

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 310 (2016), 96 – 103

K.B.Jakupov

Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: jakupovKB@mail.ru

MODELING HOOKE'S LAW IN THE THEORY OF ELASTICITY. UNSYMMETRICAL STRESS TENSOR

Annotation. Directly from Hooke's law derived stress tensor components of deformable body. A direct link, and tangent normal stresses with Hooke's law. asymmetrical stress tensor is proved of deformable body. We derive new equations of elasticity theory. It is shown that the Lamé hypothesis is only symmetrical half incompletely the offset differential, anti-symmetric half of which is discarded, resulting in a symmetric tensor Lamé stresses. For new equations constructed explicit scheme 2nd order accuracy with which the Lamé elastic state of a flat bar with the current in the middle of the upper verge of normal and tangential stresses. The same scheme is applied to the equation Lamé tensions. These pictures demonstrate displacement distribution making a difference compared systems of equations of elasticity, as well as inadequate solutions of the Lamé equations of this deformable body.

Keywords: tensile, shear stress, normal stress, tensor, equations.

УДК 539.2/6

К.Б.Джакупов

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПО ЗАКОНУ ГУКА В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ. НЕСИММЕТРИЧНОСТЬ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ

Аннотация. Непосредственно из закона Гука выведены компоненты тензора напряжений твердого деформируемого тела. Установлены прямые связи касательных и нормальных напряжений с законом Гука. Доказана *несимметричность* тензора напряжений твердого деформируемого тела. Выведены новые уравнения теории упругости.

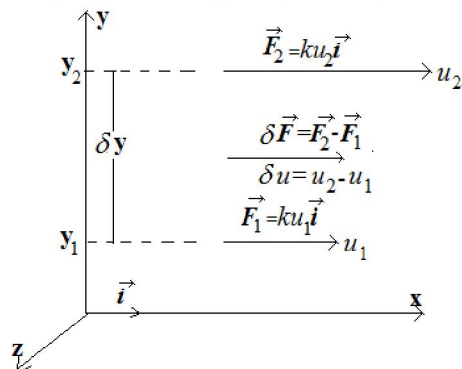
Показано, что в гипотезе Ламе используется только симметричная половина неполного дифференциала смещения, антисимметричная половина которого отбрасывается, следствием чего является симметричность тензора напряжений Ламе. Для новых уравнений построена явная схема 2-го порядка точности, с применением которой рассчитано упругое состояние плоского бруса при действующих в середине верхней грани нормальном и касательном напряжениях. Такая же схема применена для уравнений Ламе. Полученные картины распределения смещений наглядно демонстрируют различие решений сравниваемых систем уравнений упругости, а также неадекватность решения уравнений Ламе данному состоянию деформируемого тела.

Ключевые слова: растяжение, касательное напряжение, нормальное напряжение, тензор, уравнения.

Связь касательных напряжений с законом Гука

По закону Гука «каково натяжение таково растяжение» силы $\vec{F} = k\vec{u}$, действующие параллельно плоскости XZ в положительном направлении оси x , вызывают растяжения u , где

$k > 0$ - зависящий от свойств материала коэффициент. На слое y_1 сила и растяжение равны $\vec{F}_1 = ku_1 \vec{i}$, соответственно, $\vec{F}_2 = ku_2 \vec{i}$ на слое $y_2 = y_1 + \delta y$, $\delta y > 0$.



Приращения: сил $\delta \vec{F} = \vec{F}_2 - \vec{F}_1 = k \delta u \vec{i}$ и растяжений $\delta u = (u_2 - u_1) > 0$. Пусть $|\vec{F}_2| > |\vec{F}_1|$, в этом случае $\delta \vec{F} \uparrow \uparrow \vec{i}$.

