

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 304 (2015), 105 – 108

UDC 517. 9

**ABOUT STRONG RESOLVABILITY OF AN ANTI-PERIODIC
PROBLEM OF THE EQUATION OF HEAT CONDUCTIVITY
WITH THE DEVIATING ARGUMENT**

Saprygina M.B., Shaldanbayev A.Sh., Orazov I.O.

The southern Kazakhstan state university of M. Auyezov, Shymkent
shaldanbaev51@mail.ru

Key words: the heat conductivity equation, own functions, attached functions, deviating argument.

Abstract. In the real work, method of division of variables and the spectral theory of the equation with we otklonyashchitsya by argument, strong resolvability of an anti-periodic problem of the equation of heat conductivity with отклоняющимся argument is shown. A deviation from Carleman's class.

УДК 517.9

**АРГУМЕНТІ АУЫТҚЫҒАН ЖЫЛУ ТЕҢДЕУІНІҢ АНТИПЕРИОДТЫ
ЕСЕБІНІҢ КУШТІ ШЕШІЛҮІ ТУРАЛЫ**

Сапрыгина М.Б., Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О.

М.Әуезов атындағы Өнгүстік-Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент қаласы
shaldanbaev51@mail.ru

Кілт сөздер: жылу тендеуі, меншікті функциялар, косарлас функциялар, ауытқыған аргумент.

Аннотация. Бұл еңбекте аргументі ауытқыған жылу тендеуінің антипериодты есебінің күшті шешілетіні көрсетілген. Зерттеу барысында айнымалыларды ажырату әдісі мен аргументі ауытқыған тендеудің спектрлік теориясы колданылған. Ауытқу Карлеманның класына тиісті.

1.Кіріспе. Аргументі ауытқыған тендеулердің теориясы көптеген авторлардың зерттеулеріне арқау болды, атап айттар болсақ, А.Д. Мышикис [1], Л.Э. Эльсгольц пен С.Б. Норкиннің [2], әйгілі, монографияларында оларға дейінгі журғізілген зерттулерге шолу жасалып, тиісті қорытындылар жасалған. Аргументі ауытқыған Штурм-Лиувилл тендеуінің шекаралық есептері С.Б. Норкиннің [3] енбегінде зерттелген. Осы, және басқа көптеген еңбектерде ауытқу тендеудің жоғарғы ретті мүшелерінде кездеседі. Ауытқу спектрлік параметрінде кездесетін жағдайға арналған еңбектерді саусақпен санауға болады, осы орайда, Т.Ш. Кальменов, С.Т. Ахметова и А.Ш. Шалданбаев [4], А.М. Ибраимкулов [5], Т.Ш. Кальменов, А.Ш. Шалданбаев [6]-[9] еңбектерін атаған және сыйақты. Функционалдық анализдің ұғымдарымен [10] –[13], ал шекаралық есептердің спектрлік мәселелерімен [14] –[23], еңбектерде танысуға болады.

Бұл еңбек [4] еңбектің жалғасы іспетті, және оның нәтиежелеріне сүйенеді, көпкі мәлім, жылу тендеуінің аргументін ауытқысақ не болады деген сұраққа жауап береді. Бұл сэтте дискретті спектр пайды болады екен, және бұл есептің ерекшелігі болса керек.

Ω -дегеніміз жазықтықта жатқан қабырғалары: $AB: 0 \leq t \leq T, x = 0; BC: 0 \leq x \leq l, t = T; CD: 0 \leq t \leq T, x = l; DA: 0 \leq x \leq l, y = 0$ болатын тіктөртбұрыш болсын делік. $C^{1,2}(\Omega)$ -арқылы Ω аймағында t бойынша бір рет, ал x бойынша екі рет үздіксіз дифференциалданатын $u(x, t)$ функциялары жиынын белгілейік. Ω -жиынының шекарасы ретінде $\Gamma = AB \cup AD \cup CD$ қабырғаларын алалық.

Антiperiodты есеп. Әрбір $f(x, t) \in L^2(\Omega)$ функциясы үшін мына,

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x, t) = f(x, t) \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} + u|_{x=l} = u_x|_{x=0} + u_x|_{x=l} = 0; \quad (2)$$

шекаралық есептің шешімін табу керек.

2. Зерттеу әдістері

Жоғарыдағы (3)-(4) спектрліді есепке айнымалыларды ажырату әдісін колданамыз, нәтиежесінде Штурм-Лиувилдің антипериодты есебі мен аргументі ауытқыған Кошидің есебін аламыз. Бірінші есептің шешімі көпшілікке мәлім, ал екінші есеп егжей-тегжейлі [4] енбекте зерттелген, сондықтан тек алынған нәтиежелерді тұжырымдаумен шектелеміз.

3. Алынған нәтиежелер

ТЕОРЕМА 1. Мына,

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x, t) = \lambda u(x, t)$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} + u|_{x=l} = u_x|_{x=0} + u_x|_{x=l} = 0$$

спектрліді есептің, мынадай,

$$\lambda_{mn} = (-1)^n \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{T} - (2m+1)^2 \frac{\pi^2}{l^2}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

шексіз көп менишікті мәндері мен оларға сәйкес, мынадай,

$$u_{mn}^-(x, t) = \frac{2}{\sqrt{Tl}} \cdot \cos(2m+1) \frac{\pi}{l} x \cdot \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{T} t, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$u_{mn}^+(x, t) = \frac{2}{\sqrt{Tl}} \cdot \sin(2m+1) \frac{\pi}{l} x \cdot \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{T} t, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

менишікті функциялары бар, және олар $L^2(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған базис құрайды, мұндағы, $\Omega = [0, l] \times [0, T]$.

ТЕОРЕМА 2. Мына,

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x, t) = f(x, t)$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} + u|_{x=l} = u_x|_{x=0} + u_x|_{x=l} = 0$$

шекаралық есептің бірегей шешімі бар болуы үшін, келесі,

$$\frac{\pi T}{l^2} \neq \frac{2n + \frac{1}{2}}{(2m+1)^2}, \quad \forall m, n = 0, 1, 2, \dots$$

шарттар орындалуы қажетті әрі жеткілікті. Осы шарттар орындалғанда, мына,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(f, u_{mn}^{\pm})}{\lambda_{mn}} \right|^2 < +\infty$$

шартты қанағаттандыратын, барлық $f(x, t) \in L^2(\Omega)$ үшін, күшті шешім бар, және ол, мынадай,

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f, u_{mn}^{\pm})}{\lambda_{mn}} \cdot u_{mn}^{\pm}(x,t) ,$$

мұндағы,

$$\lambda_{mn} = (-1)^n \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{T} - (2m+1)^2 \frac{\pi^2}{l^2}, \quad m,n = 0,1,2,\dots$$

$$u_{mn}^{-}(x,t) = \frac{2}{\sqrt{Tl}} \cdot \cos((2m+1)\frac{\pi}{l}x) \cdot \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{T} l, \quad m,n = 0,1,2,\dots$$

$$u_{mn}^{+}(x,t) = \frac{2}{\sqrt{Tl}} \cdot \sin((2m+1)\frac{\pi}{l}x) \cdot \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{T} l, \quad m,n = 0,1,2,\dots$$

ТЕОРЕМА 3. Мына,

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x, t),$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} + u|_{x=l} = u_x|_{x=0} + u_x|_{x=l} = 0$$

оператордың қабындысы $L^2(\Omega)$ кеңістігінде жалқы оператор, яғни $(\bar{L})^* = \bar{L}$.

Жоғарыдағы 2 және 3 теоремаларынан, келесі теорема туындаиды.

ТЕОРЕМА 4. Егер

$$\frac{\pi T}{l^2} \neq \frac{2n + \frac{1}{2}}{(2m+1)^2}, \quad \forall m,n = 0,1,2,\dots$$

болса, онда \bar{L}^{-1} -көрі операторы бар, және ол жалқы оператор.

