}-\overline{v}_y u}{2}dy\left[u_{AB}=0\right]=\frac{1}{2}\int\limits_{AB} u_y\overline{v}dy=0;$$

$$BC: dy=0, \frac{1}{2}\int\limits_{BC}[-u_x\overline{v}+\overline{v}_x \underset{0}{\underset{\parallel}{u}})dx=\frac{1}{2}\int\limits_{BC} -u_x\overline{v}dx=0;$$

$$CD: dx=0, \frac{1}{2}\int\limits_{CD}(u_y\overline{v}-\overline{v}_y u)dy;$$

$$DA: dy=0, \frac{1}{2}\int\limits_{DA}(-u_x\overline{v}+\overline{v}_x u)dx;$$

$$(u\overline{v})_y=u_y\overline{v}+u\overline{v}_y, u_y\overline{v}=(u\overline{v})_y-u\overline{v}_y,$$

$$AB: \frac{1}{2}\int\limits_{AB} u_y\overline{v}dy;$$

$$BA: \frac{1}{2}\int\limits_{BA} u_y\overline{v}dy=\frac{1}{2}\int\limits_{BA}[(u\overline{v})_y-u\overline{v}_y]dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1[(u\overline{v})_y-\underset{0}{\underset{\parallel}{u}}\,\overline{v}_y]dy=\frac{1}{2}(u\overline{v})\Big|_1^0=\frac{1}{2}[u\overline{v}(0)-u\overline{v}(1)]=0$$

$$CB: \oint\limits_{CB} -u_x\overline{v}dx=-\int\limits_1^0 u_x\overline{v}dx=\int\limits_0^1 u_x\overline{v}dx=\begin{vmatrix}(u\overline{v})_x=u_x\overline{v}+u\overline{v}_x\\ u_x\overline{v}=(u\overline{v})_x+-u\overline{v}_x\end{vmatrix}=$$

$$=\int\limits_0^1[(u\overline{v})_x-\underset{0}{\underset{\parallel}{u}}\,\overline{v}_x]dx=u\overline{v}(1)-u\overline{v}(0)=0.$$

$$AD: \frac{1}{2}\int\limits_{AD}(-u_x\overline{v}+\overline{v}_x u)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1[-u_x\overline{v}+\overline{v}_x u]dx=\left|\underset{\text{дейік}}{v|_{AD}=0}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1(\overline{v}_x u)_{AD}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1[(\overline{v}u)_x-\underset{0}{\underset{\parallel}{u_x}}\overline{v}]dx=\frac{1}{2}(\overline{v}u)\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}[\underset{0}{\underset{\parallel}{\overline{v}(1,0)}}u(1,0)-\overline{v}(0,0)\underset{0}{\underset{\parallel}{u(0,0)}}]=0;$$

$$DC: \frac{1}{2}\int\limits_{DC}(u_y\overline{v}-\overline{v}_y u)dy=\left|\underset{\text{дейік}}{v|_{DC}=0}\right|=-\frac{1}{2}\int\limits_{DC}\overline{v}_y u dy=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\overline{v}_y u dy=\left|(\overline{v}u)_y=\overline{v}_y u+\overline{v}u_y\right|=$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 [(\bar{v}u)_y - \underset{0}{\underset{\parallel}{\bar{v}\,u_y}}]dy = -\frac{1}{2}[\bar{v}(1,1)\underset{0}{\underset{\parallel}{u(1,1)}} - \underset{0}{\underset{\parallel}{\bar{v}(1,0)}}u(1,0)] = 0\cdot$$

Лемма 1. Мына,

$$Lu = u_{xy} \tag{1}$$

$$u\big|_{AB} = 0, u\big|_{BC} = 0 \tag{2}$$

толқындық оператордың $L^2(\Omega)$ кеңістігіндегі сыңарласы, келесі,

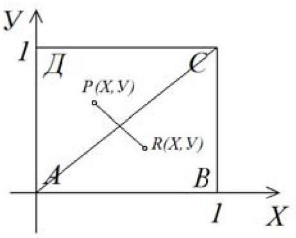
$$L^{+}v = v_{xy} \tag{7}$$

$$v\big|_{AD} = 0, v\big|_{DC} = 0 \tag{8}$$

оператор болады.

