N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 6, Number 310 (2016), 115 – 120

UDC 517.956.29

U.A. Iskakova, B.T. Torebek

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
torebek@math.kz

CERTAIN METHOD OF SOLVING ILL-POSED CAUCHY-ROBIN PROBLEM FOR THE LAPLACE OPERATOR

Abstract. In this paper we consider the Robin-Cauchy problem for Laplace equations in a cylindrical domain. The method of spectral expansion in eigenfunctions of the Robin-Cauchy problem for equations with deviating argument establishes a criterion of the strong solvability of the considered Robin-Cauchy problem. It is shown that the ill-posedness Robin-Cauchy problem is equivalent to the existence of an isolated point of the continuous spectrum for a self-adjoint operator with deviating argument.
Key words: Laplace equation, Robin-Cauchy problem, self-adjoint operator, ill-posedness.

УДК 517.956.29

У.А. Искакова, Б.Т. Торебек

Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Республика Казахстан

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕКОРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ РОБЕНА-КОШИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

Аннотация. В настоящей работе рассматривается задача Робена-Коши для уравнения Лапласа в цилиндрической области. Методом спектрального разложения по собственным функциям задачи Робена-Коши для уравнения с отклоняющимся аргументом, установлен критерий сильной разрешимости рассматриваемой задачи Робена-Коши. Показывается, что некорректность задачи Робена-Коши оказывается эквивалентной существованию изолированной точки непрерывного спектра для самосопряженного оператора с отклоняющимся аргументом.
Ключевые слова: уравнение Лапласа, задача Робена-Коши, самосопряженный оператор, некорректность.

1. Введение и основной результат.

Как известно, Ж. Адамаром [1] был построен пример, показывающий неустойчивость решения задачи Коши для уравнения Лапласа. В [2], [3] и других, эта задача Коши сведена к интегральным уравнениям первого рода, и даны различные методы регуляризации задачи и установлена ее условная корректность.

В отличие от приведенных результатов, в настоящей работе обосновывается новый критерий корректности (некорректности) начально-краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка в трехмерном цилиндре. Принципиальное отличие нашей работы от работ других авторов заключается в применении спектральных задач для уравнений с отклоняющимся аргументом при исследовании некорректных краевых задач. Данный метод впервые применялась в [4] к решению задачи Коши для двумерного уравнения Лапласа.

Пусть $D=(0,1)\times\Omega$ - цилиндр, $\Omega\subset R^n, n>1$ - ограниченная область с границей S.

В D рассмотрим смешанную задачу Коши для эллиптического уравнения

$$Lu\equiv u_{tt}(x,t)+\Delta u(x,t)=f(x,t),(x,t)\in D, \tag{1}$$

с условиями Робена $$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t)+\alpha u(x,t)=0, x\in S, t\in[0,1], \qquad (2)$$

(ν – вектор внешней нормали к S) и Коши

$$u(0,x)=u_t(0,x)=0, x\in\Omega\bigcup S. \qquad (3)$$

Здесь $\alpha\geq 0$ - действительное число.

Определение. *Функцию $u\in L_2(D)$ назовем сильным решением смешанной задачи Робена-Коши (1)-(3), если существует такая последовательность функций $u_n\in C^2(\bar{D})$, удовлетворяющих условиям (2) и (3), и таких, что u_n и Lu_n сходятся в норме $L_2(D)$ соответственно к $u(x,t)$ и $f(x,t)$.*

В дальнейшем важную роль будет играть следующая задача на собственные значения для эллиптического уравнения с отклоняющимся аргументом.

Найти числовые значения λ (собственные значения), при которых задача для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом

$$Lu\equiv u_{tt}(x,t)+\Delta u(x,t)=\lambda u(x,1-t),(x,t)\in D, \qquad (4)$$

имеет ненулевые решения (собственные функции), удовлетворяющие условиям (2) и (3).

