N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 5, Number 309 (2016), 129 – 134

B.I. Demchenko, A.A. Komarov, M.V. Nifontova, L.A. Usoltseva

Fesenkov Astrophysical Institute, Almaty, Kazakhstan

COMPARATIVE ANALYSIS OF SEVERAL METHODS OF ASTROMETRIC PROCESSING OF THE GSS OBSERVATIONS USING CCD-CAMERAS WITH NAROW FIELD OF VIEW

Abstract. The main problem during astrometric data reduction of the positioning observations of celestial objects (comets, asteroids, satellites etc.) is to establish the correspondence between measured Cartesian coordinates and spherical coordinates of the reference standard stars from catalogs. For this purpose different modification of Therner method is used. In this paper we consider four such modification of different level of complication and provide their comparative characteristics. It is shown that an inclusion into critical function additional weighting factors and stabilizing terms significantly improve robustness and reliability of the method, and inclusion of apriori information allows analyzing astronomical images even if only one reference star is present on the field. The method of inclusion of apriori information without violation of linearity of the method is presented. The mathematical formulas suitable for practical implementation are also provided.
Keywords: Therner Method, astrometry, robustness, regularization.

УДК 519.95 - 629.7

Б.И. Демченко, А.А. Комаров, М.В. Нифонтова, Л.А.Усольцева

Астрофизический институт им. В.Г.Фесенкова, Алматы, Казахстан

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ АСТРОМЕТРИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ НАБЛЮДЕНИЙ ГСС НА CCD-МАТРИЦЕ С МАЛЫМ ПОЛЕМ ЗРЕНИЯ

Аннотация. При астрометрической обработке позиционных наблюдений космических объектов (комет, астероидов, ИСЗ и др.) основная проблема заключается в установлении соответствия между измеренными прямоугольными и каталожными сферическими координатами опорных звезд. Для этого используются различные варианты метода Тернера. В статье рассмотрены четыре таких варианта различной степени сложности и даны их сравнительные характеристики. Показано, что добавление в критериальную функцию дополнительных весовых множителей и стабилизирующих слагаемых существенно повышает устойчивость и надежность метода, а учет априорной информации позволяет обрабатывать астроснимки даже при наличии только одной опорной звезды. Дан способ учета априорной информации без нарушения линейности метода. Приведены рабочие формулы, пригодные для практического применения.
Ключевые слова: Метод Тернера, астрометрия, устойчивость, регуляризация.

Астрометрическая обработка любого астрономического снимка в конечном итоге сводится к определению связи между измеренными координатами (x,y) опорных звезд и их каталожными сферическими координатами (α,δ). Если эта связь установлена, то обратная процедура позволит определить (α,δ) интересующего нас объекта по его известным измеренным координатам.

Для согласования каталожных и измеренных координат опорных звезд требуется учет многих астрометрических и инструментальных поправок (собственное движение звезд, прецессия, нутация, годичная аберрация, рефракция, дисторсия и др.). Далее мы предполагаем, что все эти поправки учтены. Основная проблема – установление связи измеренных координат (x,y) и небесных координат (α,δ). Ниже рассмотрены различные варианты решения этой задачи и даны их сравнительные характеристики.

Будем предполагать, что система координат матрицы (x,y) подвержена небольшим линейным искажениям, то есть она может быть слегка косоугольной (не ортогональной и не равномасштабной), однако отличия от ортогональности и равномасштабности невелики. Нелинейными искажениями мы пренебрегаем. Для малого поля зрения эти предположения обычно выполняются.

