**N E W S**
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**
ISSN 1991-346X
Volume 6, Number 310 (2016), 67 – 73

UDC 521.1

**M.Zh. Minglibayev[1,2], T.M. Zhumabek[1]**

[1]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
[2]Fesenkov Astrophysical Institute, Almaty, Kazakhstan
minglibayev@mail.ru

# ON THE ISOSCELES RESTRICTED THREE-BODY PROBLEM

**Abstract.** In this work there has been investigated the classical spatial restricted three-body problem in the barycentric reference frame when all three bodies form triangle during all the time of motion. In the barycentric reference frame, there has been emphasized a particular case when the Newtonian total force of attraction of two primary bodies acting on a massless body is central during all the time of motion. It has been proven that in order to make the Newtonian total force of attraction of two primary bodies acting on a massless body central, it is needed and sufficient triangle formed by three bodies to be isosceles and a massless body should be on the vertex of this triangle. It is shown that in this particular case all three bodies are form isosceles triangle and massless body is on the vertex of this triangle. It is proven that orbit of the isosceles restricted three-body problem is planar.
**Keywords:** restricted three-body problem, barycentric coordinate system, isosceles solution.

УДК 521.1

**М.Дж. Минглибаев[1,2], Т.М. Жумабек[1]**

[1]КазНУ имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан
[2]Астрофизический институт имени В.Г.Фесенкова, Алматы, Казахстан

# К РАВНОБЕДРЕННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

**Аннотация.** В настоящей работе исследована классическая пространственная ограниченная задача трех тел в барицентрической системе координат, когда три тела, все время движения, образуют треугольник. В барицентрической системе координат выявлен частный случай, когда ньютоновская суммарная сила притяжения двух основных тел действующая на безмассовое тело, все время движения центральная. Доказано: для того, чтобы ньютоновская суммарная сила притяжения двух основных тел, действующая на безмассовое тело, была центральная, необходимо и достаточно, чтобы треугольник, образованный тремя телами, был равнобедренный, на вершине которого находится безмассовое тело. Оказалось, что в этом частном случае три тела все время движения образуют равнобедренный треугольник, на вершине которого находится безмассовое тело.

Сформулирована равнобедренная ограниченная задача трех тел, то есть задача трех тел, когда три тела все время движения образуют равнобедренный треугольник, на вершине которого находится безмассовое тело. Доказано, что орбита в равнобедренной ограниченной задаче трех тел плоская.
**Ключевые слова:** ограниченная задача трех тел, барицентрическая система координат, равнобедренные решения.

**1. Введение.** Движения малого естественного или искусственного небесного тела в поле тяготения двух больших небесных тел (далее основные тела) хорошо описывается математической моделью широко известной ограниченной задачей трех тел [1-6]. При произвольных значениях масс основных тел задача имеет пять точек либрации - точные частные решения. Две из них решение Лагранжа, когда три тела все время движения образуют равносторонний треугольник.

Три коллинеарные решения Эйлера, когда три тела все время движения расположены на одной и той же прямой. Известны также решения в форме равнобедренного треугольника при условии, что массы основных тел, расположенных на основании равнобедренного треугольника, равны между собой [7-9]. В связи с отсутствием общего аналитического решения задачи в конечным виде многие аспекты задачи изучены различными качественными и численными методами [1-9].Поиск новых точных частных аналитических решении задачи представляется актуальным.

Отметим, что во всех вышеуказанных известных точных частных решениях ограниченной задачи трех тел ньютоновская суммарная сила притяжения двух основных тел, действующая на малое тело, в барицентрической системе координат все время движения *центральная*. В связи с этим представляют интерес все случаи ограниченной задачи трех тел, когда ньютоновская суммарная сила притяжения двух основных тел, действующее на малое тело, центральная.

