

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 304 (2015), 95 – 98

UDC 517. 9

**ABOUT STRONG RESOLVABILITY OF A PERIODIC PROBLEM
OF THE EQUATION OF HEAT CONDUCTIVITY WITH THE
DEVIATING ARGUMENT**

Shaldanbayev A.Sh., Orazov I.O., Saprygina M.B.

The Southern Kazakhstan state university of M. Auyezov, Shymkent
shaldanbaev51@mail.ru

Key words: the heat conductivity equation, own functions, attached functions, deviating argument.

Abstract. In the real work, method of division of variables and the spectral theory of the equation with we otklonyashchitsya by argument, strong resolvability of a periodic problem of the equation of heat conductivity with отклоняющимся argument is shown. A deviation from Carleman's class.

УДК 517. 9

**АРГУМЕНТІ АУЫТҚЫҒАН ЖЫЛУ ТЕҢДЕУІНІҢ ПЕРИОДЫ
ЕСЕБІНІҢ КҮШТІ ШЕШІЛУІ ТУРАЛЫ**

Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О., Сапрыгина М.Б.

М.Әуезов атындағы Оңтүстік-Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент қаласы
shaldanbaev51@mail.ru

Кітт сөздер: жылу тендеуі, меншікті функциялар, косарлас функциялар, ауытқыған аргумент.

Аннотация. Бұл еңбекте аргументі ауытқыған жылу тендеуінің периодты есебінің күшті шешілетіні көрсетілген. Зерттеу барысында айнымалыларды ажырату әдісі мен аргументі ауытқыған тендеудің спектрлі теориясы колданылған.

1.Кіріспе. Аргументі ауытқыған тендеулердің теориясы көптеген авторлардың зерттеулеріне арқау болды, атап айтар болсақ, А.Д. Мышикис [1], Л.Э. Эльсгольц пен С.Б. Норкиннің [2], әйгілі, монографияларында оларға дейінгі журғізілген зерттулерге шолу жасалып, тиісті қорытындылар жасалған. Аргументі ауытқыған Штурм-Лиувилл тендеуінің шекаралық есептері С.Б. Норкиннің [3] енбегінде зерттелген. Осы, және басқа көптеген еңбектерде ауытқу тендеудің жоғарғы ретті мүшелерінде кездеседі. Ауытқу спектрлік параметрінде кездесетін жағдайға арналған еңбектерді саусақпен санауға болады, осы орайда, Т.Ш. Кальменов, С.Т. Ахметова и А.Ш. Шалданбаев [4], А.М. Ибраимкулов [5], Т.Ш. Кальменов, А.Ш. Шалданбаев [6] –[9] еңбектерін атаған және сыйақты. Функционалдық анализдің ұғымдарымен [10] –[13], ал шекаралық есептердің спектрлік мәселелерімен [14] –[21], еңбектерде танысуға болады.

Бұл еңбек [4] еңбектің жалғасы іспетті, және оның нәтиежелеріне сүйенеді, көпке мәлім, жылу тендеуінің аргументін ауытқысада не болады деген сұраққа жауап береді. Бұл сэтте дискретті спектр пайда болады екен, және бұл есептің ерекшелігі болса керек.

Ω – дегеніміз жазықтықта жатқан қабырғалары: $AB : 0 \leq t \leq T, x = 0; BC : 0 \leq x \leq l, t = T$; $CD : 0 \leq t \leq T, x = l; DA : 0 \leq x \leq l, y = 0$ болатын тіктөртбұрыш болсын делік. $C^{2,1}(\Omega)$ – дегеніміз x бойынша екі рет, ал t бойынша бір рет, Ω аймағында үздіксіз дифференциалданатын функциялар жиыныны болсын. $\Gamma = AB \cup AD \cup CD$ жиыны Ω аймағының шекарасы делік.

