N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 5, Number 309 (2016), 213 – 223

UDC 517.956.32

M. T. Shomanbayeva, A.A. Kopzhasarova, G. A. Besbayev, A.Sh. Shaldanbayev

M. Auezov South Kazakhstan State University
shaldanbaev51@mail.ru

SPECTRAL PROPERTIES OF A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM OF A WAVE EQUATION

Abstract. The wave equations are used in various branches of science and techniques, such as hydrologies, seismology and when studying the dynamics of an advance of waves in liquid and gas. Nevertheless, boundary value problems of this equation are little studied. In this work an attempt of studying of spectral properties of a nonlocal problem is made by methods of the functional analysis.
Keywords: wave equation, nonlocal boundary conditions, regular solubility, range, basis of Riesz.

ӘОЖ 517.956.32

М.Т. Шоманбаева, А.А. Көпжасарова, Г.А. Бесбаев, А.Ш. Шалданбаев

Онтүстік-Қазақстан мемлекеттік университеті

ТОЛҚЫНДЫҚ ТЕҢДЕУІНІҢ ШАРТАРАПТЫ ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕБІНІҢ СПЕКТРЛІК ҚАСИЕТТЕРІ

Аннотация. Толқындық теңдеулер гидрология, сейсмология сияқты ғылым мен техниканың әр түрлі салаларында кездеседі, алайда, сұйық және газ толқындардың таралу динамикасын зерттегенде теңдеудің осы шеттік мәселесі аз зерттелген. Шартарапты мәселелеріне арналған жұмыстар өте аз. Бұл мақалада функционалдық талдау әдістерімен шартарапты есептің спектрлік қасиеттерін зерттеуге әрекет жасалынды.
Түйін сөздер: толқындық теңдеулер, шартарапты шекаралық шарттар, тұрақты шешілуі, спектр, Рисс базисі.

1.Кіріспе. Гиперболалық теңдеулердің шекаралық есептері аз зерттелген. Мұның бір себебі, оның характеристикалық формасының бір таңбалы болмауында болса керек, дәл осы себепті , вариациялық әдістер-де жарамайды. Тағы да, бір себебі [1] , ертеректе француз ғалымы Ж-Адамар өз еңбектерінде гиперболалық теңдеулерге бастапқы есептер қолайлы, екеніне, назар аударған.

Өткен ғасырдың 60-жылдарынан бастап, математикалық физика саласына сызықтық операторлар теориясы қолданыла бастады, оған мұрындық болған К. Фридрихс [2], Дж.Ф. Нейман [3] және С.Л.Соболевтің [4] еңбектері болса керек. Нейманның еңбектерінен бастау алған, М.И.Вишик [5] өзінің әйгілі операторларды ширату теориясын жасады, бұл еңбек Қазақстанда М.Өтелбаев [6] пен Калменовтың [7] еңбектерінде жалғасын тапты. Өкінішке орай, бұл теориялар-да гиперболалық теңдеулерде сәтсіздікке ұшырады, оның себебі мынада . Сызықтық операторлар теориясын шекаралық есептерге қолданған сәтте кішік (минимальный) оператор мен ұлық (максимальный) операторларды тұрғызу қажет болады , сонда L_0 кішік оператор болса оның сыңары (сопряженный) L_0^* ұлық оператор, болады, яғни көп жағдайда (әркез емес) $L_0 \subset L_0^*$ шарты орындалады. Сонда біздің шекаралық есебіміз осы екі оператордың арасында жатуы керек, яғни

$$L_0 \subset L \subset L_0^*$$

Әлгі, операторларды шыйрату (кеңіту) теориясында L_0 операторының қайтымды болуы талап етіледі [7,57 б], яғни шектеулі L_0^{-1} - кері операторы бар болуы қажет, бұл шарт әркез орындала бермейді, мысалы,

$$L_0 u = u_{xx} - u_{yy} \ , \qquad D(L_0) = C_0^\infty(\Omega) \ ,$$

$\Omega = [0,1]Ч[0,1]$, болса, онда

$$u_{xx}(x,y) = sinm\pi x \cdot sinm\pi y, \qquad n,m = 1,2,\ldots$$

функциялары үшін

$$L_0 u_{mn} = \pi^2(m^2 - n^2)u_{mn} \ , \qquad m,n = 1,2,\ldots$$

теңдіктері орындалары, айдан анық , мұнан, біз $\lambda = 0$ шамасының L_0 операторының шексіз еселі меншікті мәні екенін көреміз, яғни L_0^{-1} операторы жоқ.

Десек-те, интегралдық кейіп пен Риман – Адамар, және алғы бағалау әдістері бойынша, гиперболалық теңдеулердің біраз шекаралық есептері Т.Ш. Калменовтың еңбектерінде зерттеледі , және оның монографиясында [7] көрініс тапты.Сондай-ақ, [8-15] еңбектер-де осы мәселенің төңірегінде,біздің зерттеуіміз барысында [16-19] еңбектер басшылыққа алынды,зерттеу нысанының кейбір мәселелері [20] еңбекте қарастырылды.