Табылған (7) –(8) оператор нағыз сыңар болуы үшін оның анықталу аймағы мейлінше кең болуы керек, біз бұл мәселеге тоқталмаймыз,

Толқын теңдеуіне шекаралық есептерді характеристикалық төртбұрыш ішінде қойған сәтте бірлік квадраттың қозғалыстарының тобы маңызды қызмет атқарады. Бұл топ сол квадраттың автоморфизмдері арқылы көрінеді. Енді осы мәселеге аз-маз тоқталайық (2-3суреттерге қара).

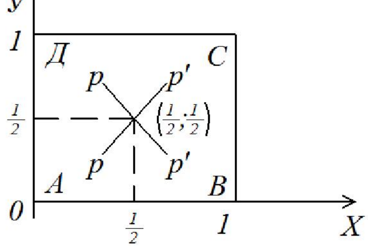


2 - сурет

S бейнеуі $P(x,y)$ нүктесін $P'(y,x)$ нүктесін сәйкестендіреді. Бұл дегеніміз AC-диагонәліне қарағанда айтадағы бейнелеу. Шынында да, егер PP' кесіндісінің қақ ортасының коорнатларын тапсақ, мындай

$$x_0 = \frac{x+y}{2}, y_0 = \frac{y+x}{2},$$

демек $y_0 = x_0$, бұл дегеніміз P мен P' нүктелерінің AC деп бірдей қашықтықта жатқанын көрсетеді.



3-сурет

S–бейнеуі $P(x, y)$ нүктесіне $P'(1-x, 1-y)$ нүктесін сәйкестендірсін делік. Тағы да PP' – кесіндісінің ортасынақ координаталарын табайық. $x_0 = \frac{1+1-x}{2} = \frac{1}{2}, y_0 = \frac{y+1-y}{2} = \frac{1}{2}$. Демек, бұл бейнеу центрі $O(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ болатын

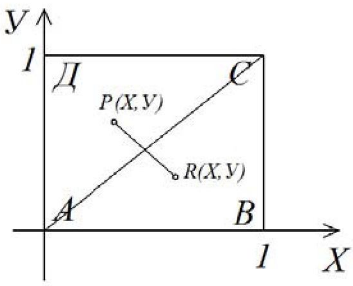
2-сурет. симметриялы бейнеу болады.

S–бейнеуі $P(x, y)$ нүктесіне $P'(1-y, 1-x)$ нүктесін сәйкестендірсін делік. Бұл бейнеу BD диагонәліне қарағанда айнадағы бейне болады. Шынында да PP' –кесіндісінің ортасын табайық.

$$x_0 = \frac{1+x-y}{2}, y_0 = \frac{y+1-x}{2}$$

Онда $1 - x_0 = 1 - \frac{x+1-y_0}{2} = \frac{2-x-1+y_0}{2} = \frac{1-x+y}{2} = y_0$. Демек PP' кесіндісінің центрлері, мына, $y = 1 - x$ түзудің бойында, яғни BD диагонәлінің бойында жатыр. Басқа автоморфизмдер де осылай зерттеледі.

Толқын теңдеуіне шекаралық есептерді характеристикалық төртбұрыш ішінде қойған сәтте бірлік квадраттың қозғалыстарының тобы маңызды қызмет атқарады. Бұл топ сол квадраттың автоморфизмдері арқылы көрінеді. Енді осы мәселеге аз-маз тоқталайық (4-5 суреттерге қара).



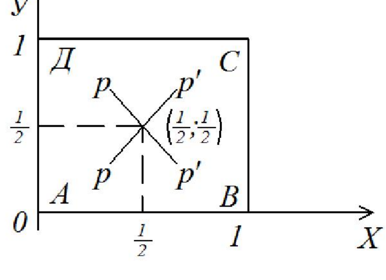
4-сурет

S бейнеуі $P(x, y)$ нүктесін $P'(y, x)$ нүктесін сәйкестендіреді. Бұл дегеніміз АС-диагонәліне қарағанда айтадағы бейнелеу. Шынында да, егер PP' кесіндісының қақ ортасының коорнатларын тапсақ, мындай

$$x_0 = \frac{x+y}{2}, y_0 = \frac{y+x}{2},$$

демек $y_0 = x_0$, бұл дегеніміз

P мен P' нүктелерінің АС деп бірдей қашықтықта жатқанын көрсетеді.