Вводится линейная плотность приращения $\delta \vec{F}$ как отношение $\vec{f} = \frac{\delta \vec{F}}{\delta y}$, $\delta \vec{F} = \vec{f} \delta y$. По определению вектор среднего касательного напряжения $\vec{\pi}_{yxcp} = \delta \vec{F} / (\delta x \delta z)$ параллелен и одинаково направлен с силами, вызывающими данное напряжение, $\vec{\pi}_{yxcp} \uparrow \uparrow \delta \vec{F}$, $\vec{\pi}_{yxcp} \uparrow \uparrow \vec{f}$. Через коэффициент пропорциональности образуется связь $\vec{f} = k' \vec{\pi}_{yxcp}$, $k' > 0$, $\vec{\pi}_{yxcp} \uparrow \uparrow \vec{i}$, $k' \vec{\pi}_{yxcp} \delta y = k \delta u \vec{i}$. Данное выражение умножается скалярно на орт $\vec{i}$: $(k' \vec{\pi}_{yxcp} \delta y, \vec{i}) = (k \delta u \vec{i}, \vec{i})$.

В результате получаются необходимые соотношения

$$(k' \vec{\pi}_{yxcp} \delta y, \vec{i}) = k' \delta y |\vec{\pi}_{yxcp}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos 0 = k' \pi_{yxcp} \delta y, (k \delta u \vec{i}, \vec{i}) = k \delta u$$

Равенства $k' \pi_{yxcp} \delta y = k \delta u$, $\pi_{yxcp} = \frac{k \delta u}{k' \delta y}$ в пределе дают касательное напряжение

$\pi_{yx} = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{k \delta u}{k' \delta y} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$, где обозначено $\mu = \frac{k}{k'}$. Обобщения на другие направления образуют соответствующие касательные напряжения

$$\pi_{xy} = \mu \frac{\partial v}{\partial x}, \pi_{zx} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}, \pi_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \pi_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}, \pi_{zy} = \mu \frac{\partial v}{\partial z}$$

1. Связь нормальных напряжений с законом Гука

Аналогичными рассуждениями устанавливается формула составляющей $\vec{\pi}_{xx}^o$ нормального напряжения $\vec{\pi}_{xx} = \lambda \text{div} \vec{u} \vec{i} + \vec{\pi}_{xx}^o$. Пусть силы Гука равны: $\vec{F}_1 = ku_1 \vec{i}$ в точке x_1 и $\vec{F}_2 = ku_2 \vec{i}$ в точке $x_2 = x_1 + \delta x$, $\delta \vec{F} = \vec{F}_2 - \vec{F}_1$, $\delta u = (u_2 - u_1) > 0$, $\delta \vec{F} = k \delta u \vec{i}$. Имеет место параллельность $\delta \vec{F} \uparrow \uparrow \vec{i}$ для случая когда модуль верхней силы больше $|\vec{F}_2| > |\vec{F}_1|$.

Через линейную плотность $\delta \vec{F} = \vec{\phi} \delta x$, $\vec{\phi} = k'' \vec{\pi}_{xxcp}^o$ образуются равенства $\delta F = k'' \vec{\pi}_{xxcp}^o \delta x$, $k'' \vec{\pi}_{xxcp}^o \delta x = k \delta u \vec{i}$. Данное выражение умножается скалярно на орт $\vec{i}$: $(k'' \vec{\pi}_{xxcp}^o \delta x, \vec{i}) = (k \delta u \vec{i}, \vec{i})$. По определению $\vec{\pi}_{xxcp}^o \delta x \uparrow \uparrow \vec{i}$. В результате получается $k'' \vec{\pi}_{xxcp}^o \delta x = k \delta u$, откуда следует $\vec{\pi}_{xxcp}^o = \frac{k}{k''} \frac{\delta u}{\delta x}$. В пределе вытекают формулы составляющих нормальных напряжений $\pi_{xx}^o = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{k}{k''} \frac{\delta u}{\delta x} = \mu \frac{\partial u}{\partial x}$, где введено естественным образом $\mu = \frac{k}{k''}$.