Очевидно, что эквивалентная запись уравнения (4) имеет вид $LPu=\lambda u,(t,x)\in D,$ где $Pu(x,t)=u(x,1-t)$ - унитарный оператор.

Рассмотрим следующую спектральную задачу Робена для оператора Лапласа

$$-\Delta u_k(x)=\mu_k u_k(x), x\in\Omega, \qquad (5)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial \nu}(x)+\alpha u_k(x)=0, x\in S. \qquad (6)$$

Известно, что задача (5)-(6) является самосопряженным, неотрицательно определенным оператором в $L_2(\Omega)$. Все собственные значения задачи (5)-(6) неотрицательны и дискретны, а система всех собственных функций образуют полную ортонормированную систему в $L_2(\Omega)$. Пусть μ_k - все собственные значения (занумерованные в порядке неубывания), а $u_k(x), k\in N$ - полная система всех ортонормированных собственных функций спектральной задачи (5)-(6).

Теорема 1.1 *Спектральная задача Коши (4), (3) имеет полную ортонормированную систему собственных векторов*

$$u_{km}(x,t)=u_k(x)\cdot v_{km}(t), \qquad (7)$$

где $k,m\in N$, $v_{km}(t)$ - ненулевые решения задачи

$$v''_{km}(t)-\mu_k v_{km}(t)=\lambda_{km}v_{km}(1-t),\ 0<t<1, v_{km}(0)=v'_{km}(0)=0, \qquad (8)$$

а λ_{km} - собственные значения задачи (4), (3). При этом для больших k наименьшее собственное значение λ_{k1} имеет асимптотику

$$\lambda_{k1}=4\mu_k e^{-\sqrt{\mu_k}}(1+o(1)). \qquad (9)$$

Теорема 1.2 *Сильное решение смешанной задачи Коши (1) - (3) существует тогда и только тогда, когда $f(x,t)$ удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\tilde{f}_{k1}}{\lambda_{k1}}\right|^2<\infty, \qquad (10)$$

где $\tilde{f}_{km}=(f(x,1-t),u_{km}(x,t))$.

Если выполняется условия (10), то решение задачи (1)-(3) можно представить в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{f}_{k1}}{\lambda_{k1}}u_{k1}(x,t)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}}u_{km}(x,t). \qquad (11)$$

Обозначим через $\tilde{L}_2(D)$ подпространство $L_2(D)$, натянутое на собственные вектора $\{u_{k1}(x,t)\}_{k=p+1}^{\infty}$, $p\in N$ а через $\hat{L}_2(D)$ - его ортогональное дополнение $L_2(D)=\tilde{L}_2(D)\oplus\hat{L}_2(D)$.

Теорема 1.3. *Для любого* $f \in \overset{\circ}{E}_2(D)$ *решение задачи (1)-(3) существует, единственно и принадлежит* $\overset{\circ}{E}_2(D)$. *Это решение устойчиво и имеет вид*

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{p}\frac{\tilde{f}_{k1}}{\lambda_{k1}}u_{k1}(x,t)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}}u_{km}(x,t). \qquad (12)$$

3. Some auxiliary statements

В этом пункте приведем некоторые вспомогательные утверждения для доказательства основных результатов.

Лемма 1.1 При каждом фиксированном значении индекса k спектральная задача (8) имеет полную ортонормированную в $L_2(0,1)$ систему собственных векторов $v_{km}(t)$, $m=1,2,...,$ соответствующих собственным значениям λ_{km}. Эти собственные значения λ_{km} являются корнями уравнения

$$\sqrt{\mu_k-\lambda}ch\frac{\sqrt{\mu_k+\lambda}}{2}ch\frac{\sqrt{\mu_k-\lambda}}{2}-\sqrt{\mu_k+\lambda}sh\frac{\sqrt{\mu_k+\lambda}}{2}sh\frac{\sqrt{\mu_k-\lambda}}{2}=0. \qquad (13)$$