5-сурет

S–бейнеуі $P(x,y)$ нүктесіне $P'(1-x,1-y)$ нүктесін сәйкестендірсін делік. Тағы да PP' – кесіндісінің ортасынақ координаталарын табайық. $x_0 = \frac{1+1-x}{2} = \frac{1}{2}, y_0 = \frac{y+1-y}{2} = \frac{1}{2}$. Демек, бұл бейнеу центрі $O(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ болатын симметриялы бейнеу болады.

S–бейнеуі $P(x,y)$ нүктесіне $P'(1-y,1-x)$ нүктесін сәйкестендірсін делік. Бұл бейнеу BD диагонәліне қарағанда айнадағы бейне болады. Шынында да PP' –кесіндісінің ортасын табайық.

$$x_0 = \frac{1+x-y}{2}, y_0 = \frac{y+1-x}{2}$$

Онда $1-x_0 = 1-\frac{x+1-y_0}{2} = \frac{2-x-1+y_0}{2} = \frac{1-x+y}{2} = y_0$. Демек PP' кесіндісінің центрлері, мына, $y=1-x$ түзудің бойында, яғни BD диагонәлінің бойында жатыр. Басқа автоморфизмдер де осылай зерттеледі.

Гилберттің H кеңістігінде, мынадай J-автоморфизм анықталсын делік және ол төмендегі қасиеттерге ие болсын:

1) J унитар оператор;

2) J – жалқы, яғни $J^* = J$.

Сонда, $J^{-1} = J$ болады, шынында-да, бірінші қасиет бойынша

$J^* J = JJ^* = \mathrm{I}$ – бірлік оператор,

ал екінші қасиет бойынша, $J^* = J$, демек $J^2 = J$, мұнан $J = J^{-1}$, мұндай операторларды инволюция деп атайды.

Әлгі, гилберттік H кеңістігінде жаңа скаляр көбейтінді енгізейік, скаляр көбейтінді, мынадай,

$$[x,y] = (Jx,y) \tag{9}$$

болсын. Енді, мынадай, $P = \frac{\mathrm{I}-J}{2}$, $Q = \frac{\mathrm{I}+J}{2}$ проекторларды енгізейік, шынында да

$$P^2 = \frac{\mathrm{I}-J}{2} * \frac{\mathrm{I}-J}{2} = \frac{\mathrm{I}-J-J+J^2}{4} = \frac{2\mathrm{I}-2J}{4} = \frac{\mathrm{I}-J}{2} = P,$$

$$P^* = \frac{\mathrm{I}^* - J^*}{2} = \frac{\mathrm{I}-J}{2} = P;$$

$$Q^2 = \frac{\mathrm{I}+J}{2} * \frac{\mathrm{I}+J}{2} = \frac{\mathrm{I}+J+J+J^2}{4} = \frac{2\mathrm{I}+2J}{4} = \frac{\mathrm{I}+J}{2} = Q.$$

Сондай-ақ,

$$JP = \frac{\mathrm{J}-J^2}{2} = \frac{\mathrm{J}\text{ - }\mathrm{I}}{2} = -\frac{\mathrm{I}-J}{2} = -P,$$

$$JQ = \frac{\mathrm{J} + J^2}{2} = \frac{\mathrm{J} + \mathrm{I}}{2} = Q \cdot$$