Введем промежуточную прямоугольную систему тангенциальных координат (ξ,η) по стандартным формулам [1,2]:

$$\xi = \frac{\cos(\delta)\sin(\alpha - A)}{\Delta}; \qquad \eta = \frac{\sin(\delta)\cos(D) - \cos(\delta)\sin(D)\cos(\alpha - A)}{\Delta};$$

$$\Delta = \sin(\delta)\sin(D) + \cos(\delta)\cos(D)\cos(\alpha - A)$$

Если все астрометрические эффекты полностью учтены, то по построению эта система строго ортогональна и равномасштабна. Обратный переход:

$$tg(\alpha - A) = \frac{\xi}{H}; \qquad tg(\delta) = \frac{\eta\cos(D) + \sin(D)}{H}\cos(\alpha - A); \qquad H = \cos(D) - \eta\sin(D).,$$

здесь A,D – сферические координаты центра кадра. Они могут быть заданы довольно грубо, например, с точностью до 0.5^0. При небольшом поле зрения справедливы приближенные равенства: $(\alpha - A)\cdot\cos(D) \approx \xi$; $(\delta - D) \approx \eta$ (α, δ и A,D выражены в радианах).

Из наблюдений получают координаты (x, y) опорных звезд, для которых известны (α, δ), а также координаты объекта (x_0, y_0). Исходя из этих данных, требуется определить сферические координаты объекта (α_0, δ_0).

Рассмотрим четыре алгоритма определения параметров перехода от (x,y) к (ξ,η). Условно их обозначим как M1, M2, M3, M4. Будем ориентироваться только на линейные искажения. Как отмечено выше, нелинейные искажения здесь не рассматриваются. Они характерны для большого поля зрения и требуют отдельного исследования.

1. Метод M1: 4 - параметрический метод Тернера

Предположим, что обе системы (ξ,η) и (x,y) ортогональны и равномасштабны по своим осям. Тогда справедливы следующие формулы:

$\xi = a + c\cdot x - d\cdot y$, $\eta = b + c\cdot y + d\cdot x$,

здесь a, b, c, d – искомые коэффициенты перехода. Параметры a, b определяют относительный сдвиг систем координат, c, d – поворот и масштабирование: $c = M\cdot\cos(\varphi)$, $d = M\cdot\sin(\varphi)$, (M – масштабный коэффициент, φ – угол поворота системы (ξ, η) относительно (x, y), положительный при вращении против часовой стрелки).

Для поиска a,b,c,d используем критерий метода наименьших квадратов:

$$F(a,b,c,d) = \sum_{i=1}^{n}\left[(a + cx_i - dy_i - \xi_i)^2 + (b + cy_i + dx_i - \eta_i)^2\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(\Delta\xi_i^2 + \Delta\eta_i^2\right) = \min,$$

где n – количество опорных звезд. Приравнивая к нулю частные производные от этой функции по a, b ,c, d, получим линейную систему из 4-х уравнений с четырьмя неизвестными.

Достоинства метода M1:

– хорошая устойчивость,
– способен работать на двух опорных звездах (но если требуется оценить ошибки, то необходимо минимум 3 звезды).

Недостатки:

– сравнительно низкая точность при нарушении предположения об ортогональности и равномасштабности систем координат,

– возрастание ошибок в случае, если “центр тяжести” опорных звезд расположен далеко от объекта.

2. Метод М2: 6 - параметрический метод Тернера

Если система координат (x, y) не ортогональна или не равномасштабна, то переход от (x, y) к (ξ, η) можно задать двумя независимыми формулами, отдельно по каждой оси:

$$\xi = a + b\cdot x + c\cdot y,\ \eta = d + e\cdot x + f\cdot y\,.$$

Для поиска параметров связи a, b, c, d, e, f используются два независимых критерия:

$$F_\xi = \sum_{i=1}^{n}(a + bx_i + cy_i - \xi_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\Delta\xi_i^2 = \min; \qquad F_\eta = \sum_{i=1}^{n}(d + ex_i + fy_i - \eta_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\Delta\eta_i^2 = \min\,, \quad (1)$$

где параметры a, d задают сдвиг систем координат, а четыре других параметра определяются через масштабы и углы. Они равны:

$$b = M_x\cos(\varphi_x); \quad c = -M_y\sin(\varphi_y); \quad e = M_x\sin(\varphi_x); \quad f = M_y\cos(\varphi_y);$$

$$M_x = \sqrt{b^2 + e^2}; \quad tg(\varphi_x) = e/b; \quad M_y = \sqrt{c^2 + f^2}; \quad tg(\varphi_y) = -c/f\,. \qquad (2)$$

M_x – масштабный коэффициент по оси x, φ_x – угол наклона оси ξ к оси x.