Периодты есеп. Әрбір, $f(x,t) \in L^2(\Omega)$ функциясы үшін, мына,

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x, t) = f(x, t) \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} - u|_{x=l} = u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = 0; \quad (2)$$

шекаралық есептің шешімін табу керек. Бұл үшін, мына,

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x, t) = \lambda u(x, t), \quad (3)$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} - u|_{x=l} = u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = 0; \quad (4)$$

спектрәлді есепті зерттеу керек.

2. Зерттеу әдістері

Жоғарыдағы (3)-(4) спектрәлді есепке айнымалыларды ажырату әдісін қолданамыз, нәтиежесінде Штурм-Лиувилдің периодты есебі мен аргументі ауытқыған Кошидің есебін аламыз. Бірінші есептің шешімі көпшілікке мәлім, ал екінші есеп егжей-тегжейлі [4] еңбекте зерттелген, сондықтан, тек алынған нәтиежелерді тұжырымдаумен шектелеміз.

3. Алынған нәтиежелер

Теорема 1. Мына,

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x, t) = \lambda u(x, t)$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} - u|_{x=l} = u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = 0$$

спектрәлді есептің, мынадай,

$$\lambda_{mn} = (-1)^n \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{T} - \left(\frac{2m\pi}{l} \right)^2, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

шексіз көп меншікті мәндері мен оларға сәйкес, мынадай,

$$u_{mn}^-(x, t) = \frac{2}{\sqrt{Tl}} \cdot \cos \frac{2m\pi}{l} x \cdot \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{T} t, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$u_{mn}^+(x, t) = \frac{2}{\sqrt{Tl}} \cdot \sin \frac{2m\pi}{l} x \cdot \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{T} t, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots$$

меншікті функциялары бар, және олар $L^2(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған базис құрайды, мұндағы, $\Omega = [0, l] \times [0, T]$.

Теорема 2. Мына,

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x, t) = f(x, t)$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} - u|_{x=l} = u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = 0$$

шекаралық есептің бірегей шешімі бар болуы үшін, мына,

$$\frac{\pi T}{l^2} \neq \frac{2n + \frac{1}{2}}{(2m)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots$$

шарттар орындалуы қажетті ері жеткілікті. Осы шарттар орындалғанда, мына,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(f, u_{mn}^{\pm})}{\lambda_{mn}} \right|^2 < +\infty$$

шартты қанагаттандыратын барлық $f(x, t) \in L^2(\Omega)$ үшін күшті шешімі бар, және ол, мынадай,

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f, u_{mn}^{\pm})}{\lambda_{mn}} \cdot u_{mn}^{\pm}(x, t).$$

Мұндағы,

$$\lambda_{mn} = (-1)^n \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{T} - \left(\frac{2m\pi}{l} \right)^2, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$u_{mn}^-(x, t) = \frac{2}{\sqrt{Tl}} \cdot \cos \frac{2m\pi}{l} x \cdot \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{T} l, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$u_{mn}^+(x, t) = \frac{2}{\sqrt{Tl}} \cdot \sin \frac{2m\pi}{l} x \cdot \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{T} l, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема 3. Мына,

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x, t),$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} - u|_{x=l} = u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = 0$$

оператордың қабындысы $L^2(\Omega)$ кеңістігінде жалқы оператор, яғни $(\bar{L})^* = \bar{L}$.

Жоғарыдағы 2 және 3 теоремаларынан келесі теорема туындаиды.

Теорема 4. Егер

$$\frac{\pi T}{l^2} \neq \frac{2n+1}{(2m)^2}, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots$$

болса, онда \bar{L}^{-1} -көрі операторы бар, және ол жалқы оператор.