Аналогично выводятся составляющие нормальных напряжений и по другим направлениям:

$$\pi_{ii}^o = \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3; u_1 \equiv u, u_2 \equiv v, u_3 \equiv w, x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z.$$

Таким образом, закону Гука соответствует *несимметричный* тензор напряжений в твердом деформируемом теле:

$$\pi_{ji} = \lambda \delta_{ij} \text{div} \vec{u} + \mu \varepsilon_{ji}, \quad \varepsilon_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \pi_{ji} \neq \pi_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

$\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$ – вектор перемещения. В нормальных напряжениях член $\lambda \delta_{ij} \text{div} \vec{u}$, установленный Ламе, сохраняется, δ_{ij} – символ Кронеккера.

3. Уравнения теории упругости для несимметричного тензора напряжений в твердом деформируемом теле

Уравнения упругости твердого деформируемого тела [1], [2], [3]

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \rho_0 \vec{F} + (\lambda + \mu) \text{grad} \text{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} \quad (3.1)$$

построены по гипотезе Ламе с *симметричным* тензором напряжений

$$\pi_{ji} = \lambda \delta_{ij} \text{div} \vec{u} + \mu \varepsilon_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad \pi_{ji} = \pi_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (3.2)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases}, \quad \lambda, \mu - \text{коэффициенты Ламе}, \quad \pi_{ij} = \pi_{ji}.$$

Подстановкой компонент *несимметричного* тензора $\pi_{ji} = \lambda \delta_{ij} \text{div} \vec{u} + \mu \varepsilon_{ji}$, $\varepsilon_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, 3$ в уравнения динамики сплошной среды в напряжениях

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho_0 F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \pi_{ji}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3$$

получается соответствующее скорректированное уравнение

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \rho_0 \vec{F} + \lambda \text{grad} \text{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u}, \quad (3.3)$$

значительно отличающееся от уравнения Ламе (3.1).

Проекция данного уравнения в декартовых координатах имеют вид:

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \rho_0 F_x + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \rho_0 F_y + \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \rho_0 F_z + \lambda \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)\end{aligned}$$

3. О гипотезе Ламе

Ламе, при выводе своего уравнения (3.1), исходил из гипотезы о том, что элементы ε_{ij} тензора напряжений

$$du_i = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] dx_j, \quad (4.1)$$

должны быть пропорциональны удвоенной первой половине формулы (4.1) [1] (вторая антисимметричная часть (4.1) игнорируется). Формула (4.1) искусственно образована из неполного дифференциала смещений

$$\tilde{du}_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.2)$$

Вытекающие из закона Гука *несимметричные* элементы (2.1) $\varepsilon_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

тензора напряжений пропорциональны коэффициентам неполного дифференциала (4.2).

5. Явная схема уравнений теории упругости

Рассматривается задача Коши-Дирихле для новых уравнений

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \rho_0 F_x + \lambda \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \rho_0 F_y + \lambda \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \rho_0 F_z + \lambda \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \\ p &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}$$

с соответствующими начальными условиями в момент времени $t = 0$ и краевыми условиями на границе S .

В области интегрирования задается равномерная сетка

$$\overline{\Omega}_h = \left\{ (x_i = ih_x, y_j = jh_y, z_m = mh_z), \right. \\ \left. i = 0, \dots, N_x; j = 0, \dots, N_y; m = 0, \dots, N_z \right\}$$

с внутренними узлами

$$\Omega_h = \left\{ (x_i = ih_x, y_j = jh_y, z_m = mh_z), \right. \\ \left. i = 1, \dots, N_x - 1; j = 1, \dots, N_y - 1; m = 1, \dots, N_z - 1 \right\}$$

и граничными узлами

$$S_h = \{i=0, i=N_x, j=\overline{0, N_y}, m=\overline{0, N_z}; j=0, j=N_y, i=\overline{0, N_x}, \\ m=\overline{0, N_z}; m=0, m=N_z, j=\overline{0, N_y}, i=\overline{0, N_x}\}, \overline{\Omega}_h = \Omega_h \cup S_h$$

Соответствующие начальные условия задаются на сетке Ω_h , граничные условия в узлах сетки S_h .