Толқын теңдеуінің бір ерекше қасиеті, оның нақты характеристикаларының болуында , алғы шартты , параллел жатқан екі характеристиканың тек біреуінде ғана беруге болады , екіншісі бос болуы керек, міне осы жай толқын теңдеуіне шартарапты (нелокальный) есепті қоюға негіз болды .

Бұрынырақ [14], [21], [22] біз толқын теңдеуінің шартарапты есебінің тұрлаулы (регулярный) шешілетінін көрсеткенбіз, яғни шешімнің бар екенін, және оның бастапқы шарттарға үзіксіз тәуелді екенін дәлелдегенбіз.

Бұл еңбекте,оның,спектрәлдік қасиеттерін зерттемекпіз.

1.Есептің қойылуы.

Мына,

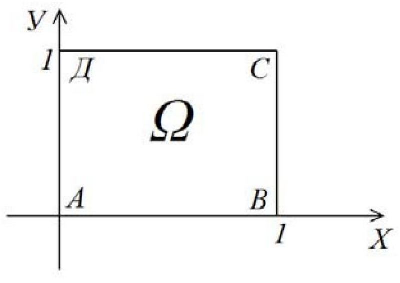
$$Lu = u_{xy} = f(x,y)$$

толқын теңдеуінің, қабырғалары $AB: u = 0; BC: x = 1; CD: y = 1; DA: x = 0$ болатын характеристикалық Ω төртбұрышында, мынадай,

$$Lu = u_{xy} = f(x,y), (x,y) \in \Omega \qquad (1)$$

$$u\big|_{AB} = \alpha u\big|_{CD}, u\big|_{AD} = \beta u\big|_{BC} \qquad (2)$$

шартарапты шекаралық есепті қарастырайық, мұндағы $\alpha, \beta \neq 1$ комплекс сандар $f(x,y) \in L^2(\Omega)$ (1-суретке қара).



1-сурет

Егер $|\alpha|=1, |\beta|=1$ болса, онда бұл шекаралық есепке сәйкес оператордың жалқы екені белгілі [7]. Онан бұрынырақ [14],[21] $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$ сәтінде, әсіре үзіксіз кері L^{-1} операторы бар екенін көрсеткенбіз. Мақсатымыз,осы,есептің шешімінің спектрәлдік таралымын алу.

2.Зерттеу әдістері

Зерттеу барысында,сызықтық жалқы операторлар теориясы мен

Гилберт-Шмидтің теоремасы қолданылды,сондай ақ,Фүренің айнымалыларды бөліктеу әдісі де өз кезегінде кәдеге жарады.

3.Алынған нәтиежелер.

Теорема 1. Егер

$$1)\,(1-\alpha)(1-\beta)\neq 0$$
$$2)\,|\alpha|=1, |\beta|=1$$

болса, онда (1)-(2) шартарапты шекаралық есебінің меншікті векторлары $L^2(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған базис құрайды.

Теорема 2. Егер

$$1)\,(1-\alpha)(1-\beta)\neq 0$$
$$2)\,|\alpha|=1, |\beta|=1$$

болса, онда толқын теңдеуінің (1) –(2) шартарапты шекаралық есебі әлді шешіледі, және ол шешім, мынадай,

$$u(x,y)=\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(f,u_{nm})}{\lambda_{nm}}u_{nm}(x,y) \tag{7}$$

болады, мұндағы

$$\lambda_{nm}=-(2n\pi+\varphi_0)(2m\pi+\psi_0), J_m\varphi_0=0, J_m\psi_0=0,$$
$$m,n=0,\pm1,\pm2,\ldots \quad \varphi_0=\arg\frac{1}{\beta}, \psi_0=\arg\frac{1}{\alpha};$$
$$u_{nm}(x,y)=\exp\{i(2n\pi x+2m\pi y+\varphi_0 x+\psi_0 y)\}.$$

Теорема 3. Егер

$$\alpha\cdot\beta(1-\alpha)(1-\beta)\neq 0$$

болса, онда (1) –(2) шартарапты шекаралық есептің меншікті векторлары $L^2(\Omega)$ кеңістігінде Рисстің базисін құрайды. Есептің өзі әлді шешіледі,және шешім, мынадай,

$$u(x,y)=\sum_{m,n}\frac{(f,v_{mn})}{\lambda_{mn}}u_{mn}(x,y)$$

болады, мұндағы,

$$Lu_{mn}=\lambda_{mn}u_{mn}, L^{+}v_{mn}=\overline{\lambda}_{mn}v_{mn},$$

$$u_{mn}(x,y)=|\beta|^{-x}|\alpha|^{-y}e^{i\varphi_0 x+i\psi_0 y}e_{mn}(x,y),$$

$$v_{mn}(x,y)=|\beta|^{x}|\alpha|^{y}e^{i\varphi_0 x+i\psi_0 y}e_{mn}(x,y)$$
$$\varphi_0=\arg\frac{1}{\beta},\psi_0=\arg\frac{1}{\alpha},$$
$$e_{mn}(x,y)=\exp\{2m\pi ix+2n\pi iy\}.$$

4.Талқысы.