Бастапқы кеңістікті, былай,

$$\mathrm{H} = \mathrm{PH} + \mathrm{QH} \tag{10}$$

деп екіге жіктейік. Сонда, егер $x \in PH$ болса, онда $f \in H$ элемент табылып, мына, $x = Pf$ теңдігі орындалады, мұнан

$$[x, y] = (Jx, y) = (JPf, y) = -(Pf, y) = -(P^2 f, y) = -(Pf, Py),$$

демек,

$$[x, x] = -(Pf, P^2 f) = -\|Pf\|^2 \leq 0.$$

Сол сыйақты, егер $y \in QH$ болса, онда $g \in H$ элемент табылып, мына, $y = Qg$ теңдігі орындалар еді, мұнан

$$[x, y] = (Jx, y) = (x, Jy) = (x, JQg) = (x, Qg) = (x, Q^2 g) = (Qx, Qg),$$

мұнан,

$$[y, y] = (QQg, Qg) = (Q^2 g, Qg) = (Qg, Qg) = \|Qg\|^2 \geq 0.$$

Демек, PH-ішкеңістігінің элементтері оң емес, ал QH-ішкеңістігінің элементтері теріс емес.

Анықтама 1. Егер, жоғарыдағы, (10) формуладағы PH және QH – кеңістіктерінің екеуі-де көпсалалы болса, онда [x,y]-скаляр көбейтіндісімен жабдықталған H кеңістігін Крейннің кеңістігі дейді. Егер де олардың біреуі сансалалы болса, онда Понтрягиннің кеңістігі дейді.

Әлгі, J-операторы әртүрлі кейіпте кездесуі мүмкін, енді солардың мысалдарына тоқталайық. Бұл үшін, жоғарыдағы, автоморфизмдерге назар аударайық. Біздің ойымызша оларды J операторын құруға пайдалануға болады.

1) J-операторын, былай,

$$Ju(x, y) = u(1 - x, 1 - y) \tag{11}$$

анықтайық, сонда $J^2 u(x, y) = u(x, y) = \mathrm{I}$ болары айдан анық, сондай-ақ

$$(Ju, v) = \iint\limits_{\Omega} u(1-x, 1-y)\overline{v}(x, y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 u(1-x, 1-y)\overline{v}(x, y)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 u(1-x, \eta)\overline{v}(x, 1-\eta)d\eta = \int\limits_0^1 d\eta \int\limits_0^1 u(1-x, \eta)\overline{v}(x, 1-\eta)dx =$$

$$=\int_0^1 d\eta\int_0^1 \overline{u}(\xi,\eta)\overline{v}(1-\xi,1-\eta)d\xi=\int_0^1\int_0^1 u(x,y)\overline{v}(1-x,1-y)dxdy=$$
$$=(u,Jv),$$

демек, $J^*=J$. Сол сыйақты,

$$(Ju,Jv)=\int_0^1 d\eta\int_0^1 u(1-x,1-y)\overline{v}(1-x,1-y)dxdy=\begin{vmatrix}1-x=\xi,\\1-y=\eta\end{vmatrix}=$$
$$=\int_0^1\int_0^1 u(x,y)\overline{v}(x,y)dxdy=(u,v),\Rightarrow$$
$$(J^*Ju,v)=(u,v),\Rightarrow J^*J=\mathrm{I}=JJ^*.$$

Сонымен, $J^*J=JJ^*=\mathrm{I}$ және $J^*=J$.

Енді Крейннің кеңістігіндегі A – операторы қай кезде жалқы боларын анықтайық, бұл үшін, мына,

$$[Ax,y]=[x,Ay]$$

теңдіктің орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

$$[Ax,y]=[JAx,y]=(x,(JA)^*y)=(x,A^*Jy),$$
$$[x,Ay]=[Jx,Ay]=(x,JAy),\Rightarrow,$$
$$(x,(A^*J-JA)y)=0,\Rightarrow(A^*J-JA)y=0,\Rightarrow$$
$$JA=A^*J,\Rightarrow A=JA^*J,\, AJ=JA^*.$$

Теорема 1. J - инволюциясы арқылы анықталған Крейннің кеңістігінде сызықтық A операторы жалқы болуы үшін, мына екі теңдіктің

$$1)\ JA=A^*J;\quad 2)\ AJ=JA^* \tag{12}$$

бірінің орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

Енді осы теңдіктердің біздің операторымыз (1)-(2) үшін қай кезде орындалатынын зерттейік.

2.Зерттеу әдісі

Зерттеу барысында индефинитті кеңістіктердегі операторлар теориясы, және метриканы тұрғызу үшін топтар теориясы қолданылды.