Явная разностная схема имеет вид:

$$Q_{uijm}^n = \mu \left[\frac{u_{i+1jm}^n - 2u_{ijm}^n + u_{i-1jm}^n}{h_x^2} + \frac{u_{ij+1m}^n - 2u_{ijm}^n + u_{ij-1m}^n}{h_y^2} + \right. \\ \left. + \frac{u_{ijm+1}^n - 2u_{ijm}^n + u_{ijm-1}^n}{h_z^2} \right] + \rho_0 F_{xijm},$$

$$Q_{vijm}^n = \mu \left[\frac{v_{i+1jm}^n - 2v_{ijm}^n + v_{i-1jm}^n}{h_x^2} + \frac{v_{ij+1m}^n - 2v_{ijm}^n + v_{ij-1m}^n}{h_y^2} + \right. \\ \left. + \frac{v_{ijm+1}^n - 2v_{ijm}^n + v_{ijm-1}^n}{h_z^2} \right] + \rho_0 F_{yijm},$$

$$Q_{wijm}^n = \mu \left[\frac{w_{i+1jm}^n - 2w_{ijm}^n + w_{i-1jm}^n}{h_x^2} + \frac{w_{ij+1m}^n - 2w_{ijm}^n + w_{ij-1m}^n}{h_y^2} + \right. \\ \left. + \frac{w_{ijm+1}^n - 2w_{ijm}^n + w_{ijm-1}^n}{h_z^2} \right] + \rho_0 F_{zijm},$$

$$\rho_0 \frac{u_{ijm}^{n+1} - 2u_{ijm}^n + u_{ijm}^{n-1}}{\tau^2} = Q_{uijm}^n + \lambda \frac{p_{i+1jm}^n - p_{i-1jm}^n}{2h_x},$$

$$\rho_0 \frac{v_{ijm}^{n+1} - 2v_{ijm}^n + v_{ijm}^{n-1}}{\tau^2} = Q_{vijm}^n + \lambda \frac{p_{ij+1m}^n - p_{ij-1m}^n}{2h_y},$$

$$\rho_0 \frac{w_{ijm}^{n+1} - 2w_{ijm}^n + w_{ijm}^{n-1}}{\tau^2} = Q_{wijm}^n + \lambda \frac{p_{ijm+1}^n - p_{ijm-1}^n}{2h_z},$$

$$p_{ijm}^n = \frac{u_{i+1jm}^n - u_{i-1jm}^n}{2h_x} + \frac{v_{ij+1m}^n - v_{ij-1m}^n}{2h_y} + \frac{w_{ijm+1}^n - w_{ijm-1}^n}{2h_z},$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1, m = 1, \dots, N_m - 1,$$

в граничных узлах S_h :