Келесі, теорема көпке белгілі [7].

Теорема Егер гилберттік H кеңістігінде тығыз анықталған тұйық A операторы қайтымды болса, онда оның сыңары A^{*} операторы да қайтымды және бұл сәтте, мына, $(A^{-1})^{*}=(A^{*})^{-1}$ теңдік орынды.

Салдар 1. Егер $A^{*}=A$ болса, онда $(A^{-1})^{*}=A^{-1}$, яғни егер А жалқы болса, онда A^{-1} операторы да жалқы.

Егер $L^{-1}u=0$ болса, онда $u=LL^{-1}u=0$, демек $\ker(L^{-1})=\{0\}$. Сонымен, кері L^{-1} оператор жалқы және әсіре үзіксіз, және оның ядросы тек нөлден тұрады. Онда Гилберт-Шмидтің теоремасы бойынша [23], мына, (кезкелген $u\in L^{2}(\Omega)$ үшін)

$$L^{-1}u=\sum_{k=1}^{\infty}(u,u_k)\lambda_k u_k \tag{3}$$

теңдік орындалады, мұндағы λ_k –дегеніміз L^{-1} операторының меншікті мәндері, ал u_k –соларға сәйкес меншікті векторлары.

Кері оператордың үзіксіздігі мен, мына, $L^{-1}u_k=\lambda_k u_k, k=1,2,...$ теңдіктерге назар аударсақ, онда (3) формуладан, мынадай

$$L^{-1}u=\sum_{k=1}^{\infty}(u,u_k)\lambda_k u_k=\sum_{k=1}^{\infty}(u,u_k)L^{-1}u_k=L^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}(u,u_k)u_k$$

қорытынды жасаймыз. Осы теңдікке L операторы арқылы әсер етсек, онда, мынаны,

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}(u,u_k)u_k$$

көреміз, яғни L^{-1} операторының меншікті векторлары $\{u_k\},k=1,2,...H=L^{2}(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған базис құрайды.

Теорема 1. Егер

1) $(1-\alpha)(1-\beta)\neq 0$

2) $|\alpha|=1,|\beta|=1$

болса, онда (1)-(2) шартарапты шекаралық есебінің меншікті векторлары $L^{2}(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған базис құрайды.

Енді λ_k меншікті мәндері мен u_k –меншікті векторларын табу үшін, мынадай,

$$\begin{cases} u_{xy} = \lambda u(x,y) & (3.6.4) \\ u\big|_{AB} = \alpha u\big|_{CD}, u\big|_{AD} = \beta u\big|_{BC} & (3.6.5) \end{cases}$$

спектрәлді есепті қарастырайық. Есепті шешу үшін айнымалыларын бөліктеу әдісін қолданайық, бұл үшін $u(x,y) = v(x)\cdot\omega(y)$ болсын деп жорыйық.

Шекаралық шарттардан:

$$u\big|_{AB} = \alpha u\big|_{CD}, \Rightarrow v(x)\omega(0) = \alpha v(x)\cdot\omega(1), v(x)[\omega(0) - \alpha\cdot\omega(1)] = 0,$$

демек, $\omega(0) = \alpha\omega(1)$.

Екінші шекаралық щарттан:

$$u\big|_{AD} = \beta u\big|_{BC}, \Rightarrow u\big|_{x=0} = \beta u\big|_{x=1}, v(0)\omega(y) = \beta v(1)\cdot\omega(y),$$

мұнан, $v(0) = \beta v(1)$.

Әрі қарай, $u(x,y) = v(x)\cdot\omega(y)$ функциясын (4) теңдеуге апарып қойсақ, мынадай,

$$\frac{v'(x)}{v(x)}\cdot\frac{\omega'(y)}{\omega(y)} = \lambda$$

болады. Демек, $v(x)$ пен $\omega(y)$ функцияларына екі спектрәлдік есеп аламыз.

а) $v'(x) = \mu v(x), v(0) - \beta v(1) = 0;$

б) $\omega'(y) = \lambda\omega(y), \omega(0) - \alpha\omega(1) = 0$.