Доказательство. Действительно, применяя к задаче Коши (8) обратный оператор L_C^{-1} приходим к операторному уравнению

$$v_{km}(t)=\lambda L_C^{-1}Pv_{km}(t),$$

где $Pf(t)=f(1-t)$, а функция $\phi(t)=L_C^{-1}f(t)$ является решением задачи Коши

$$\phi''(t)-\mu_k\phi(t)=f(t),\phi(0)=\phi'(0)=0,\forall f(t)\in L_2(0,1).$$

Тогда для оператора L_C^{-1} имеем представление

$$L_C^{-1}f(t)=\frac{1}{\sqrt{\mu_k}}\int_0^t f(\xi)sh\sqrt{\mu_k}(t-\xi)d\xi,\forall f(t)\in L_2(0,1). \qquad (14)$$

Следовательно, сопряженный оператор имеет вид

$$\left(L_C^{-1}\right)^* f(t)=\frac{1}{\sqrt{\mu_k}}\int_t^1 f(\xi)sh\sqrt{\mu_k}(\xi-t)d\xi,\forall f(t)\in L_2(0,1). \qquad (15)$$

Учитывая представления (14) и (15), нетрудно убедиться, что $L_C^{-1}Pf=P\left(L_C^{-1}\right)^* f$.

Тогда цепочка равенств $L_C^{-1}Pf=P\left(L_C^{-1}\right)^* f=P^*\left(L_C^{-1}\right)^* f=\left(L_C^{-1}P\right)^* f,\forall f(t)\in L_2(0,1)$, позволяет заключить, что оператор $L_C^{-1}P$ является вполне непрерывным самосопряженным оператором Гильберта-Шмидта [5]. Следовательно при каждом $k=1,2,...,$ спектральная задача (8)-(6) имеет полную ортонормированную систему функций $v_{km}(t),m=1,2,...$ в $L_2(0,1)$.

Собственные функции задачи (4), (3) ищем методом разделения переменных в виде

$$u_k(x,t)=u_k(x)v(t),$$

где $k\in N$. Тогда для определения неизвестной функции $v(t)$ имеем спектральную задачу для уравнения с отклоняющимся аргументом (8).

Нетрудно показать, что общее решение уравнения из (8) имеет вид

$$v(t)=c_1\ ch\sqrt{\mu_k+\lambda}\left(t-\frac{1}{2}\right)+c_2\ sh\sqrt{\mu_k-\lambda}\left(t-\frac{1}{2}\right),$$

где c_1 и c_2 – некоторые постоянные.

Используя начальные условия в (8), приходим к системе линейных однородных уравнений относительно этих постоянных. Как известно, чтобы эта система имела нетривиальное решение, выражение (13) должен равняться нулю. Таким образом, для определения параметра λ имеем (13).

Лемма 1.1 доказана полностью.

Пусть

$$\varpi_k(\lambda)=\ln\left(cth\frac{\sqrt{\mu_k+\lambda}}{2}\right)+\ln\left(cth\frac{\sqrt{\mu_k-\lambda}}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\mu_k+\lambda}{\mu_k-\lambda}\right)=0. \tag{16}$$

Лемма 1.2 Существует число λ_0 такое, что при всех

$$0<\lambda<\lambda_0<\frac{\mu_k}{4\mu_k+\theta}, k\geq 1, \theta\in(0,1),$$

справедливы следующие утверждения:

1) функция $\varpi_k'(\lambda)$ сохраняет постоянный знак;

2) для функции $\varpi_k''(\lambda)$ выполняется неравенство $|\lambda\mu_k\varpi_k''(\lambda)|<1, k>1$.

Доказательство. В силу леммы 1.1 имеем вещественность собственных значений задачи (8) - (6), то есть вещественность корней λ_{km} уравнения (13).

При этом легко проверить, что $\lambda_{km}>0$. Действительно, выпишем асимптотику наименьших собственных значений λ_{km} при $k\to\infty$.