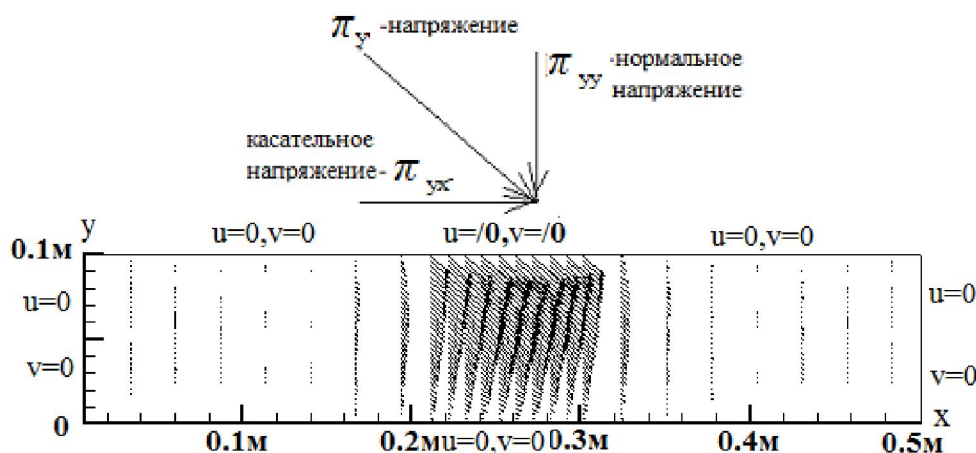
$$\begin{aligned}
 i = 0, p_{0jm}^n &= \frac{4u_{1jm}^n - 3u_{0jm}^n - u_{2jm}^n}{2h_x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{0jm}^n + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{0jm}^n, \\
 i = N_x, p_{N_xjm}^n &= \frac{3u_{N_xjm}^n + u_{N_x-2jm}^n - 4u_{N_x-1jm}^n}{2h_x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{N_xjm}^n + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{N_xjm}^n, \\
 j = 0, p_{i0m}^n &= \frac{4v_{i1m}^n - 3v_{i0m}^n - v_{i2m}^n}{2h_y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i0m}^n + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{i0m}^n, \\
 j = N_y, p_{iN_y m}^n &= \frac{3v_{iN_y m}^n + v_{iN_y-2m}^n - 4v_{iN_y-1m}^n}{2h_y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{iN_y m}^n + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{iN_y m}^n, \\
 m = 0, p_{ij0}^n &= \frac{4w_{ij1}^n - 3w_{ij0}^n - w_{ij2}^n}{2h_z} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij0}^n + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{ij0}^n, \\
 m = N_z, p_{ijN_z}^n &= \frac{4w_{ijN_z-1}^n - 3w_{ijN_z}^n - w_{ijN_z-2}^n}{2h_z} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ijN_z}^n + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{ijN_z}^n,
 \end{aligned}$$

Данная явная схема имеет погрешность 2-го порядка по всем переменным $O(\tau^2) + O(h_x^2) + O(h_y^2) + O(h_z^2)$. Устойчивость счета по явной схеме обеспечивается выполнением условия Куранта:

$$\frac{\tau^2 \mu}{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} \leq 1$$

6. Сравнение численного решения уравнений Ламе с численным решением новых уравнений

Для сравнения решений уравнения Ламе с решением уравнения с *несимметричным* тензором напряжений (3.3) выполнен расчет перемещений в плоском деформируемом бруске размером 0.5м на 0.1м.