4. Талқылау

Аргументті ауытқыту нәтижесінде спектр пайда болды, сондықтан сзызықтық операторлардың спектрләндік теориясын қолдануға мүмкіндік болды. Оператор мен оның қабындысының спектрі әртүрлі болары белгілі, бірақ біз оншалықты терең бойламадық.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом М. -1972. - 352 с.
- [2] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом М.-1971.- 296 с.
- [3] Норкин С.Б. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом М. -1965.- 356 с.
- [4] Кальменов Т.Ш. Ахметова С. Шалданбаев А.Ш. К спектральной теории уравнений с отклоняющимся аргументом // Математический журнал, Алматы.- 2004.- Т. 4, № 3. - С. 41-48.
- [5] Ибраимкулов А.М. О спектральных свойствах краевой задачи для уравнения с отклоняющимся аргументом // Известия АН.Каз.ССР, сер.физ.-мат.- 1988.- № 3. - С. 22-25.
- [6] T. Sh. Kal'menov, and A. Sh. Shaldanbaev, On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18, 352-369 (2010).
- [7] I. Orazov, A. Shaldanbayev, and M. Shomanbayeva, About the Nature of the Spectrum of the Periodic Problem for the Heat Equation with a Deviating Argument, Abstract and Applied Analysis, Volume 2013 (2013), Article ID 128363, 6 pages, <http://dx.doi.org/10.1155/2013/128363>
- [8] Шалданбаев А.Ш. Спектральные разложения корректных-некорректных начально краевых задач для некоторых классов дифференциальных уравнений. - Монография. 193c,LAP LAMBERT Academic Publishing. <http://dnb.d-nb.de>. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011,Germanu.
- [9] Т.Ш. Калменов. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа, Шымкент:Ғылым, 1993.-327 б.
- [10] Г.Е. Шилов. Математический анализ. Специальный курс.: Физмат, 1960.
- [11] Г. Вейль. Избранные труды, Наука, 1984. -510с.
- [12] М. Рид , Б. Саймон. Методы современной математической физики.М.: Мир, 1977, 278-285 б.
- [13] У. Рудин. Функциональный анализ,М.: Мир, 1975. -443 б.
- [14] G.D. Birkhoff. One the asymptotic character of the sotutions of certain. Linear differentiol equations containing a parametr, Trans, Amer. Math. Soc 9. (1908). Стр 219-231.
- [15] Я.Д. Тамаркин. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. П.Г. тип. М.П. Фроловой 1917.
- [16] F.Browder . On the eigenfunction and eigenvalues on the general. Linear. Miptic differential operators, Proc,Nat. Acad. ScUSA, t . 39 (1953) 433-439.

- [17] T.Carleman. Über die asymptotische Verelung der ligenwerte partiller. Differen tialgleichungen Ber. Sachs Akad. Wiss zu Leipzig. Math. Phus, klass 88(1936) 119-134.
- [18] М.В. Келдыш. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосоряженных уравнений, ДАН СССР, 1951. том LXXVII, № 1. с.11-14.
- [19] М.А. Наймарк. Линейные дифференциальные операторы, II –ое издание, М: Наука, 1969,526 с.
- [20] В.А. Марченко. Операторы Штурма Лиувилля и их приложения,Киев: Наукова думка, 1977,329 с.
- [21] Н.И. Ахиезер, Н.М. Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве ,М.: Наука, 1966, 543с.
- [22] Б.М. Левитан, И.С. Саргсян. Введение в спектральную теорию,М.: Наука ,1970, 67 с.
- [23] М.О. Отелбаев. Оценки спектра оператора Штурма-Лиувилля, Алма-ата, Фылым, 1990, с.187.