После нетривиальных преобразований уравнения (13), имеем

$$\frac{\sqrt{\mu_k+\lambda}}{\sqrt{\mu_k-\lambda}}=cth\frac{\sqrt{\mu_k+\lambda}}{2}cth\frac{\sqrt{\mu_k-\lambda}}{2}. \tag{17}$$

Считая $|\lambda|<1$ и логарифмируя обе части равенства (17), получаем (16). Вычислив здесь производную, получаем $\varpi_k'(0)=-\frac{1}{\mu_k}$. Тогда искомую границу монотонности функции $\varpi_k(\lambda)$ можно определить из соотношения $\varpi_k'(\lambda_0)=\varpi_k'(0)+\varpi_k''(\theta\lambda_0)\lambda_0<0$. Здесь $0<\lambda_0<1$ а $\theta\in(0,1)$ - произвольное число. Таким образом, для определения λ_0 имеем условие

$$\lambda_0\mu_k\varpi_k''(\theta\lambda_0)<1. \tag{18}$$

Распишем явно вторую производную функций $\varpi_k(\lambda)$:

$$\varpi_k''(\lambda)=\frac{ch\sqrt{\mu_k+\lambda}}{4(\mu_k+\lambda)sh^2\sqrt{\mu_k+\lambda}}+\frac{ch\sqrt{\mu_k-\lambda}}{4(\mu_k-\lambda)sh^2\sqrt{\mu_k-\lambda}}+$$
$$+\frac{1}{4\sqrt{(\mu_k+\lambda)^3}sh\sqrt{\mu_k+\lambda}}+\frac{1}{4\sqrt{(\mu_k-\lambda)^3}sh\sqrt{\mu_k-\lambda}}-\frac{2\lambda\mu_k}{(\mu_k^2-\lambda^2)^2}.$$

Так как $\quad \dfrac{2\lambda_0\theta\mu_k}{(\mu_k^2-(\lambda_0\theta)^2)^2}\geq-\dfrac{1}{(\mu_k+\lambda_0\theta)^2}$ и $\dfrac{ch\sqrt{\mu_k\pm\lambda_0\theta}}{sh^2\sqrt{\mu_k\pm\lambda_0\theta}}\leq\dfrac{1}{ch\sqrt{\mu_k\pm\lambda_0\theta}-1}$.

Тогда верно неравенство $\quad \varpi_k''(\lambda_0\theta)\leq\dfrac{1}{(\mu_k-\lambda_0\theta)}\dfrac{2+\left(1-e^{-\sqrt{\mu_k-\lambda_0\theta}}\right)^2}{\left(1-e^{-\sqrt{\mu_k-\lambda_0\theta}}\right)^2}$.

Значит

$$\varpi_k''(\lambda_0\theta)<\frac{1}{(\mu_k-\lambda_0\theta)}\frac{3-2e^{-\sqrt{\mu_k-\lambda_0\theta}}+e^{-2\sqrt{\mu_k-\lambda_0\theta}}}{\left(1-e^{-\sqrt{\mu_k-\lambda_0\theta}}\right)^2} \tag{19}$$

Далее, при больших значениях k из (19) получаем справедливость неравенства

$$\varpi_k''(\lambda_0\theta)\leq\frac{4}{\mu_k-\lambda_0\theta}.$$

К последнему применяя условие (18), получим требуемую границу для λ_0: $\lambda_0<\frac{\mu_k}{4\mu_k+\theta}, \mu_k>1, 0<\theta<1$. Лемма 1.2 доказана.

Рассмотрим теперь вопрос об асимптотике собственных значений задачи (8) при больших k.

Лемма 1.3 *Асимптотика собственных значений задачи (8), не превосходящих* λ_0, *при больших* k *имеет следующий вид* (9).