Бұл екі есеп ұқсас, сондықтан тек біріншісін шешейік.

$$v(x) = C\cdot e^{\mu x}, C = const.$$

Осы өрнекті шекаралық шартқа апарып қойсақ, мынадай,

$$C = \beta C\cdot e^{\mu}$$

теңдеуге келеміз, мұнан

$$\beta e^{\mu} - 1 = 0, e^{\mu} = \frac{1}{\beta},$$

$$\Rightarrow \mu_n = \ln\left|\frac{1}{\beta}\right| + i\varphi_0 + 2n\pi i\beta = i\varphi_0 + 2n\pi i, \varphi_0 = \arg\frac{1}{\beta},$$

$$v_n(x) = A_n e^{(2n\pi+\varphi_0)ix}, Jm\varphi_0 = 0.$$

Сол сыйақты жолменен

$$\omega_m(y) = B_m e^{(2m\pi+\psi_0)iy}, Jm\psi_0 = 0,$$

мұндағы A_n, B_m –тұрақты шамалар. Демек, (4) –(5) есептің меншікті мәндері, мыналар,

$$\lambda_{nm} = -(2n\pi + \varphi_0)(2m\pi + \psi_0), m,n = 0,\pm1,\pm2,...$$

ал меншікті функциялары, мыналар

$$u_{nm}(x,y) = A_n B_m e^{(2n\pi x + 2m\pi y + \varphi_0 x + \psi_0 y)i}, n,m = 0,\pm1,\pm2,...$$

болады. Нормалаушы $A_n B_m$ коэффициенттерін табайық

$$\|u_{nm}\|_{L^2}^2 = |A_n B_m|^2 \int_0^1\int_0^1 1dxdy = 1 \cdot$$

Демек, ортонормаланған функциялар, мыналар,

$$u_{nm}(x,y) = \exp\{i(2n\pi x + 2m\pi y + \varphi_0 x + \psi_0 y)\} \tag{6}$$

болады.

Лемма 1. Мына, $\exp\{i(2n\pi + \varphi_0)x\}, n = 0, \pm1, \pm2, ...$ функциялар системасы $L^2(0,1)$ кеңістігінде толымды.

Дәлелі. Мына,

$$\int_0^1 f(x)e^{i(2n\pi+\varphi_0)x}dx = 0, \int_0^1 f(x)e^{i\varphi_0 x}e^{2n\pi ix}dx = 0, n = 0, \pm1, \pm2, ...$$

теңдіктер орындалсын делік. Онда $t=2\pi x$ деп соңғы интегралды алмастыру жасасақ, мына,

$$\int_0^{2\pi} f\left(\frac{t}{2\pi}\right)e^{\frac{i\varphi_0 t}{2\pi}}e^{nit}dt = 0, n = 0, \pm1, \pm2, ...$$

теңдіктерді аламыз. Мына, $\{e^{\text{int}}\}, n = 0, \pm1, \pm2, ...$ функциялар системасы $L^2(0,2\pi)$ кеңістігінде толымды болғандықтан, (0,2π) интервалының барлық нүктелерінде дерлік, мына,

$$f\left(\frac{t}{2\pi}\right)e^{\frac{i\varphi_0 t}{2\pi}} = 0$$

теңдік орындалады. Демек, (0,1) интервалының барлық нүктелерінде дерлік, $f(x)=0$ болады. Лемма дәлелденді.

Лемма 2. Мына, $u_{nm}(x,y), n, m = 0, \pm1, \pm2, ...$ меншікті функциялар системасы $L^2(\Omega)$ кеңістігінде толымды.

Дәлелі. $L^2(\Omega)$ кеңістігінің белгілі бір f(x,y) функциясы үшін, мына

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\bar{u}_{nm}(x,y)dxdy = 0, n, m = 0, \pm1, \pm2, ...$$

теңдіктер орындалсын делік. Фубинидің теоремасы бойынша екі еселі интегралды қайталау интегралымен ауыстыруға болады, яғни

$$\int_0^1 e^{i(2n\pi x+\varphi_0 x)}dx\int_0^1 f(x,y)e^{i(2m\pi y+\psi_0 y)}dy = 0\,.$$

Жоғарыдағы, 1 лемма бойынша, мұнан, барлық *x* нүктелерде дерлік, мына

$$\int_0^1 f(x,y)e^{i(2m\pi y+\varphi_0 y)}dy = 0$$

теңдік орындалатынын көреміз. Мұнан, барлық $(x,y)\in L$ нүктелерде дерлік *f(x,y)=0*.

Жоғарыдағы (6) система ортонормаланғандықтан, ол $L^2(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған базис құрайды.

Теорема 2. Егер

1) $(1-\alpha)(1-\beta)\neq 0$

2) $|\alpha|=1, |\beta|=1$

болса, онда толқын теңдеуінің (1) –(2) шартарапты шекаралық есебі әлді шешіледі, және ол шешім, мынадай,

$$u(x,y)=\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(f,u_{nm})}{\lambda_{nm}}u_{nm}(x,y) \tag{7}$$

болады, мұндағы

$$\lambda_{nm}=-(2n\pi+\varphi_0)(2m\pi+\psi_0), J_m\varphi_0=0, J_m\psi_0=0,$$

$$m,n=0,\pm1,\pm2,... \quad \varphi_0=\arg\frac{1}{\beta}, \psi_0=\arg\frac{1}{\alpha};$$

$$u_{nm}(x,y)=\exp\{i(2n\pi x+2m\pi y+\varphi_0 x+\psi_0 y)\}.$$

Жоғарыдағы, (7) Фуренің қатары абсолютті және бірқалыпты жыйнақталады, сондықтан $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$.

Ілгерірек біз, мына,

$$\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)\neq 0$$

шарт орындалған сәтте кері L^{-1} операторының бар екенін және оның әсіре үзіксіз екенін көрсеткенбіз [14],[21].

Сондай ақ, $\alpha\beta\neq 0$ болғандықтан бұл L^{-1} операторы волтерлі емес [22], яғни меншікті мәндері бар, бірақ аз-ба көп-пе белгісіз. Мұны білуге жалпы теоремалардың күші жетпейді. Жалқы жағдайда, яғни $|\alpha|=1, |\beta|=1$ сәтінде меншікті мәндердің нақты екенін және шексіз көп екенін Гилберт-Шмидтің теоремасы арқылы білдік, ал егер $|\alpha|\neq 1$ немесе $|\beta|\neq 1$ болса, бұл теорема өтпейді, сондықтан тікелей есептеуді қажет етеді.

Жоғарыдағы, (1) –(2) есепке сәйкес, мына,

$$u_{xy}=\lambda u(x,y), (x,y)\in\Omega \tag{4}$$

$$u|_{AB}=\alpha u|_{CD}, u|_{AD}=\beta u|_{BC} \tag{5}$$

спектрәлді есепті қарастырайық, мұндағы α,β мына,

$$\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)\neq 0 \tag{8}$$

шартқа сай комплекс сандар. Былай, $u(x,y)=v(x)\cdot\omega(y)$ деп жорысақ, мынадай,

$$v'(x)\cdot\omega'(y)=\lambda v(x)\cdot\omega(y)$$

теңдеу аламыз. Шекаралық шарттардан

$$u\big|_{AB} = \alpha u\big|_{CD}, \Rightarrow u\big|_{y=0} = \alpha u\big|_{y=1}, \Rightarrow$$

$$u(x,0) = v(x)\omega(0) = \alpha u(x,1) = \alpha v(x)\omega(1), \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(x)[\omega(0) - \alpha\omega(0)] = 0, \Rightarrow \omega(0) - \alpha\omega(1) = 0, \alpha \neq 1$$

Онан соң, былай, $v'(x) = \mu v(x), \omega'(y) = \nu\omega(y)$ болсын деп жорысақ, онда, мынадай, $\mu \cdot \nu \cdot v(x) \cdot \omega(y) = \lambda v(x) \cdot \omega(y), \to \lambda = \mu \cdot \nu$ болады.

Демек, (4) –(5) спектрәлді есебі екі спектрәлдік есепке бөлінеді.

а) $v'(x) = \mu v(x), v(0) - \beta v(1) = 0;$

Мұнан $v(x) = C \cdot e^{\mu x}, C = const$. Осы өрнекті шекаралық шартқа апарып қойсақ, мына,

$$C - \beta e^{\mu} \cdot C = 0, C(1 - e^{\mu} \cdot \beta) = 0, e^{\mu} = \frac{1}{\beta}, \beta \neq 0$$

теңдеуді аламыз. Демек,

$$\mu_m = \ln\frac{1}{\beta} = \ln\left|\frac{1}{\beta}\right| + i\arg\frac{1}{\beta} + 2m\pi i, m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Олай болса,

$$v_m(x) = C_m \cdot e^{\mu_x x} = C_m \cdot \left(\frac{1}{|\beta|}\right)^x e^{i\arg\frac{1}{\beta}x} \cdot e^{2m\pi ix} =$$

$$= C_m \cdot |\beta|^{-x} \cdot e^{i\arg\frac{1}{\beta}x} \cdot e^{2m\pi ix}, m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

мұндағы C_m –ерікті тұрақтылар.