4. Талқылау

Аргументті аудыктыу нәтижесінде спектр пайда болды, сондықтан сзықтық операторлардың спектрләндік теориясын қолдануға мүмкіндік болды. Оператор мен оның қабындысының спектрі әртүрлі болары белгілі, бірақ біз оншалықты терең бойламадық.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Мышикис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, М. -1972. - 352 с.
- [2] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, М.- 1971.- 296 с.
- [3] Норкин С.Б. Дифференциальные уравнения с запаздывающим Аргументом, М. -1965.- 356 с.
- [4] Кальменов Т.Ш. Ахметова С. Шалданбаев А.Ш. К спектральной теории уравнений с отклоняющимся аргументом, Математический журнал, Алматы.- 2004.- Т. 4, № 3. - С. 41-48.
- [5] Ибраимкулов А.М. О спектральных свойствах краевой задачи для уравнения с отклоняющимся аргументом, Известия АН.Каз.ССР, сер.физ.-мат.- 1988.- № 3, С. 22-25.
- [6] T. Sh. Kal'menov, and A. Sh. Shaldanbaev. On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18, 352-369 (2010).
- [7] I. Orazov, A. Shaldanbayev, and M. Shomanbayeva, About the Nature of the Spectrum of the Periodic Problem for the Heat Equation with a Deviating Argument, Abstract and Applied Analysis, Volume 2013 (2013), Article ID 128363, 6 pages, <http://dx.doi.org/10.1155/2013/128363>.
- [8] Шалданбаев А.Ш. Спектральные разложения корректных-некорректных начально краевых задач для некоторых классов дифференциальных уравнений, Монография, 193c,LAP LAMBERT Academic Publishing. <http://dnb.d-nb.de>. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011,Germanu.
- [9] Т.Ш. Калменов. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа, Шымкент.:Гылым, 1993,327 б.
- [10] Г.Е. Шилов. Математический анализ. Специальный курс.: Физмат, 1960
- [11] Г. Вейль. Избранные труды, Наука, 1984,510с.
- [12] М. Рид , Б. Саймон. Методы современной математической физики,М.: Мир, 1977, 285 б.
- [13] У. Рудин. Функциональный анализ,М.: Мир, 1975,443 б.
- [14] G.D. Birkhoff. One the asymptotic character of the sotutions of certain. Linear differentiol equations containing a parametr, Trans, Amer. Math. Soc 9. (1908). Стр 219-231.
- [15] Я.Д. Тамаркин. О некоторых общих задачах теория обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, П.Г. тип. М.П. Фроловой 1917.
- [16] F.Browder . On the eigenfunction and eigenvalues on the general. Linear. Miptic differential operators, Proc,Nat. Acad. ScUSA, т . 39 (1953) 433-439.
- [17] T.Carleman. Über die asymptotische Verelung der ligenwerte partiller. Differen tialgleichungen Ber. Sachs Akad. Wiss zu Leipzig. Math. Phus, klass 88(1936) 119-134.
- [18] М.В. Келдыш. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, ДАН СССР, 1951. том LXXVII, № 1, с.11-14.

-
- [19] М.А. Наймарк. Линейные дифференциальные операторы, II –ое издание –М: Наука, 1969,526 с.
 - [20] В.А. Марченко. Операторы Штурма Лиувилля и их приложения,Киев: Наукова думка, 1977,329 с.
 - [21] Н.И Ахиезер, Н.М. Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве,М, Наука,1966, 543 с.