Доказательство. Согласно лемме 1.2, монотонная функция $f_k(\lambda)$ на интервале $(0,\lambda_0)$ может иметь только один нуль. По формуле Тейлора имеем

$$\varpi_k(\lambda)=\varpi_k(0)+\frac{\varpi_k'(0)}{1!}\lambda+\frac{\varpi_k''(\theta\lambda)}{2!}\lambda^2<0,0<\theta<1.$$

Подставляя вычисленные значения функций и ее производной, получаем

$$\varpi_k(\lambda)=2\ln\left(cth\frac{\sqrt{\mu_k}}{2}\right)-\frac{\lambda}{\mu_k}+\varpi_k''(\theta\lambda)\frac{\lambda^2}{2}.$$

Тогда нулем линейной части функции $\mu_k\varpi_k(\lambda)=2\mu_k\ln\left(cth\frac{\sqrt{\mu_k}}{2}\right)-\lambda+\frac{\mu_k\lambda^2}{2}\varpi_k''(\theta\lambda)$ будет $\lambda_{k1}=2\mu_k\ln\left(\frac{1+e^{-\sqrt{\mu_k}}}{1-e^{-\sqrt{\mu_k}}}\right)$. При достаточно больших значениях $k\in N$, учитывая асимптотические формулы последнее можно записать виде $\lambda_{k1}=4\mu_k e^{-\sqrt{\mu_k}}(1+o(1))$.

Учитывая результат леммы 1.2, на окружности $|\lambda|=4\mu_k e^{-\sqrt{\mu_k}}(1+\varepsilon)$, где ε - сколь угодное малое положительное число, для достаточно больших $k\ge k_0(\varepsilon)$ легко проверить справедливость неравенства

$$\left|\varpi_k''(\theta\lambda)\mu_k\lambda^2\right|_{|\lambda|=4\mu_k e^{-\sqrt{\mu_k}}(1+\varepsilon)}\le C\left|2\mu_k\ln\left(\frac{1+e^{-\sqrt{\mu_k}}}{1-e^{-\sqrt{\mu_k}}}\right)-\lambda\right|_{|\lambda|=4\mu_k e^{-\sqrt{\mu_k}}(1+\varepsilon)}.$$

Тогда по теореме Руше [7] имеем, что количество нулей функции $\mu_k\varpi_k(\lambda)$ и ее линейной части совпадают и лежат внутри круга $|\lambda|=4\mu_k e^{-\sqrt{\mu_k}}(1+\varepsilon)$. Следовательно, функция $\mu_k\varpi_k(\lambda)$ при $0<\lambda<\lambda_0$ имеет один нуль, асимптотика которого задается формулой (9). Лемма 1.3 доказана.

4. Proof of the main results

Доказательство теоремы 1.1. Через $u_k(x), k\in N$ мы обозначили полную систему ортонормированных собственных функций задачи (5) в $L_2(\Omega)$. В силу леммы 1.1 при каждом фиксированном значении индекса k спектральная задача (8) имеет полную ортонормированную систему собственных векторов $v_{km}(t)$, $m=1,2,...$ в $L_2(0,1)$. Тогда система (7) образует полную ортогональную систему в $L_2(D)$. Следовательно, других собственных значений и собственных функций задача (4), (3) не имеет. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Пусть $u(x,t)\in C^2(D)$ - решение задачи (1) - (3). Тогда, в силу полноты и ортонормированности собственных функций $u_{km}(x,t)$ задачи (4), (3), функцию $u(x,t)$ в пространстве $L_2(D)$ можно разложить в ряд [6]

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{km}u_{km}(x,t), \tag{20}$$

где a_{km} – коэффициенты Фурье по системе $u_{km}(x,t)$. Переписав уравнение (1) в виде

$$LPu=P\left(u_{tt}(x,t)-L_x u(x,t)\right)=Pf(x,t), \tag{21}$$

и подставив решение вида (20) в равенство (21), с учетом соотношения

$$P\left(\frac{\partial^2 u_{km}}{\partial t^2}(x,t)-L_x u_{km}(x,t)\right)=\lambda_{km}u_{km}(x,t),$$

имеем $a_{km}=\frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}}$, где $\tilde{f}_{km}=\left(f(x,1-t),u_{km}(x,t)\right)$.