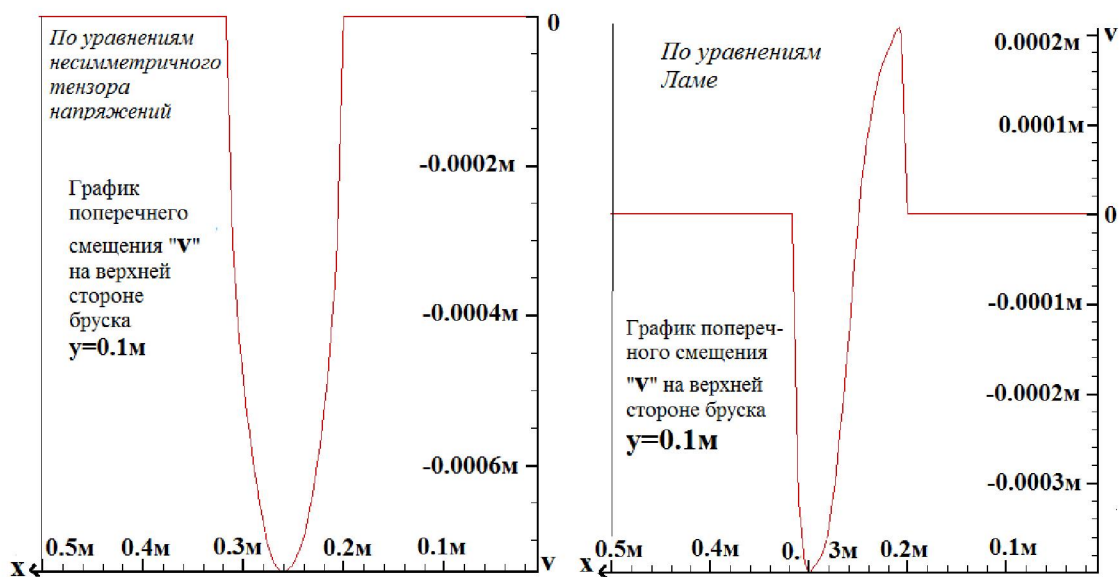
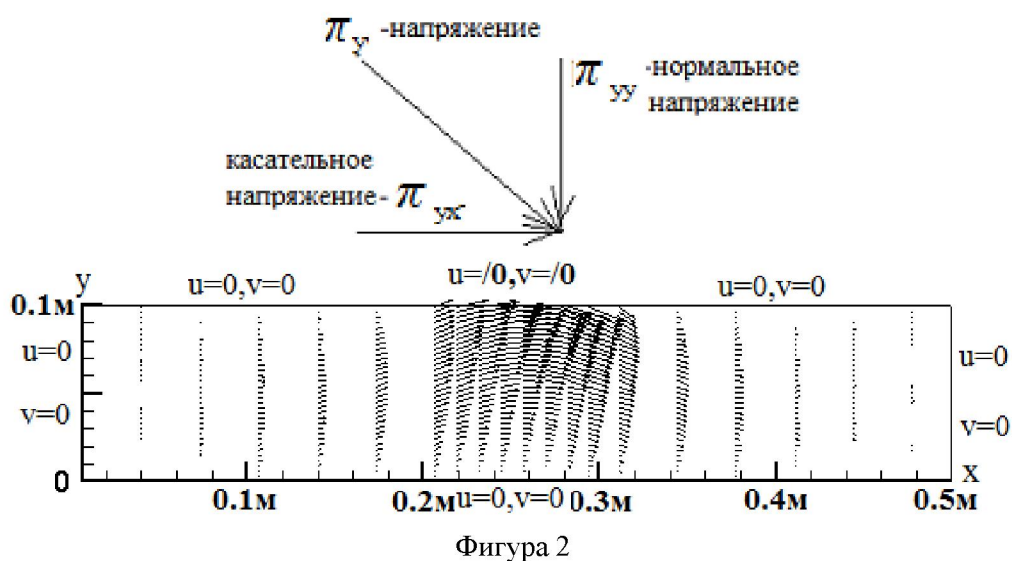


Фигура 1

Вектор внешней силы направлен перпендикулярно к плоскости бруска. На фиг. 1 и 2 представлены поля векторов перемещений $\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j}$ в плоском бруске, на фиг. 3 и 4 эпюры поперечной скорости на верхней стороне бруска, всё на момент времени $t=121.38$ с. Плотность тела $\rho_0 = 7800 \text{ кг/м}^3$. На верхней стороне бруска $y=0.1\text{м}$ от 0.2м до 0.3м приложено напряжение $\vec{\pi}_y = \pi_{yx}\vec{i} + \pi_{yy}\vec{j}$. Конкретно положено $\pi_{yy}=-1 \text{ Н/м}^2$, $\pi_{yx}=1 \text{ Н/м}^2$. Остальные грани бруска жестко закреплены, смещения на них равны нулю.

Коэффициенты Ламе выбраны равными $\lambda = 1 \text{ кг/(с}^2\text{м)}$, $\mu = 100 \text{ кг/(с}^2\text{м)}$.

Обе системы уравнений реализованы по явным схемам [5] на сетке 100×100 с шагом по времени равным 0.0005 с . Налицо явное различие между численными решениями, в особенности фиг. 3 и 4. На фиг. 4 замечено парадоксальное перемещение вверх: на участке $[0.2\text{м}, 0.24\text{м}]$ имеются положительные значения поперечных перемещений $v > 0$, тогда как на фиг. 3 на данном участке перемещения отрицательные $v < 0$.