M_y – масштабный коэффициент по оси y, φ_y – угол наклона оси η к оси y.

Фактически 6-параметрический метод сводится к решению двух систем нормальных уравнений с тремя неизвестными, отдельно по оси ξ и по оси η.

Достоинства метода М2:

– имеет более высокую точность (по сравнению с М1),
– нечувствительность к большим линейным искажениям систем координат.

Недостатки:

– требуется минимум 3 звезды (если необходимо оценить ошибки, то 4 звезды),
– низкая устойчивость. В частности, если все звезды расположены вдоль прямой линии, то при любом их количестве критерии (1) приводят к вырожденным системам нормальных уравнений.

3. Метод М3: устойчивый 6 - параметрический метод Тернера

Этот метод сочетает в себе достоинства методов М1, М2 и частично устраняет их недостатки. Сначала формально запишем два 4- параметрических метода, отдельно по осям ξ и η, но немного изменим критериальные функции:

По оси ξ:

$$\xi = u_1 + u_3\cdot x - u_4\cdot y\,,\ \eta = u_2 + u_3\cdot y + u_4\cdot x\,, \qquad (3)$$

$$F_\xi = \sum_{i=1}^{n}\left[(u_1 + u_3x_i - u_4y_i - \xi_i)^2 + p\cdot(u_2 + u_3y_i + u_4x_i - \eta_i)^2\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(\Delta\xi_i^2 + p\cdot\Delta\eta_i^2\right) = \min \qquad (4)$$

По оси η:

$$\xi = v_1 + v_3\cdot x - v_4\cdot y\,,\ \eta = v_2 + v_3\cdot y + v_4\cdot x\,, \qquad (5)$$

$$F_\eta = \sum_{i=1}^{n}\left[p\cdot(v_1 + v_3x_i - v_4y_i - \xi_i)^2 + (v_2 + v_3y_i + v_4x_i - \eta_i)^2\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(p\cdot\Delta\xi_i^2 + \Delta\eta_i^2\right) = \min \qquad (6)$$

В этих формулах весовой коэффициент

$$p = \frac{1}{n-1} \text{ при } n > 1, \text{ и } p = 1 \text{ при } n = 1. \qquad (7)$$

В итоге мы имеем две отдельные 4-параметрические задачи с параметрами (u_1, u_2, u_3, u_4), и (v_1, v_2, v_3, v_4), так что формально этот метод 8-параметрический. Однако он сводится к обычному 6-параметрическому методу, см. ниже.

Как следует из критериев (4), (6), при изменении внешнего стабилизирующего множителя p от 1 до 0 можно плавно перейти от 4-параметрической редукции к 6-параметрической. Мы выбрали весовой множитель p в виде (7), хотя это необязательно. После того, как указанные 8 параметров будут найдены, для вычисления (ξ, η) по известным (x, y) используются первая формула из (3) и вторая формула из (5).

Параметры u_2 и v_1 в конечном итоге не нужны, поэтому их целесообразно исключить из алгоритма. Исключим, например, параметр u_2 . Оптимальное значение этого параметра находится из условия равенства нулю частной производной

$$\frac{\partial F_\xi}{\partial u_2} = 2p\sum_{i=1}^{n}\left(u_2 + u_3 y_i + u_4 x_i - \eta_i\right) = 0 \text{, или } u_2 = \overline{\eta} - u_3\overline{y} - u_4\overline{x}. \qquad (8)$$

Видно, что оптимальное значение u_2 линейно выражается через u_3, u_4 (черта сверху означает усреднение по всем опорным звездам). Подставляя (8) в критерий (4), мы исключим u_2. Аналогичным образом поступим с параметром v_1. Таким образом, метод из 8-параметрического становится 6-параметрическим. Одновременно с этим пропадает вырожденность критериев (4), (6) при $p = 0$.