В настоящей работе рассмотрена классическая пространственная ограниченная задача трех тел в барицентрической системе координат. Исследован случай, когда три тела все время движения образуют треугольник, то есть треугольная ограниченная задача трех тел. В треугольной ограниченной задачи трех тел исследован частный случай, когда три тела все время движения образуют равнобедренный треугольник, на вершине которого находится малое тело, то есть равнобедренная ограниченная задача трех тел. Доказано, что в равнобедренной ограниченной задаче трех тел суммарная ньютоновская сила притяжения двух основных тел центральная. Показано, что орбита в равнобедренной ограниченной задаче трех тел плоская.

**2.Уравнения движения ограниченной задачи трех тел в различных системах координат.**

**2.1. Классические уравнения движения ограниченной задачи трех тел в абсолютной системе координат.** Рассмотрим движения малого тела, исчезающее малой массой $m_2$ (далее безмассовое тело) в поле тяготения двух основных тел с постоянными массами $m_1$ и $m_3$. При этом тела рассматриваются как материальные точки. Математические условия ограниченной постановки задачи трех тел [1-4] могут быть написаны в виде

$m_2 << m_1$, $m_2 << m_3$, $m_2 \approx 0$. (2.1)

Дифференциальные уравнения пространственных движений этих трех тел в абсолютной системе координат $OX^*Y^*Z^*$ имеет широко известный вид

$$\ddot{\vec{R}}_1^* = fm_3 \frac{\vec{R}_3^* - \vec{R}_1^*}{R_{13}^{*3}}, \quad \ddot{\vec{R}}_3^* = fm_1 \frac{\vec{R}_1^* - \vec{R}_3^*}{R_{31}^{*3}}, \tag{2.2}$$

$$\ddot{\vec{R}}_2^* = f \ \ m_1 \frac{\vec{R}_1^* - \vec{R}_2^*}{R_{21}^{*3}} + m_3 \frac{\vec{R}_3^* - \vec{R}_2^*}{R_{23}^{*3}} \ , \tag{2.3}$$

где $\vec{R}_i^* = \vec{R}_i^*\left(X_i^*, Y_i^*, Z_i^*\right)$ - радиус-вектора тел, $\vec{R}_{ij}^* \, (i \neq j)$ – расстояние между тел. Точкой в этих уравнениях и далее обозначается дифференцирование по времени $t$. Из системы дифференциальных уравнений (2.2) получим известное соотношение

$$m_1\vec{R}_1^* + m_3\vec{R}_3^* = \vec{a}^*t + \vec{b}^*, \ \vec{a}^* = \overrightarrow{const}, \ \vec{b}^* = \overrightarrow{const}. \tag{2.4}$$

Отсюда получим хорошо известное аналитическое выражение радиус-вектора точки $G$-барицентра двух основных тел в абсолютной системе координат

$$\vec{R}_G = \frac{m_1\vec{R}_1^* + m_3\vec{R}_3^*}{m_1 + m_3} = \frac{\vec{a}^*}{m_1 + m_3}t + \frac{\vec{b}^*}{m_1 + m_3}. \tag{2.5}$$

Система дифференциальных уравнений (2.2) описывает задачу двух тел. Из (2.5) следует $\ddot{\vec{R}}_G^* = 0$, то есть барицентрическая система координат инерциальная. Уравнения движения (2.3 ) описывает движения безмассового тела в ньютоновской поле тяготения двух основных тел $m_1$, $m_3$ - классическую пространственную ограниченную задачу трех тел в абсолютной системе координат.

**2.2. Уравнение движения в барицентрической системе координат.** Переходим на барицентрическую систему координат по формулам

$$\vec{R}_i^* = \vec{R}_G + \vec{r}_i, \; i = 1,2,3, \tag{2.6}$$

где $\vec{R}_G$ - радиус-вектор точки $G$ - барицентра двух основных тел в абсолютной системе координат, $\vec{r}_i$ - радиус-векторы тел в барицентрической системе координат. Пусть оси барицентрической системы координат $Gxyz$ параллельные соответствующим осям абсолютной системы координат $OX^*Y^*Z^*$. Преобразованные уравнения движения (2.2) и (2.3) имеют вид

$$\ddot{\vec{r}}_1 = fm_3\frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3}, \vec{r}_{13} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1, \; \ddot{\vec{r}}_3 = fm_1\frac{\vec{r}_{31}}{r_{31}^3}, \; \vec{r}_{31} = \vec{r}_1 - \vec{r}_3, \tag{2.7}$$

$$r_{31} = [(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2]^{1/2} = r_{13},$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = f\left(m_1\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\Delta_{21}^3} + m_3\frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{\Delta_{23}^3}\right), \tag{2.8}$$

$$\Delta_{21} = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2} = \Delta_{12},$$
$$\Delta_{23} = [(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2]^{1/2} = \Delta_{32}.$$