REFERENCES

- [1] Myshkis A.D. Linejnye differencial'nye uravnenija s zapazdyvajushhim argumentom M. -1972. - 352 s.
- [2] Jel'sgol'c L.Je., Norkin S.B. Vvedenie v teoriyu differencial'nyh uravnenij s otklonajushhimsja argumentom M. - 1971.- 296 s.
- [3] Norkin S.B. Differencial'nye uravnenija s zapazdyvajushhim argumentom M. -1965.- 356 s.
- [4] Kal'menov T.Sh. Ahmetova S. Shaldanbaev A.Sh. K spektral'noj teorii uravnenij s otklonajushhimsja argumentom // Matematicheskij zhurnal, Almaty.- 2004.- Т. 4, № 3. - S. 41-48.
- [5] Ibraimkulov A.M. O spektral'nyh svojstvah kraevoj zadachi dlja uravnenija s otklonajushhimsja argumentom // Izvestija AN.Kaz.SSR, ser.fiz.-mat.- 1988.- № 3.- S. 22-25.
- [6] T. Sh. Kal'menov, and A. Sh. Shaldanbaev, On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18, 352-369 (2010).
- [7] I. Orazov, A. Shaldanbayev, and M. Shomanbayeva, About the Nature of the Spectrum of the Periodic Problem for the Heat Equation with a Deviating Argument, Abstract and Applied Analysis, Volume 2013 (2013), Article ID 128363, 6 pages, <http://dx.doi.org/10.1155/2013/128363>
- [8] Shaldanbaev A.Sh. Spektral'nye razlozhenija korrektnyh-nekorrektnyh nachal'no kraevyh zadach dlja nekotoryh klassov differencial'nyh uravnenij.- Monografija. 193c,LAP LAMBERT Academic Publishing. <http://dnb.d-nb.de>. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011,Germanu.
- [9] T.Sh. Kalmenov Kraevye zadachi dlja linejnyh uravnenii v chastnyh proizvodnyh giperbolicheskogo tipa.- Shymkent.:Fylym, 1993.-327 b.
- [10] G.E. Shilov Matematicheskij analiz. Special'nyj kurs.: Fizmat, 1960.
- [11] G. Vejl' Izbrannye trudy, Nauka, 1984. -510s.
- [12] M. Rid , B. Sajmon Metody sovremennoj matematicheskoy fiziki.-M.: Mir, 1977.- 278-285 b.
- [13] U. Rudin Funkcional'nyj analiz. -M.: Mir, 1975. -443 b.
- [14] G.D. Birkhoff. One the asymptotic character of the solutions of certain. Linear differential equations containing a parametr, Trans, Amer. Math. Soc 9. (1908). Str 219-231.
- [15] Ja.D. Tamarkin. O nekotoryh obshchih zadachph teorija obyknovennyh linejnyh differencial'nyh uravnenij. P.G. tip. M.P. Fromovo 1917.
- [16] F.Browder . On the eigenfunction and eigenvalues on the general. Linear. Miptic differential operators, Proc,Nat. Acad. ScUSA, t . 39 (1953) 433-439.
- [17] T.Carleman. Über die asymptotische Verelung der ligenwerte partiller. Differen tialgleichungen Ber. Sachs Akad. Wiss zu Leipzig. Math. Phus, klass 88(1936) 119-134.
- [18] 18 М.В. Келдыш. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосоряженных уравнений II ДAI СССР, 1951. том LXXVII, № 1. СII-14.
- [19] M.A. Najmark. Linejnye, differencial'noe operatory II –ое издание –M: Nauka 1969-526s.
- [20] V.A. Marchenko. Operatory Shturma-Liuvillja i ih prilozhenija-kiev: Naukova dumka. 1977-329s.
- [21] N.I. Ahierez N.M. Glazman. Teoriya linejnyh operatorov v gilbertovom prostranstve –M. Nauka 1966. 543s.
- [22] B.M. Levitan, I.S. Sargsjan. Vvedenie v spektral'nuju teoriju. M. Nauka .1970. 670s.
- [23] M.O. Otelbaev. Oceni spektra operatora Shturma-Liuvillja. Alma-ata. Fylym 1990g. S187.

О сильной разрешимости антипериодической задачи уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом

Сапрыгина М.Б., Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О.

Южно-Казахстанский государственный университет им.М.Ауезова, г.Шымкент

Ключевые слова: уравнение теплопроводности,собственные функций,присоединенные функций,отклоняющиеся аргумент.

Аннотация. В настоящей работе,методом разделения переменных и спектральной теории уравнения с отклоняющимся аргументом, показана сильная разрешимость антипериодической задачи уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом. Отклонение из класса Карлемана.

Авторы: Сапрыгина М.Б.– к.ф.-м.н.,старший преподаватель кафедры «Информатики и математики» Южно-Казахстанской государственной фармацевтической академии,г. Шымкент.

Шалданбаев Амир Шалданбаевич – д.ф.-м.н.,профессор кафедры «Математические методы и моделирование» Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.

Оразов И.О – к.ф.-м.н.,профессор кафедры «Информатики» Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.