Достоинства метода М3:

– высокая устойчивость (сравнима с устойчивостью 4-параметрического метода М1),

– способен работать на двух звездах (но, если требуется оценить ошибки, то необходимо минимум 3 звезды),

– точность М3 не хуже любого из методов М1, М2.

Недостатки:

– возрастание ошибок в случае, если объект находится далеко от центра тяжести опорных звезд (этот недостаток характерен и для двух предыдущим методов).

4. Метод М4: устойчивый 6-параметрический метод Тернера с регуляризацией.

При проведении астрономических наблюдений типичной является ситуация, когда наблюдения длительное время идут «в потоке», без перенастройки аппаратуры. Если другие внешние условия меняются незначительно, то масштабные и угловые параметры кадра практически постоянны. Это обстоятельство можно использовать в алгоритмах обработки.

Изменим критерии (4), (6) следующим образом (такой прием используется при решении некорректных задач, [3]):

По оси ξ: $$F_\xi = \sum_{i=1}^{n}\left(\Delta\xi_i^2 + p\cdot\Delta\eta_i^2\right) + \beta\cdot\left[(u_3 - u_{30})^2 + (u_4 - u_{40})^2\right] = \min \qquad (9)$$

По оси η: $$F_\eta = \sum_{i=1}^{n}\left(p\cdot\Delta\xi_i^2 + \Delta\eta_i^2\right) + \beta\cdot\left[(v_3 - v_{30})^2 + (v_4 - v_{40})^2\right] = \min \qquad (10)$$

Здесь β – заданный малый множитель, u_{30}, u_{40} – масштабные и угловые коэффициенты по оси ξ, «накопленные» по предыдущим кадрам, v_{30}, v_{40} – то же по оси η. Смысл дополнительных регуляризирующих слагаемых с множителем β очевиден. При $\beta = 0$ метод М4 совпадает с М3. Если же β задать очень большим, то минимум критериальных функций (9), (10) достигается при $u_3 = u_{30}$, $u_4 = u_{40}$, $v_3 = v_{30}$, $v_4 = v_{40}$. Это означает, что масштабы и углы поворота систем координат неизменны. Свободными остаются только смещения осей координат, то есть параметры u_1 и v_2. Задавая подходящим образом значение β, можно добиться желаемого компромисса между устойчивостью метода и согласованностью с исходными данными.

Оптимальные значения внешнего множителя β обычно лежат в пределах от 10^{-6} до 10^{-3}. Конкретное значение β вначале можно найти из критерия невязки [4] (то есть численное значение дополнительного регуляризирующего слагаемого должно быть сравнимо с ожидаемой погрешностью наблюдений), а затем уточнить по большой статистике наблюдений.

Достоинства метода М4:

– устойчивость М4 выше, чем любого из методов М1 – М3;

– М4 формально способен работать даже по одной опорной звезде. В этом случае достигается строгий минимум функций (9-10): $F_\xi = F_\eta = 0$;

– точность М4 не хуже точности методов М1-М3;

– метод М4 дает хорошие результаты и тогда, когда объект находится далеко от центра тяжести опорных звезд.

Недостатки:

– М4 требует «хорошего старта», то есть первый кадр должен содержать достаточно большое количество опорных звезд, равномерно распределенных по полю зрения. Первый кадр обрабатывается с $\beta = 0$. (Три предыдущих метода работают индивидуально по каждому кадру, для них отдельный старт не нужен).

– при резком изменении внешних условий, например, при перенастройке аппаратуры, метод М4 требует перезапуска, так как масштабные и угловые параметры изменятся.