В барицентрической системе координат соотношения (2.4) преобразуется в инвариант центра масс

$$m_1\vec{r}_1 + m_3\vec{r}_3 = 0. \tag{2.9}$$

Уравнение (2.8) описывает пространственную классическую ограниченную задачу трех тел в барицентрической системе координат.

**2.3. Решение задачи двух тел.** Из уравнений (2.7) следуют

$$\ddot{\vec{r}}_{31} = -f\frac{m_3 + m_1}{r_{31}^3}\vec{r}_{31}. \tag{2.10}$$

Из интеграла площадей

$$\vec{r}_{31} \times \dot{\vec{r}}_{31} = \vec{c}_{31} = \overrightarrow{const} \tag{2.11}$$

следует, что в задаче двух тел орбита плоская, без потери общности, можно считать, что орбита лежит на плоскости $Gxy$ .Решение дифференциального уравнения движения задачи двух тел (2.10) в относительной системе координат имеет вид [10]

$$r_{31} = r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}, \; r^2\dot{\theta} = c_{31} = c = const, \tag{2.12}$$

$$p = a\left(1 - e^2\right), \; c^2 = \mu p, \; \mu = f\left(m_1 + m_3\right). \tag{2.13}$$

**3.Теорема о равнобедренной ограниченной задаче трех тел** Перепишем уравнение движения пространственной ограниченной задачи трех тел в барицентрической системе координат (2.8) в виде

$$\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2, \tag{3.1}$$

$$\vec{F}_2 = f\left(m_1\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{\Delta_{21}^3}+m_3\frac{\vec{r}_3-\vec{r}_2}{\Delta_{23}^3}\right). \tag{3.2}$$

Введем обозначение для единичного вектора

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{r}_2}{r_2}. \tag{3.3}$$

**3.1 Определения**.

**Определение 1.** Ограниченную задачу трех тел назовем треугольной, если три тела все время движения образует треугольник.

**Определение 2.** Треугольную ограниченную задачу трех тел назовем равнобедренной, если треугольник образованного тремя телами все время движения образует равнобедренный треугольник, на вершине которого находится безмассовое тело.

**Определение 3.** В барицентрической системе координат $Gxyz$, в треугольной ограниченной задаче трех тел ньютоновскую силу притяжения двух основных тел $\vec{F}_2$ назовем центральной, если все время движения она направлена к началу координат и представима в виде

$$\vec{F}_2 = -F_2\vec{e}_2,\ F_2 = \left|\vec{F}_2\right|. \tag{3.4}$$

**3.2 Теорема.** В треугольной ограниченной задаче трех тел, в барицентрической системе координат, для того чтобы сила $\vec{F}_2$ все время движения была центральной, необходимо и достаточно, чтобы все время движения выполнялось условие

$$\Delta_{21} = \Delta_{23} = \Delta\ , \tag{3.5}$$

то есть треугольник образованный тремя телами все время движения – равнобедренный, на вершине которого находится безмассовое тело.

**Доказательство.**

***Необходимость.*** Допустим, что $\vec{F}_2$ - центральная.

Докажем, что тогда имеет место

$$\Delta_{21} = \Delta_{23} = \Delta\ , \tag{3.6}$$

то есть треугольник образованного тремя телами все время движения равнобедренный.