3.Зерттеу нәтиежесі

Теорема 2. Мына,

$$Lu=u_{xy} \tag{13}$$

$$u\big|_{AB} = 0, \quad u\big|_{BC} = 0 \tag{14}$$

толқындық оператор, келесі,

$$[x, y] = (Jx, y) \tag{15}$$

скаляр көбейтінді бойынша анықталған Крейннің кеңістігінде жалқы оператор, мұндағы,

$$Ju(x, y) = u(1-x, 1-y), \text{ немесе } Ju(x, y) = u(y, x),$$

$(0,0)$ кәдімгі $L^2(\Omega)$ -кеңістігіндегі скаляр көбейтінді.

4.Талқысы.

Шынында да,

$$Ju(x, y)\big|_{AD} = u(1-x, 1-y)\big|_{AD} = u(1-x, 1) = u\big|_{BC} = 0;$$
$$Ju(x, y)\big|_{DC} = u(1-x, 1-y)\big|_{DC} = u(0, 1-y) = u\big|_{AB} = 0.$$

Демек, егер $u(x, y) \in D(L)$ болса, онда $Ju = u(1-x, 1-y) \in D(L^*)$ және бұл сәтте, мына,

$$JLu = Ju_{xy} = u_{xy}(1-x, 1-y),$$
$$L^+Ju = L^+u(1-x, 1-y) = u_x(1-x, 1-y),$$

теңдіктер орындалады, мұнан $JL = L^+J$.

2) Енді $Ju(x, y) = u(y, x)$ болсын делік, онда

$$Ju(x, y)\big|_{AD} = u(y, x)\big|_{AD} = u(y, x)\big|_{y=0} = u(0, x) = u\Big|_{AB} = 0;$$
$$Ju(x, y)\big|_{DC} = u(y, x)\big|_{DC} = u(y, x)\big|_{x=1} = u(y, 1) = u\Big|_{BC} = 0.$$

Демек, егер $u \in D(L)$ болса, онда $Ju \in D(L^*)$ болады, және бұл сәтте, мына,

$$JLu = Ju_{xy} = u_{xy}(y, x);$$
$$L^+Ju = L^+u(y, x) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(y, x) = u_{xy}(y, x)$$

теңдіктері орындалады, мұнан $JL = L^+J$.

Ескерту 1. J -операторын басқа түрде де алуға болады, бұл сәттегі, назар аударар нәрсе, ол бастапқы оператордың шекаралық шартын оған сыңар оператордың шекарасына аударғаны.

Ескерту 2. Егер $u_n \to u, Lu_n \to f$ болса, онда анықтама бойынша u функциясы $Lu = f$ теңдеуінің әлді шешімі, бірақта $u \notin D(L)$ болуы да мүмкін. Егер L - қабынатын болса, онда $u \in D(L)$ және анықтама бойынша $\overline{L}u = f$. Міне осы тұста, бізге қабындыру амалы керек екен.

5.Қорытынды.

Вөлтерлі толқын операторлары Крейннің кеңістігінде жалқы болады екен,сондықтан оларға спектрәлді теорияны қолдануға болады.

ӘДЕБИЕТ

[1] Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений частными производным . -М, Наука , 1978 , -352с.

[2] Friedrichs K .O Symmetric . hyperbolic of Liner differential equations , Comm. Pure Apple 7 Mash., 7(1954) , 345-392.

[3] I. Von Neumahn . Allgemaine Eigenwertlheorie Hermit -esher funktional Operatoren, Math, 102, 1929, p.49-131.

[4] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике , М, Наука , 1988 .

[5] Вишик М.И . Об общих краевых задачах для эллиптических уравнений , дифференциальных уравнений , Труды ММО , 1989 ,1952, т.1, 152с .

[6] Отелбаев М. Кальменов Т .Ш. О регулярных краевых задачах для уравнения Лаврентьева - Бицадзе , Дифф . уравнения , 1981, Т.А. , №5, с. 873-886 .

[7] Кальменов Т.Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа , Шымкент:Гылым ,1993,327с.