По совокупности характеристик последний метод имеет несомненные преимущества. Поэтому запишем в явном виде системы нормальных уравнений для этого метода. В соответствии с предыдущими формулами, искомыми параметрами являются u_1, u_3, u_4 и v_2, v_3, v_4 (u_2 и v_1 исключены).

По оси ξ (горизонтальная ось, обычно это ось α):

$$\begin{aligned} C_{11}\cdot u_1 + C_{12}\cdot u_3 + C_{13}\cdot u_4 &= C_{14} \\ C_{21}\cdot u_1 + C_{22}\cdot u_3 + C_{23}\cdot u_4 &= C_{24} \\ C_{31}\cdot u_1 + C_{32}\cdot u_3 + C_{33}\cdot u_4 &= C_{34} \end{aligned} \qquad (11)$$

По оси η (вертикальная ось, обычно это ось δ):

$$\begin{aligned} D_{11}\cdot v_2 + D_{12}\cdot v_3 + D_{13}\cdot v_4 &= D_{14} \\ D_{21}\cdot v_2 + D_{22}\cdot v_3 + D_{23}\cdot v_4 &= D_{24} \\ D_{31}\cdot v_2 + D_{32}\cdot v_3 + D_{33}\cdot v_4 &= D_{34} \end{aligned} \qquad (12)$$

Элементы нормальных матриц **C, D** равны:

$$C_{11} = 1;\quad C_{12} = \overline{x};\quad C_{13} = -\overline{y};\quad C_{14} = \overline{\xi};$$

$$C_{21} = \overline{x};\quad C_{22} = \overline{x^2} + p\left(\overline{y^2} - (\overline{y})^2\right) + \beta/n;\quad C_{23} = -\overline{xy} + p\left(\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}\right),$$
$$C_{24} = \overline{x\xi} + p\left(\overline{y\eta} - \overline{y}\cdot\overline{\eta}\right) + \beta\cdot u_{30}/n;$$

$$C_{31} = -\overline{y};\quad C_{32} = -\overline{xy} + p\left(\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}\right),\quad C_{33} = \overline{y^2} + p\left(\overline{x^2} - (\overline{x})^2\right) + \beta/n;$$
$$C_{34} = -\overline{y\xi} + p\left(\overline{x\eta} - \overline{x}\cdot\overline{\eta}\right) + \beta\cdot u_{40}/n;$$

$$D_{11} = 1;\quad D_{12} = \overline{y};\quad D_{13} = \overline{x};\quad D_{14} = \overline{\eta};$$

$$D_{21} = \overline{y};\quad D_{22} = \overline{y^2} + p\left(\overline{x^2} - (\overline{x})^2\right) + \beta/n;\quad D_{23} = \overline{xy} - p\left(\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}\right),$$
$$D_{24} = \overline{y\eta} + p\left(\overline{x\xi} - \overline{x}\cdot\overline{\xi}\right) + \beta\cdot v_{30}/n;$$

$$D_{31} = \overline{x};\quad D_{32} = \overline{xy} - p\left(\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}\right),\quad D_{33} = \overline{x^2} + p\left(\overline{y^2} - (\overline{y})^2\right) + \beta/n;$$
$$D_{34} = \overline{x\eta} - p\left(\overline{y\xi} - \overline{y}\cdot\overline{\xi}\right) + \beta\cdot v_{40}/n;$$

Черта сверху означает усреднение соответствующего выражения по всем звездам. Например,

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i;\quad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2;\quad \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i;\quad \overline{x}\cdot\overline{y} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

Матрицы **C, D** симметричны и положительно определены, поэтому для решения линейных систем (11-12) можно без ограничений использовать компактный метод квадратных корней, так как под знаком корня отрицательные числа не появляются, [5]. После того, как эти системы решены, переход от (x,y) к (ξ,η) осуществляется по единым формулам:

$$\xi = u_1 + u_3\cdot x - u_4\cdot y\,,\ \eta = v_2 + v_3\cdot y + v_4\cdot x$$

Дополнительно по формулам (2) можно вычислить параметры M_x, φ_x, M_y, φ_y. Сравнивая эти значения между собой, можно сделать определенные выводы относительно величины линейных искажений кадра.