Так как сила $\vec{F}_2$ - центральная, имеем

$$\vec{F}_2 \times \vec{r}_2 = 0. \tag{3.7}$$

Используя аналитическое выражение силы (3.2), уравнение (3.7) в раскрытом виде можно написать в следующей форме

$$f\left(\frac{m_1}{\Delta_{21}^3}\vec{r}_1+\frac{m_3}{\Delta_{23}^3}\vec{r}_3\right)\times\vec{r}_2 - f\left(\frac{m_1}{\Delta_{21}^3}+\frac{m_3}{\Delta_{23}^3}\right)\vec{r}_2\times\vec{r}_2 = 0. \tag{3.8}$$

Из последнего уравнения следует

$$\left(\frac{m_1}{\Delta_{21}^3}\vec{r}_1+\frac{m_3}{\Delta_{23}^3}\vec{r}_3\right)\times\vec{r}_2 = 0. \tag{3.9}$$

В барицентрической системе координат имеет место инвариант центра масс (2.9). Из уравнения (2.9) получим

$$m_1\vec{r}_1 = -m_3\vec{r}_3\,. \tag{3.10}$$

Подставляя (3.10) в уравнения (3.9) получим

$$m_3\left(-\frac{1}{\Delta_{21}^3} + \frac{1}{\Delta_{23}^3}\right)\vec{r}_3 \times \vec{r}_2 = 0\,. \tag{3.11}$$

Так как мы рассматриваем треугольную ограниченную задачу трех тел $\vec{r}_3 \times \vec{r}_2 \neq 0$, а также учитывая, что $m_3 \neq 0$, из равенство (3.11) получим

$$\Delta_{21} = \Delta_{23} = \Delta\,.$$

Итак, необходимость теоремы доказана.

***Достаточность.*** Допустим, что треугольник, образованный тремя телами равнобедренный, то есть выполняется равенство

$$\Delta_{21} = \Delta_{23} = \Delta\,. \tag{3.12}$$

Докажем, что тогда сила $\vec{F}_2$ - центральная, то есть

$$\vec{F}_2 = -F_2\vec{e}_2\,. \tag{3.13}$$

Перепишем аналитическое выражение (3.2) для силы $\vec{F}_2$ в виде

$$\vec{F}_2 = f\left(\frac{m_1}{\Delta_{21}^3}\vec{r}_1 + \frac{m_3}{\Delta_{23}^3}\vec{r}_3\right) - f\left(\frac{m_1}{\Delta_{21}^3} + \frac{m_3}{\Delta_{23}^3}\right)\vec{r}_2\,. \tag{3.14}$$

Используя равенство (3.12), преобразуем правую часть последнего равенства

$$\vec{F}_2 = \frac{f}{\Delta^3}\left(m_1\vec{r}_1 + m_3\vec{r}_3\right) - \frac{f}{\Delta^3}\left(m_1 + m_3\right)\vec{r}_2\,. \tag{3.15}$$

Согласно инварианту центра сил (2.9), который выполняется в барицентрической системе координат, имеем

$$m_1\vec{r}_1 + m_3\vec{r}_3 = 0\,. \tag{3.16}$$

Из соотношений (3.15) и (3.16) получим

$$\vec{F}_2 = -\frac{f}{\Delta^3}\left(m_1 + m_3\right)\vec{r}_2\,. \tag{3.17}$$

Учитывая обозначение (3.3), выражение (3.17) перепишем в виде

$$\vec{F}_2 = -F_2\vec{e}_2\,,\quad F_2 = \frac{f}{\Delta^3}\left(m_1 + m_3\right)r_2 \tag{3.18}$$

то есть сила $\vec{F}_2$ центральная.

Таким образом, достаточность теоремы доказана.

**3.3. Следствия.**

***Следствие 1.*** В равнобедренной ограниченной задаче трех тел, в барицентрической системе координат, ньютоновская сила притяжения двух основных тел имеет вид

$$\vec{F}_2 = -\frac{f}{\Delta^3}\left(m_1 + m_3\right)\vec{r}_2\,,\ \Delta = \Delta_{21} = \Delta_{23}\,. \tag{3.19}$$

***Следствие 2.***Уравнение движения равнобедренной ограниченной задачи трех тел в барицентрической системе координат имеет вид

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{f}{\Delta^3}(m_1+m_3)\vec{r}_2, \ \Delta = \Delta_{21} = \Delta_{23}. \tag{3.20}$$

***Следствие 3.*** Из уравнений (3.20) следует, что $\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 = \vec{c}_2 = \overrightarrow{const}$, следовательно, орбита в равнобедренной ограниченной задаче трех тел плоская.