[8] Кальменов Т.Ш. О спектре одной сопреженной задачи для волнового уравнения , Весник А.Н Каз .1982, №2,с.63-66.

[9] Кальменов Т.Ш. Спектр краевых задачи со смещеннем для волнового уравнения , Диффенц. уравнения .1983 ,т19, №1,с.75-78

[10] Бияров Б.Н., Кальменов Т.Ш. О нелокальной вольнерровой задаче для гиперболического уравнения, Известия АН Каз ССР, сер. физ-математ, 1988 , №5, с.13-16.

[11] Кальменов Т.Ш. О регулярных краевых задачах для волнового уравнения , Диффенц. уравнения .1981 ,т 17, №6,с.1105-1121.

[12] Садыбеков М.И, О задаче Дирихле для для волнового уравнения , Диффенц. уравнения . Функцион . анализ и по приложения Алма -Ата Каз . ГУ , 1988 ,т 17, №6,с.61-70.

[13] Садыбеков М.И, Кальменов Т.Ш. О задаче Дирихле и нелокольных краевых задачах для волнового уравнения, Диффенц. уравнения, 1990 , т.26, №1, с.60-65.

[14] Мелдебекова С . , Шалданбаев А.Ш. О реулярной разрешимости одной нелокальной краевой задачи волнового уравнения , Наука и образования ЮК , 2005 №6(46), с.105-109.

[15] Нахушев А.М. Об одном классе линейных уравненых задач для гиперболического и смешного типов уравнении второго порядка. Нальчих ,
Эльбурс .1992, 155с.

[16] Мизохата С.Теория уравнений с частным производными , М. Мир ,1977, с. 504.

[17] Brislown C. Kernels of trace class operators , Proc . Amer 7 Nath. Soc , 1988 , v.104 , №4, P.1181-1190.

[18] Лидский В.Б. Несамосопряженные операторы имеющии след , Доклады А.Н ССР , 1959 , т. 105, №3, Р.485-488.

[19] Нерсесян А.Б. К теории интегральных уравнений типа Вольтера , Доклады А.Н ССР , 1964 , т. 155, №5, Р.1049-1051.

[20] Шалданбаев А.Ш. Спектральные разложения корректных- некорректныхначально краевых задач для некоторых классов дифференциальных уравнений, Germanu, Saarbruchen: LAP LAMRET Acfdemic Pyblishing. http ;dob . d-nb. Dl. Emailinfa@lappyblishing com, 2011 ,193с.

[21] Сапрыгина М.Б., Байсейтова У.С., Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О. О регулярной разрешимости нелокальной краевой задачи волнового уравнения., Известия Национальной академии наук РК, ISSN 1991-346X Серия физико-математическая. № 2. 2016,с.48.

[22] Сапрыгина М.Б., Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О., Байсейтова У.С. Критерии вольтерровости нелокальной краевой задачи волнового уравнения .,Известия Национальной академии наук РК, ISSN 1991-346X Серия физико-математическая. № 2. 2016,с.147.

[23] Треногин В.А. Функциональный анализ. –Москва:Наука, 1980. -494 с.

REFERENCES

[1] Hadamard Zh. An initial value problem for the simple equations quotients a derivant. - M, Science, 1978, - 352 pages.

[2] Friedrichs K. O Symmetric. hyperbolic of Liner differential equations, Comm. Pure Apple 7 Mash., 7(1954), 345-392.

[3] I. Von Neumahn. Allgemaine Eigenwertlheorie Hermit - esher funktional Operatoren, Math, 102, 1929, p.49-131.

[4] Sobolev S. L. Some applications of the functional analysis in mathematical physics, M, Science, 1988.

[5] Vishik M. I. About the common boundary value problems for elliptical equations, differential equations, Works MMO, 1989, 1952, t.1, 152 pages.

[6] Otelbayev M. Kalmenov T. Sh. About the regular boundary value problems for Lavrentyev's equation - Bitsadze, Diff. equations, 1981, T.A., No. 5, page 873-886.

[7] Kalmenov T.Sh. Boundary value problems for the simple equations in partial derivatives of hyperbolic type, Shymkent:gylym, 1993,327s.