Екінші спектрәлдік есеп, мынадай,

б) $\begin{matrix} \omega'(x) = \nu \cdot \omega(y), \\ \omega(0) - \alpha\omega(1) = 0 \end{matrix};$

және, олда, дәл жоғарыдағыдай шешіледі.

$$\omega_n(y) = D_n \cdot |\alpha|^{-y} \cdot e^{i\arg\frac{1}{\alpha}y} \cdot e^{2n\pi iy}, n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Демек, (4) –(5) спектрәлдік есептің меншікті функциялары, мынадай,

$$u_{mn}(x,y) = v_m(x)\omega_n(y) = C_m \cdot D_n \cdot |\beta|^{-x} \cdot e^{i\varphi_0 x} \cdot e^{2m\pi ix} \cdot |\alpha|^{-y} \cdot e^{i\psi_0 y} \cdot e^{2n\pi iy} =$$

$$= C_m \cdot D_n \cdot |\beta|^{-x} \cdot |\alpha|^{-y} \cdot e^{i\varphi_0 x + i\psi_0 y} \cdot e^{2m\pi ix + 2n\pi iy}$$

болады. Енді $C_m = D_n = 1$

$$e_{mn}(x,y) = \exp\{2m\pi ix + 2n\pi iy\}, m,n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

$$\varphi_0 = \arg\frac{1}{\beta}, \psi_0 = \arg\frac{1}{\alpha}$$

деп белгілеулер енгізсек, онда

$$u_{mn}(x,y)=|\beta|^{-x}\cdot|\alpha|^{-y}\cdot e^{i\varphi_0 x+i\psi_0 y}\cdot e_{mn}(x,y)$$

болады. Жоғарыда, $\{e_{mn}(x,y)\}, m,n=0,\pm1,\pm2,...$ системасының кеңістігінде ортонормаланған базис екенін көргенбіз. Енді, былай,

$$u_{mn}(x,y)=Te_{mn}(x,y)=|\beta|^{-x}\cdot|\alpha|^{-y}\cdot e^{i\varphi_0 x+i\psi_0 y}\cdot e_{mn}(x,y)$$

деп жорып, T операторын енгізсек, онда оның шектеулі және үзіксіз қайтымды екенін байқаймыз. Демек, $\{u_{mn}(x,y)\}, m,n=0,\pm1,\pm2,...$ системасы $L^2(\Omega)$ –кеңістігінде Рисстің базисін құрайды [1]. Енді (1) –(2) есептің шешімін осы базисте таратып жазайық.

$$u(x,y)=L^{-1}f(x,y)=\sum_{m.n=-\infty}^{\infty}\left(L^{-1}f,v_{mn}\right)u_{mn}(x,y)=$$

$$=\sum_{-\infty}^{\infty}\left(f,(L^{-1})^{*}v_{mn}\right)u_{mn}(x,y)=\sum_{m,n}\left(f,\frac{v_{mn}}{\overline{\lambda}_{mn}}\right)u_{mn}(x,y)=$$

$$=\sum_{m,n}\frac{(f,v_{mn})}{\overline{\lambda}_{mn}}u_{mn}(x,y)$$

Мұндағы $\{v_{mn}(x,y)\}$ –дегеніміз сыңарлас есептің шешімі, яғни $L^{*}v_{mn}=\lambda_{mn}v_{mn}, m,n=0,\pm1,\pm2,...$

Ескерім 1. Егер $\{u_n\}, n=1,2,...$ ортонормаланған система болса, онда, мына,

$$\varphi_n=Tu_n, \psi_m=(T^{-1})^{*}u_m$$

өзара биортогонал система құрайды.

Шынында да,

$$(\varphi_n,\psi_m)=(Tu_n,(T^{-1})^{*}u_m)=(T^{-1}Tu_n,u_m)=(u_n,u_m)=\delta_{nm}$$

Біздің жағдайда

$$Tf(x,y)=|\beta|^{-x}|\alpha|^{-y}\,e^{i\varphi_0 x+i\psi_0 y}f(x,y),$$

демек ,

$$T^{-1}g(x,y)=|\beta|^{x}|\alpha|^{y}\,e^{-i\varphi_0 x-i\psi_0 y}g(x,y),$$

мұнан,

$$(T^{-1})^{*}g(x,y)=|\beta|^{x}|\alpha|^{y}\,e^{i\varphi_0 x+i\psi_0 y}g(x,y)$$

Демек,

$$u_{mn}(x,y)=(T^{-1})^{*}e_{mn}=|\beta|^{x}|\alpha|^{y}\,e^{i\varphi_0 x+i\psi_0 y}e_{mn}(x,y)$$

деп күтуге болады.

Шынында да, сыңарлас есептің шекаралық шарты, мынадай,

$$v\big|_{AB}=\frac{1}{\overline{\alpha}}v\big|_{CD}, v\big|_{AD}=\frac{1}{\overline{\beta}}v\big|_{BC},$$

демек,

$$v_{mn}(x,y)=\left|\frac{1}{\overline{\beta}}\right|^{-x}\left|\frac{1}{\overline{\alpha}}\right|^{-y}e^{i\arg\overline{\beta}x+i\arg\overline{\alpha}}e_{mn}(x,y)=\left|\begin{matrix}\frac{1}{\alpha}=\frac{\overline{\alpha}}{|x|^2}\\ \arg\frac{1}{\alpha}=\arg\overline{\alpha}\end{matrix}\right|=$$

$$=|\beta|^x|\alpha|^y e^{i\arg\frac{1}{\beta}x+i\arg\frac{1}{\alpha}y}=$$

$$=|\beta|^x|\alpha|^y e^{i\varphi_0 x+i\psi_0 y}e_{mn}(x,y)$$

Сонымен **3- теоремада** дәлелденді.