Наконец, если требуется минимизировать ошибки округления и корректно оценить погрешности в определении сферических координат объекта, то в качестве начала отсчета измеренных координат (x, y) лучше брать не левый верхний угол матрицы (как это обычно делается), а измеренные координаты самого объекта.

Работа выполнена в рамках целевой научно-технической программы: «Астрофизические исследования звездных и планетных систем», проект N 0073-9/ПЦФ-15-МОН.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Жаров В.Е. Сферическая астрономия. Фрязино.– 2006. – 480с.
[2] Подобед В.В., Нестеров В.В. Общая астрометрия. М. . – Наука. – 1975. – 552с.
[3] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М. . – Наука, 1974, 323с.
[4] Арефьева М.В. Решение уравнения типа свертки методом регуляризации с применением быстрого преобразования Фурье и критерия невязки. //Вычислительные методы и программирование. – вып.35. – 1981. – С.51-68
[5] Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. М. . – Наука. – 1972. – 368с.

REFERENCES

[1] Zharov V.E. *Sfericheskaja astronomija*, Frjazino, 2006,.480 p. (in Russ.).
[2] Podobed V.V., Nesterov V.V. *Obshhaja astrometrija*, M., Nauka, 1975, p.552. (in Russ.).
[3] Tihonov A.N., Arsenin V.Ja. *Metody reshenija nekorrektnyh zadach*, M., Nauka, 1974, p.323. (in Russ.).
[4] Aref'eva M.V. *Reshenie uravnenija tipa svertki metodom reguljarizacii s primeneniem bystrogo preobrazovanija Fur'e i kriterija nevjazki*, Vychislitel'nye metody i programmirovanie, vyp.35, 1981, p.p.51-68. (in Russ.).
[5] Kopchenova N.V., Maron I.A. *Vychislitel'naja matematika v primerah i zadachah*, M., Nauka, 1972, p.368. (in Russ.).

Б.И. Демченко, А.А. Комаров, М.В. Нифонтова, Л.А. Усольцева

В.Г. Фесенков атындағы Астрофизика институты, Алматы, Қазақстан

КӨРУ ШЕГІ АЗ CCD-МАТРИЦАДА ГТС БАҚЫЛАУЛАРДЫҢ АСТРОМЕТРИЯЛЫҚ ӨҢДЕУЛЕРІНІҢ ӘРТҮРЛІ ӘДІСТЕРІНІҢ САЛЫСТЫРМАЛЫ ТАЛДАУЫ

Аннотация. Ғарыш объектілердің позициялық бақылаулары астрономиялық өңдеулері кезінде (кометалар, астероидтар, ЖЖС және т.б.) негізгі мәселе тірек жұлдыздардың өлшенген тік бұрыштары мен каталогтық сфералық координаттары арасындағы сәйкес белгіленгендермен қорытындылады. Бұл үшін Тернер әдісінің әртүрлі әдістер нұсқалары пайдаланылады. Мақалада қиындық дәрежесінің осындай төрт нұсқасы қарастырылды және олардың салыстырмалы сипаттамалары берілді. Қосымша салмақты көбейткіштер өлшемдік функциясы және тұрақты қосылғыштар қосылуы әдістің тұрақтылығы мен дәйектілігі көрсетілді, ал априорлық ақпарат есебі тек бір тірек жұлдыздың болуы кезінде де астрокескіндерді өңдеуге мүмкіндік береді. Априорлық ақпарат есебі әдістің сызықтық бұзылуысыз тәсілі берілді. Тәжірибелік қолдануға жарамды жұмыс формалары келтірілді.

Түйін сөздер: Тернер әдісі, астрометрия, тұрақтылық, жүйелілік.