[8] Kalmenov T.Sh. About a range of one conjugate task for a wave equation, Vesnik A.N Kaz.1982, No. 2, page 63-66.

[9] Kalmenov T.Sh. A boundary value problem range with smeshchenny for a wave equation, Diffents. equations.1983, t19, No. 1, page 75-78

[10] Biyarov B. N., Kalmenov T.Sh. About a nonlocal volnerrovy task for the hyperbolic equation, AN News Kaz SSR, is gray. physical-matemat, 1988, No. 5, page 13-16.

[11] Kalmenov T.Sh. About the regular boundary value problems for a wave equation, Diffents. equations.1981, t 17, No. 6, page 1105-1121.

[12] Sadybekov M. And, About a Dirichlet problem for for a wave equation, Diffents. equations. Funktsion. the analysis and on applications Alma-Ata Kaz. GU, 1988, t 17, No. 6, page 61-70.

[13] Sadybekov M. And, Kalmenov T.Sh. About a Dirichlet problem and nonlocal boundary value problems for a wave equation, Diffents. equations, 1990, t.26, No. 1, page 60-65.

[14] Meldebekova S., Shaldanbayev A.Sh. About a reulyarny solubility of one nonlocal boundary value problem of a wave equation, Science and formations of YuK, 2005 No. 6(46), page 105-109.

[15] Nakhushev A.M. About one class of the linear balanced problems for hyperbolic and ridiculous types a second-kind equation. Nalchikh, Эльбурс.1992, 155 pages.

[16] Mizokhata S. The theory of the equations with a quotient derivants, M. Mir, 1977, page 504.

[17] Brislown C. Kernels of trace class operators, Proc. Amer 7 Nath. Soc, 1988, v.104, No. 4, P.1181-1190.

[18] Lidsky V. B. Self-conjugate operators the having trace, A.N'S Reports of the Soviet Socialist Republic, 1959, t. 105, No. 3, P.485-488.

[19] Nersesyan A.B. To the theory of integral equations like Voltaire, A.N'S Reports of the Soviet Socialist Republic, 1964, t. 155, No. 5, P.1049-1051.

[20] Shaldanbayev A.Sh. Spectral resolutions of correct - nekorrektnykhnachalno boundary value problems for some classes of differential equations, Germanu, Saarbruchen: LAP LAMRET Acfdemic Pyblishing. http; dob. d-nb. Dl. Emailinfa@lappyblishing com, 2011, 193 pages.

[21] Saprygina M. B., Bayseytova U.S., Shaldanbayev A.Sh., I.O's Orazums. About the regular solubility of a nonlocal boundary value problem of a wave equation., News of National academy of Sciences of PK, ISSN 1991-346X Series physical and mathematical. No. 2. 2016, c.48.

[22] Saprygina M. B., Shaldanbayev A.Sh., I.O., Bayseytov U.S. Orazums. Criteria of a volterrovost of a nonlocal boundary value problem of a wave equation., News of National academy of Sciences of PK, ISSN 1991-346X Series physical and mathematical. No. 2. 2016, c.147.

[23] Trenogin V.A. The functional analysis. – Moskva:nauka, 1980.-494 pages.

УДК 517.956.32

Г.А. Бесбаев, А.А. Көпжасарова, М.Б. Сапрыгина, А.Ш. Шалданбаев

Южно-казахстанский государственный университет

О САМОСОПРЯЖЕННОСТИ ОПЕРАТОРА ГУРСА В ПРОСТРАНСВЕ КРЕЙНА

Аннотация. Волновые уравнения встречаются в различных отраслях науки и техники, например, гидрологии, сейсмолологии, и при изучении динамики распространения волн в жидкости и газе,тем не менее, краевые задачи этого уравнения мало изучены. Работы посвященные нелокальным задачам очень мало.В данной работе предпринята попытка изучения спектральных свойств нелокальной задачи методами теории операторов в пространствах с индефинитными метриками.

Ключевые слова:волновое уравнение, нелокальные краевые условия, регулярная разрешимость, спектр, оператор Гурса, пространства Крейна, самосопряженность, автоморфизмы.