**3.4. Преобразование уравнение движения равнобедренной ограниченной задачи трех тел к удобному виду.** Далее, используя теорему Пифагора, выразим $\Delta^3$ через $r_{31}$, $r_2$, $m_1$ и $m_3$. Из соответствующих прямоугольных треугольников получим

$$r_2^2 = \Delta^2 - \frac{m_1 m_3}{(m_1+m_3)^2} r_{31}^2. \tag{3.21}$$

Из равенства (3.21) следует

$$\Delta^3 = \left(\sigma^2 r_{31}^2 + r_2^2\right)^{3/2}, \ \sigma^2 = \frac{m_1 m_3}{(m_1+m_3)^2}. \tag{3.22}$$

Учитывая (3.22), из (3.20) получим дифференциальное уравнение движения ограниченной равнобедренной задачи трех тел в барицентрической системе координат в векторной форме

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -\mu \frac{\vec{r}_2}{\left(\sigma^2 r_{31}^2(t) + r_2^2\right)^{3/2}}, \ \mu = f(m_1+m_3). \tag{3.23}$$

Из уравнений (3.23) следует интеграл площадей

$$\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 = \vec{c}_2 = \overrightarrow{const} \tag{3.24}$$

следовательно, *орбита плоская.*

**4. Об области возможных движений.** Таким образом, *в барицентрической системе координат Gxyz* может быть поставлена такая частная задача в ограниченной задаче трех тел, в которой все время движения три тела образует равнобедренный треугольник, на вершине которого находится безмассовое тело.

Как следует из интегралов площадей, орбита в задаче двух основных тел (2.11), а также орбита в ограниченной равнобедренной задаче трех тел (3.24) каждая в отдельности, плоская. При этом плоскость орбиты задачи двух основных тел и плоскость орбиты ограниченной равнобедренной задачи трех тел в общем случае не совпадают

В тоже время эти три тела все время движения образуют равнобедренный треугольник, который в общем случае меняет размеры, форму и ориентацию в пространстве. Поэтому необходимо анализировать сочетания этих свойств и в области возможных движении этих трех тел, что является предметом отдельной работы.

**5. Заключение.** В настоящей работе аналитически исследована пространственная ограниченная задача трех тел. Исследован случай, когда три тела все время образуют равнобедренный треугольник, на вершине которого находится безмассовое тело. Доказано, что в этом частном случае суммарная ньютоновская сила притяжения двух основных тел центральная. Следовательно, орбита в равнобедренной ограниченной задаче трех тел плоская.

Работа частично финансированы грантами МОН РК №0069/ГФ4 и №0003-1/ПЦФ.

**ЛИТЕРАТУРА**

[1] Себехей В. Теория орбит. Ограниченная задача трех тел. - М.: Наука, 1982. – 656 с.

[2] Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. – М.: Наука, 1978. – 312 с.

[3] Dvorak R., Lhotka Ch. Celestial Dynamics. Chaoticity and Dynamics of Celestial Systems. WILEY-VCH VerlagGmbH&Co.KGaA, 2013 –309 p.

[4] Гребеников Е.А. Математические проблемы гомографической динамики.– М.: МАКС Пресс, 2010. – 256 с.

[5] Морбиделли А. Современная небесная механика. Аспекты динамики Солнечной системы. – М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2014. – 432с.

[6] Брюно А.Д. Ограниченная задача трех тел. Плоские периодические орбиты. – М.: Наука, 1990. – 295с.
[7] Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики. – М.: Наука,1967. – 524с.
[8] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. – 2-е изд. –М.: Наука, 1978. – 456 с.
[9] Маршал К. Задача трех тел. Москва. – Ижевск:Инст. комп. иссл., 2014. – 640с.
[10] Лукьянов Л.Г., Ширмин Г.И. Лекции по небесной механике. Алматы: Эверо, 2009. – 277с.