5.Қорытынды.

Толқын теңдеуінің шартарапты шекаралық есебі екі топқа бөлінеді,біріншісінің меншікті функциялары Рисстің базисін құрайды,ал екінші топтағылар вөлтерлі,сондықтан олардың спектрі жоқ деседе болады.

ӘДЕБИЕТ

[1] Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений частными производным. М.: Наука, 1978. 352с.

[2] Friedrichs K .O Symmetric. hyperbolic of Liner differential equations. Comm. Pure Apple 7 Mash., 7(1954), 345-392.

[3] I. Von Neumahn. Allgemaine Eigenwertlheorie Hermit -esher funktional Operatoren, Math, 102, 1929, p.49-131.

[4] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М., Наука, 1988.

[5] Вишик М.И. Об общих краевых задачах для эллиптических уравнений, дифференциальных уравнений, Труды ММО, 1989, 1952, т.1, 152с.

[6] Отелбаев М. Кальменов Т .Ш. О регулярных краевых задачах для уравнения Лаврентьева - Бицадзе, Дифф. уравнения, 1981, Т.А., №5, с. 873-886.

[7] Кальменов Т.Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа, Шымкент: Гылым, 1993, 327 с.

[8] Кальменов Т.Ш. О спектре одной сопреженной задачи для волнового уравнения. Весник АНКаз. 1982, №2, с. 63-66.

[9] Кальменов Т.Ш. Спектр краевых задачи со смещеннем для волнового уравнения. Диффенц. уравнения. 1983, т19, №1, с.75-78.

[10] Бияров Б.Н., Кальменов Т.Ш. О нелокальной вольнерровой задаче для гиперболического уравнения, Известия АН Каз ССР, сер. физ-162 математ, 1988. №5, с.13-16.

[11] Кальменов Т.Ш. О регулярных краевых задачах для волнового уравнения. Диффенц. уравнения. 1981, т. 17, №6, с.1105-1121.

[12] Садыбеков М.И, О задаче Дирихле для для волнового уравнения, Диффенц. уравнения . Функцион . анализ и по приложения. Алма-Ата: КазГУ, 1988, т. 17, №6, с.61-70.

[13] Садыбеков М.И, Кальменов Т.Ш. О задаче Дирихле и нелокольных краевых задачах для волнового уравнения, Диффенц. уравнения. 1990. т. 26, №1. с. 60-65.

[14] Мелдебекова С., Шалданбаев А.Ш. О реулярной разрешимости одной нелокальной краевой задачи волнового уравнения , Наука и образования ЮК, 2005. №6(46), с.105-109.

[15] Нахушев А.М. Об одном классе линейных уравненых задач для гиперболического и смешного типов уравнении второго порядка. Нальчих, Эльбурс. 1992, 155 с.

[16] Мизохата С.Теория уравнений с частным производными , М. Мир ,1977, с. 504.

[17] Brislown C. Kernels of trace class operators , Proc . Amer 7 Nath. Soc , 1988, v.104, №4, P.1181-1190.

[18] Лидский В.Б. Несамосопряженные операторы имеющии след. Доклады АН ССР, 1959, т. 105, №3, P.485-488.

[19] Нерсесян А.Б. К теории интегральных уравнений типа Вольтера. Доклады А.Н ССР, 1964, т. 155, №5. P.1049-1051.

[20] Шалданбаев А.Ш. Спектральные разложения корректных- некорректныхначально краевых задач для некоторых классов дифференциальных уравнений, Germanu, Saarbruchen: LAP LAMRET Acfdemic Pyblishing. http ;dob . d-nb. Dl. Emailinfa@lappyblishing com, 2011, 193c.

[21] Сапрыгина М.Б., Байсейтова У.С., Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О. О регулярной разрешимости нелокальной краевой задачи волнового уравнения., Известия Национальной академии наук РК, ISSN 1991-346X Серия физико-математическая. № 2. 2016, с. 48.

[22] Сапрыгина М.Б., Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О., Байсейтова У.С. Критерии вольтерровости нелокальной краевой задачи волнового уравнения .,Известия Национальной академии наук РК, ISSN 1991-346X Серия физико-математическая. № 2. 2016,с.147.

[23] Треногин В.А. Функциональный анализ. –Москва:Наука, 1980. -494 с.