Таким образом, для решения $u(x,t)$ получим следующее явное представление

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}}u_{km}(x,t). \tag{22}$$

Отметим, что представление (22) остается справедливым для любого сильного решения задачи (1) - (3). Это представление нами получено в предположении, что решение задачи Коши (1) - (3) существует.

Естественно возникает вопрос, для какого подмножества функций $f \in L_2(D)$ существует сильное решение? Для ответа на этот вопрос представим формулу (22) в виде (11) из которого, в силу равенства Парсеваля, следует

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\tilde{f}_{k1}}{\lambda_{k1}}\right|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\left|\frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}}\right|^2. \tag{23}$$

В силу леммы 1.3 имеем $\lambda_{km} \geq \frac{1}{4}, m > 1$. Поэтому правая часть равенства (23) ограничена только для тех $f(x,t)$, для которых ограничена весовая норма (10).

Тем самым доказана теорема 1.2.

Доказательство теоремы 1.3. Очевидно, что оператор L является инвариантным в $\hat{L}_2(D)$. В силу теоремы 1.2 для любой $f \in \hat{L}_2(D)$ существует единственное решение задачи (1)-(3) и его можно представить в виде (12).

Таким образом определенное бесконечномерное пространство $\hat{L}_2(D)$ является пространством корректности задачи Коши (1)-(3). Теорема 1.3 доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантового финансирования Комитета науки МОН РК по проекту № 0820/ГФ4.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hadamard J., Lectures on the Cauchy Problem in Linear Differential Equations, Yale University Press, New Haven, CT, 1923.

[2] Лаврентьев М. М. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Известия АН СССР. Сер. мат. 1956. Т.20, №6. С.819-842.

[3] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 142 с.

[4] Кальменов Т.Ш., Искакова У.А. Критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа // Доклады РАН. 2007. Т. 414, № 2. С.168-171.

[5] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

[6] Naimark M.A., Linear Differential Operators, Part II. Ungar, New York, 1968.

[7] Титчмарш Е. Теория функций. М.: Наука, 1980.

REFERENCES

[1] Hadamard J. Lectures on the Cauchy Problem in Linear Differential Equations, Yale University Press, New Haven, CT, 1923.

[2] Lavrentev M.M. On a Cauchy Problem for the Poisson Equation, //Izvestya AS USSR, ser. Math., 1955. V.20, №6. P.819–842.

[3] Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. Methods for solving ill-posed problems. M .: Nauka, 1979. 142 p.

[4] Kal'menov T.S., Iskakova U.A. A criterion for the strong solvability of the mixed Cauchy problem for the Laplace equation //Doklady Mathematics. 2007. V.75. №3. P.370-373.

[5] Kolmogorov A.N. and Fomin S.V. Elements of the theory of functions and functional analysis. M .: Nauka, 1972.

[6] Naimark M. A.: Linear Differential Operators, Part II. Ungar, New York, 1968.

[7] Titchmarsh E. The theory of functions. M .: Nauka, 1980.

У.А. Искакова, Б.Т.Төребек

ЛАПЛАС ОПЕРАТОРЫ ҮШІН РОБЕН-КОШИ ҚИСЫНСЫЗ ЕСЕБІН ШЕШУДІҢ БІР ӘДІСІ ТУРАЛЫ

Аннотация. Бұл жұмыста цилиндрлік облыста Лаплас операторы үшін Робен-Коши есебі қарастырылады. Ауытқулы аргументті теңдеу үшін Робен-Коши есебінің меншікті функциялары бойынша спектралды жіктеу әдісі арқылы, қарастырылған Робен-Коши есебінің әлді шешілімділігінің критериі алынған. Робен-Коши есебінің қисынсыздығы ауытқулы аргументті өз-өзіне түйіндес оператордың үзіліссіз спектрінің оқшауланған нүктелерінің бар болуына пара-пар екендігі көрсетілген.

Тірек сөздер: Лаплас теңдеуі, Робен-Коши есебі, өз-өзіне түйіндес оператор, қисынсыздық.