REFERENCES

- [1] Myshkis A.D. Linejnye differencial'nye uravnenija s zapazdyvajushhim argumentom, M. -1972. - 352 s.
- [2] Jel'sgol'c L.Je., Norkin S.B. Vvedenie v teoriju differencial'nyh uravnenij s otklonjajushhimsja argumentom, M.- 1971.- 296 s.
- [3] Norkin S.B. Differencial'nye uravnenija s zapazdyvajushhim Argumentom, M. -1965.- 356 s.
- [4] Kal'menov T.Sh. Ahmetova S. Shaldanbaev A.Sh. K spektral'noj teorii uravnenij s otklonjajushhimsja argumentom, Matematicheskij zhurnal, Almaty.- 2004. - Т. 4, № 3. - S. 41-48.
- [5] Ibraimkulov A.M. O spektral'nyh svojstvah krajevoj zadachi dlja uravnenija s otklonjajushhimsja argumentom, Izvestija AN.Kaz.SSR, ser.fiz.-mat. - 1988.- № 3.- S. 22-25.
- [6] T. Sh. Kal'menov, and A. Sh. Shaldanbaev. On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18, 352-369 (2010).
- [7] I. Orazov, A. Shaldanbayev, and M. Shomanbayeva, About the Nature of the Spectrum of the Periodic Problem for the Heat Equation with a Deviating Argument, Abstract and Applied Analysis, Volume 2013 (2013), Article ID 128363, 6 pages, <http://dx.doi.org/10.1155/2013/128363>.
- [8] Shaldanbaev A.Sh. Spektral'nye razlozhenija korrektnyh-nekorrektnyh nachal'no kraevyh zadach dlja nekotoryh klassov differencial'nyh uravnenij, Monografija, 193c,LAP LAMBERT Academic Publishing. <http://dnb.d-nb.de>. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011,Germanu.
- [9] T.Sh. Kalmenov. Kraevye zadachi dlja linejnyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh giperbolicheskogo tipa, Shymkent.:Fylym, 1993.-327 b.
- [10] G.E. Shilov. Matematicheskij analiz. Special'nyj kurs.: Fizmat, 1960
- [11] G. Vejl'. Izbrannye trudy, Nauka, 1984. -510s.
- [12] M. Rid , B. Sajmon. Metody sovremennoj matematicheskoy fiziki.-M.: Mir, 1977.- 278-285 b.
- [13] U. Rudin. Funkcional'nyj analiz. -M.: Mir, 1975. -443 b.
- [14] G.D. Birkhoff. One the asymptotic character of the sotutions of certain. Linear differentiol equations containing a parametr, Trans, Amer. Math. Soc 9. (1908). Str 219-231.
- [15] Ja.D. Tamarkin. O nekotoryh obshhih zadachah teorija obyknovennyh linejnyh differencial'nyh uravnenij, P.G. tip. M.P. Frolovoj 1917.
- [16] F.Browder . On the eigenfunction and eigenvalues on the general. Linear. Miptic differential operators, Proc,Nat. Acad. ScUSA, t . 39 (1953) 433-439.
- [17] T.Carleman. Uber die asymptotische Verelung der ligenwerte partiller. Differen tialgleichungen Ber. Sachs Akad. Wiss .zu Leipzig. Math. Phus, klass 88(1936) 119-134.
- [18] M.V. Keldysh. O sobstvennyh znachenijah i sobstvennyh funkciyah nekotoryh klassov nesamosoprijazhennyh uravnenij II DAI SSSR, 1951. tom LXXVII, № 1, c.11-14.
- [19] M.A. Najmark. Linejnye differencial'noe operatory, II –ое издание –М: Наука, 1969,526 s.
- [20] V.A. Marchenko. Operatory Shturma Liuvillja i ih prilozhenija,Kiev: Naukova dumka, 1977,329 s.
- [21] N.I Ahierez, N.M. Glazman. Teorija linejnyh operatorov v gilbertovom prostranstve,М, Наука,1966, 543 s.

УДК 517. 9

О сильной разрешимости периодической задачи уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом

Шалданбаев А.Ш,Оразов И.О,Сапрыгина М.Б

Южно-Казахстанский государственный университет им.М.Ауезова,г.Шымкент

Ключевые слова: уравнение теплопроводности,собственные функций,присоединенные функций,отклоняющиеся аргумент.

Аннотация. В настоящей работе,методом разделения переменных и спектральной теории уравнения с отклоняющимся аргументом, показана сильная разрешимость периодической задачи уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом. Отклонение из класса Карлемана.

Авторы:

Шалданбаев Амир Шалданбаевич – д.ф.-м.н.,профессор кафедры «Математические методы и моделирование» Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.

Оразов И.О – к.ф.-м.н.,профессор кафедры «Информатики» Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.

Сапрыгина М.Б.– к.ф.-м.н.,старший преподаватель кафедры «Информатики и математики» Южно-Казахстанской государственной фармацевтической академии,г. Шымкент.