**REFERENCES**

[1] Sebehej V. Teorija orbit. Ogranichennaja zadacha treh tel. - M.: Nauka, 1982. – 656 p.
[2] Markeev A.P. Tochki libracii v nebesnoj mehanike i kosmodinamike. – M.: Nauka, 1978. – 312 p.
[3] Dvorak R., Lhotka Ch. Celestial Dynamics. Chaoticity and Dynamics of Celestial Systems. WILEY-VCH VerlagGmbH&Co.KGaA, 2013 –309 p.
[4] Grebenikov E.A. Matematicheskie problemy gomograficheskoj dinamiki.– M.: MAKS Press, 2010. – 256 p.
[5] Morbidelli A. Sovremennaja nebesnaja mehanika. Aspekty dinamiki Solnechnoj sistemy. – M. – Izhevsk: Institut komp'juternyh issledovanij, 2014. – 432 p.
[6] Brjuno A.D. Ogranichennaja zadacha treh tel. Ploskie periodicheskie orbity. – M.: Nauka, 1990. – 295 p.
[7] Wintner A. Analiticheskie osnovy nebesnoj mehaniki. – M.: Nauka,1967. – 524 p.
[8] Duboshin G.N. Nebesnaja mehanika. Analiticheskie i kachestvennye metody. – 2-e izd. –M.: Nauka, 1978. – 456 p.
[9] Marshal K. Zadacha treh tel. Moskva. – Izhevsk:Inst. komp. issl., 2014. – 640 p.
[10] Luk'janov L.G., Shirmin G.I. Lekcii po nebesnoj mehanike. Almaty: Jevero, 2009. – 277p.

**М.Ж. Минглибаев[1,2], Т.М. Жұмабек[1]**

[1]әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Қазақстан, Алматы;
[2]В.Г. Фесенков атындағы Астрофизика институты, Қазақстан, Алматы

## ТЕҢБҮЙІРЛІ ШЕКТЕЛГЕН ҮШ ДЕНЕ МӘСЕЛЕСІ

**Аннотация.** Бұл жұмыста барицентрлік координаталар жүйесінде классикалық шектелген үш дене мәселесі қарастырылған. Осы мәселенің дербес жағдайы қозғалыс кезінде үш дене барлық уақытта теңбүйірлі үшбұрыш жасайтын жағдайы зерттелінген. Бұл дербес жағдайда, барицентрлік координата жүйесінде, негізгі екі дененің массасыз денеге әсер ететін қосынды ньютондық тарту күші әрқашан да центрлік күш екені нақтыланған. Негізгі екі дененің массасыз денеге әсер ететін қосынды ньютондық тарту күші әрқашан да центрлік күш екені болуы үшін үш дене теңбүйірлі үшбұрыш жасауы қажетті және жеткілікті екені дәлелденген. Бұл жағдайда барлық уақытта теңбүйірлі үшбұрыштың төбесінде массасыз дене орналасқан. Осы дербес жағдайдың теңбүйірлі шектелген үш дене мәселесі ретінде мәселенің қойылымы қалыптасқан. Шектелген теңбүйірлі үш дене мәселесінде орбитаның жазық қисық екені дәлелденген.

**Түйін сөздер:** шектелген үш дене есебі, барицентрлік координата жүйесі, теңбүйірлі шешімдер.

**Сведения об авторах:**

Минглибаев М.Дж. – корреспондент автор, д.ф.-м.н., профессор, Казахский Национальный Университет им. аль-Фараби, Астрофизический Институт им. В.Г. Фесенкова, Телефон: : +7 727 247 60 86 +7 707 108 7565, e-mail: minglibayev@mail.ru;

Жумабек Т.М. - Магистрант 2-курса Казахского Национального Университета им. аль-Фараби, кафедры механики, Телефон: +7 727 247 60 86 +7 747 579 03 82, e-mail: torebekzhumabek@ gmail.com