REFERENCES

[1] Hadamard Zh. An initial value problem for the simple equations quotients a derivant. - M, Science, 1978, - 352 pages.
[2] Friedrichs K. O Symmetric. hyperbolic of Liner differential equations, Comm. Pure Apple 7 Mash., 7(1954), 345-392.
[3] I. Von Neumahn. Allgemaine Eigenwertlheorie Hermit - esher funktional Operatoren, Math, 102, 1929, p.49-131.
[4] Sobolev S. L. Some applications of the functional analysis in mathematical physics, M, Science, 1988.
[5] Vishik M. I. About the common boundary value problems for elliptical equations, differential equations, Works MMO, 1989, 1952, t.1, 152 pages.
[6] Otelbayev M. Kalmenov T. Sh. About the regular boundary value problems for Lavrentyev's equation - Bitsadze, Diff. equations, 1981, T.A., No. 5, page 873-886.
[7] Kalmenov T.Sh. Boundary value problems for the simple equations in partial derivatives of hyperbolic type, Shymkent:gylym, 1993,327s.
[8] Kalmenov T.Sh. About a range of one conjugate task for a wave equation, Vesnik A.N Kaz.1982, No. 2, page 63-66.
[9] Kalmenov T.Sh. A boundary value problem range with smeshchenny for a wave equation, Diffents. equations.1983, t19, No. 1, page 75-78
[10] Biyarov B. N., Kalmenov T.Sh. About a nonlocal volnerrovy task for the hyperbolic equation, AN News Kaz SSR, is gray. physical-matemat, 1988, No. 5, page 13-16.
[11] Kalmenov T.Sh. About the regular boundary value problems for a wave equation, Diffents. equations.1981, t 17, No. 6, page 1105-1121.
[12] Sadybekov M. And, About a Dirichlet problem for for a wave equation, Diffents. equations. Funktsion. the analysis and on applications Alma-Ata Kaz. GU, 1988, t 17, No. 6, page 61-70.
[13] Sadybekov M. And, Kalmenov T.Sh. About a Dirichlet problem and nonlocal boundary value problems for a wave equation, Diffents. equations, 1990, t.26, No. 1, page 60-65.
[14] Meldebekova S., Shaldanbayev A.Sh. About a reulyarny solubility of one nonlocal boundary value problem of a wave equation, Science and formations of YuK, 2005 No. 6(46), page 105-109.
[15] Nakhushev A.M. About one class of the linear balanced problems for hyperbolic and ridiculous types a second-kind equation. Nalchikh, Эльбурс.1992, 155 pages.
[16] Mizokhata S. The theory of the equations with a quotient derivants, M. Mir, 1977, page 504.
[17] Brislown C. Kernels of trace class operators, Proc. Amer 7 Nath. Soc, 1988, v.104, No. 4, P.1181-1190.
[18] Lidsky V. B. Self-conjugate operators the having trace, A.N'S Reports of the Soviet Socialist Republic, 1959, t. 105, No. 3, P.485-488.
[19] Nersesyan A.B. To the theory of integral equations like Voltaire, A.N'S Reports of the Soviet Socialist Republic, 1964, t. 155, No. 5, P.1049-1051.
[20] Shaldanbayev A.Sh. Spectral resolutions of correct - nekorrektnykhnachalno boundary value problems for some classes of differential equations, Germanu, Saarbruchen: LAP LAMRET Acfdemic Pyblishing. http; dob. d-nb. Dl. Emailinfa@lappyblishing com, 2011, 193 pages.
[21] Saprygina M. B., Bayseytova U.S., Shaldanbayev A.Sh., I.O's Orazums. About the regular solubility of a nonlocal boundary value problem of a wave equation., News of National academy of Sciences of PK, ISSN 1991-346X Series physical and mathematical. No. 2. 2016, c.48.
[22] Saprygina M. B., Shaldanbayev A.Sh., I.O., Bayseytov U.S. Orazums. Criteria of a volterrovost of a nonlocal boundary value problem of a wave equation., News of National academy of Sciences of PK, ISSN 1991-346X Series physical and mathematical. No. 2. 2016, c.147.
[23] Trenogin V.A. The functional analysis. – Moskva:nauka, 1980.-494 pages.

УДК 517.956.32

М.Т. Шоманбаева, А.А. Көпжасарова, Г.А. Бесбаев, А.Ш. Шалданбаев

Южно-казахстанский государственный университет

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВОЛНОВОГО УРАВЕНИЯ

Аннотация. Волновые уравнения встречаются в различных отраслях науки и техники, например, гидрологии, сейсмолологии, и при изучении динамики распространения волн в жидкости и газе, тем не менее, краевые задачи этого уравнения мало изучены. Работы посвященные нелокальным задачам очень мало. В данной работе предпринята попытка изучения спектральных свойств нелокальной задачи методами функционального анализа.

Ключевые слова: волновое уравнение, нелокальные краевые условия, регулярная разрешимость, спектр, базис Рисса.