Выводы

Детальный вывод из закона Гука нормальных и касательных напряжений доказывают *несимметричность* тензора напряжений в твердом деформируемом теле. Конкретный пример численного расчета состояния упругого тела при наложенных напряжениях убедительно показывают неадекватность и несостоятельность гипотезы о *симметричности* тензора напряжений сплошной среды и соответственно уравнений теории упругости Ламе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974г. 318с.
- [2] Седов Л.И. Механика сплошной среды, т.1. М.: «Наука», 1973г. 315с.
- [3] Лурье А.И. Теория упругости. М.: «Наука», 1970г. 984с.
- [4] Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978г. 287с.
- [5] Джакупов К.Б. Коррекции теоретических парадоксов механики сплошной среды. - Алматы: Изд-во «Ғылым ордасы», 2015г. С.376.
- [6] Ильюшин А.А., Победра Б.Е. Основы математической теории термо-вязко-упругости. М.: «Наука», 1970г. 547с.
- [7] Ilyushin A.A., Lenski V.S. Strength of Materials. N.Y. Pergamon press, 1967.
- [8] Eringen A.C. Mechanics of Continua. N.Y., Wiley, 1967.
- [9] Новацкий В. Теория упругости. М.: «Мир», 1975.
- [10] Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976.

REFERENCES

- [1] Mase G.E. Theory and Problems of Continuum Mechanics. M.: "Mir", 1974. P.318.
- [2] Sedov L.I. Continuum Mechanics, Vol.1. M.: "Science", 1973. P.315.
- [3] Lurie A.I. The theory of elasticity. M.: "Science", 1970. P.984.
- [4] Ilyushin A.A. Continuum Mechanics sredy. M.: MGU, 1978. P.287.
- [5] Jakupov K.B. Correction of continuum mechanics theoretical paradoxes – Almaty: publishing house «Ғылым ордасы», 2015g. P.376.
- [6] Ilyushin AA Pobedria BE Fundamentals of the mathematical theory of thermo – viscoelasticity. M.: "Science", 1970. 547s.
- [7] Ilyushin A.A., Lenski V.S. Strength of Materials. N.Y. Pergamon press, 1967.
- [8] Eringen A.C. Mechanics of Continua. N.Y., Wiley, 1967.
- [9] Nowacki W. Theory of Elasticity. M.: "Mir", 1975.
- [10] Lomakin V.A. Theory of elasticity of inhomogeneous bodies. M.: MGU, 1976.

К. Б. Жақып-тегі

ҚР БҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан

ГУКТЫҢ ЗАҢЫМЕН СЕРПІЛІМДІК ТЕОРИЯСЫНДА МОДЕЛДЕУ. КЕРНЕУЛЕР ТЕНЗОРЫНДА СИММЕТРИЯ ЖОҚТЫҒЫ

Аннотация. Тікелей Гук заңынан кернеулер тензорының компоненттері шығарылған және осыған сәйкес майысқақ қатты дененің серпілімдік теориясының теңдеулері жасалынған. Жанама кернеулердің және тік кернеулердің Гук заңымен тура байланыстар құрылған. Майысқақ қатты дененің серпілімдік теориясының кернеулер тензорының беттеспегендігі дәлелденген. Серпілімдік теориясының жаңа теңдеулері қорытылған. Ламе гипотезасында толық емес жылжу дифференциалының беттескен жартысы қана пайдаланғаны көрсетілген, екінші антибеттескен жартысы лақтырылынған, соның салдарынан Ламе кернеулер тензорының беттескендігі шыққан. Жаңа теңдеулер үшін 2 ретті нақтылығы бар айқын схема жасалынған, соны пайдаланып жазық жолақтың серпілімдік күйі саналған, үстіңгі жақтауының ортасына жанама кернеулер және тік кернеулер әсер еткенде. Дәл сондай схема Ламе теңдеулеріне де қолдалынған. Саналған жылжулардың үлестірулік суреттері салыстырынып жатқан теңдеулердің айырмашылықтарын бейнелейді және Ламе теңдеулерінің майысқақ қатты дененің күйіне сәйкес еместігін көрсетеді.

Тірек сөздер. созылу, жанама кернеу, тік кернеу, тензор, теңдеулер.

Сведения об авторе:

Джакупов Кенес Бажкенович – доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН