N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 6, Number 310 (2016), 121 – 125

UDC 629.195+531.1

M.D. Shinibaev[1], A.A. Bekov[1], S.S. Dairbekov[2], S.A. Zholdasov[2], G.E. Myrzakasova[2], D.R. Aliaskarov[2], S.A. Shekerbekova[2], A.G. Sadybek[2]

[1] National Center of Space Researches and Technologies», Almaty, Kazakhstan;
[2] University of Syr-Daria, Zhetysai, Kazakhstan;
E-mail: shinibaev_maxsut@mail.ru

A NEW VERSION OF THE PROBLEM OF TWO FIXED CENTERS

Abstract. When analyzing the motion of spacecraft we have to build adequate mathematical model of the true nature of the movement [1].

In the case study of a space object movement in near-Earth space is necessary to build a model of the gravitational field of the Earth and the nearest planets.

An attempt in this direction was made in R. Newton [2] who proposed to approximate the field spheroidal planet gravitational force function of the problem of two fixed centers.

Further studies related to the problem of two fixed centers can be found in numerous works of V.G. Demin, V.G. Degtyarev, E.P. Aksenov, E.A. Grebenikov, V.M. Alexeyev and up.

As [3, C.112] it noted, that the approximation of the Earth's potential power function of the problem of two fixed centers is acceptable only for sufficiently distant satellites.

But it seems to us that the power function of the problem of two fixed centers can be approximated by the gravitational field of the Earth and in the case of close associates.

To confirm your ideas, we propose a new version of the problem of two fixed centers.

Key words: earth satellite, binomial series, the problem of two fixed centers, the gravitational field, test body, the motion test body.

УДК 629.195+531.1

М.Д. Шинибаев[1], А.А. Беков[1], С.С. Даирбеков[2], С.А. Жолдасов[2], Г.Е. Мырзакасова[2], Д.Р. Алиаскаров[2], С.А. Шекербекова[2], А.Ж. Садыбек[2].

[1]Национальный центр космических исследований и технологии, г. Алматы, Казахстан;
[2]Университет Сыр-Дария, г. Джетысай, Казахстан;

О НОВОЙ ВЕРСИИ ЗАДАЧИ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ

Аннотация. При анализе движения космических аппаратов приходится строить математическую модель, адекватную их истинной природе движения [1].

В случае изучения движения космического объекта в околоземном пространстве необходимо построить модель поля тяготения Земли и ближайших планет.

Попытка в этом направлении была сделана в работе Р. Ньютона [2], который предложил аппроксимировать поле тяготения сфероидальной планеты силовой функцией задачи двух неподвижных центров.

Дальнейшие исследования, связанные с задачей двух неподвижных центров, можно найти в многочисленных работах В.Г. Демина, В.Г. Дегтярева, Е.П. Аксенова, Е.А. Гребеникова, В.М. Алексеева и др.

В [3, с.112] отмечено, что аппроксимация потенциала Земли силовой функцией задачи двух неподвижных центров приемлема только для достаточно далеких спутников Земли. Но нам кажется, что силовой функцией задачи двух неподвижных центров можно аппроксимировать поле тяготения Земли и в случае близких спутников.

Для подтверждения нашей идеи мы предлагаем новую версию задачи двух неподвижных центров.

Ключевые слова: спутник Земли, биномиальный ряд, задача двух неподвижных центров, гравитационное поле, пробное тело, движение пробного тела.

Рассмотрим движение пробного тела P в поле притяжения двух неподвижных центров M и N равных масс m, которые расположены симметрично относительно начала координат на оси Ox (рис. 1).

На рис. 1:

$$m_N = m\,,\ m_M = m\,,\ \overline{OP} = \bar{r}\,,\ \bar{G} = \overline{m_N g} = \overline{m_M g} = \overline{mg}\,,$$

$$MN = 2a\,,\ MO = ON = a\,,\ m_P = m_0\,.$$

Допустим, что центры M и N соединены невесомым стержнем MN длины $2a$. Таким образом, мы получили абсолютно твердое тело «гантель». Теперь пользуясь леммой о параллельном переносе сил, приведем $\overline{m_N g}$ и $\overline{m_M g}$ к центру O (рис. 2). Мы получили «гипотетическое тело», центр масс которого совмещен с началом координат O и имеет массу, равную $M = 2m$, так как его сила тяжести $\overline{Mg}$ направлена по вертикали вниз и $\overline{Mg} = 2\overline{mg}$.

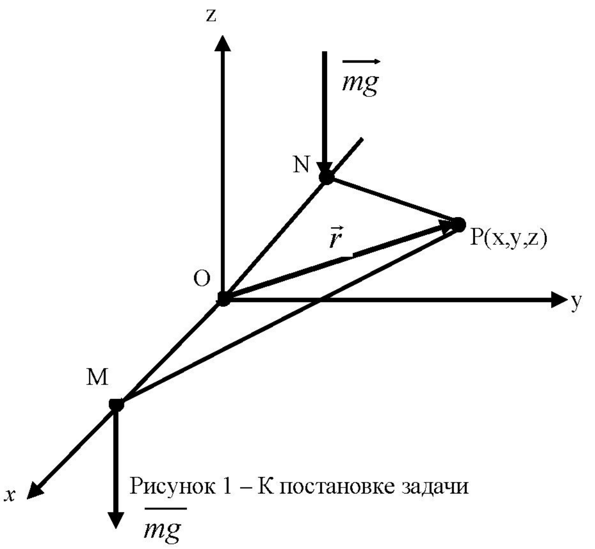

Рисунок 1 – К постановке задачи

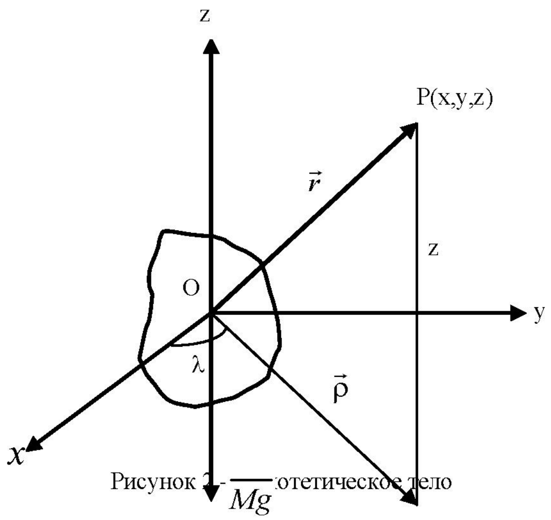

Рисунок 2 – Гипотетическое тело

На рис. 2 введена цилиндрическая система координат, которая связана с прямоугольными координатами:

$$x = \rho\cos\lambda,\ \ y = \rho\sin\lambda,\ \ z = z\,,$$

где ρ – полярный радиус, λ – полярный угол, z – аппликата пробного тела P.

Пусть «гипотетическое тело» представляет собой сжатый сфероид

$$A = B = nC\,,\ \ n > 0\,,$$

где A, B, C – главные центральные моменты инерции сфероида, n – постоянный коэффициент.

Далее предположим, что

1. «Гипотетическое тело» обладает осью динамической симметрии, т.е. $A = B = nC$.

2. Тело вращается вокруг оси, совпадающей с наименьшей осью центрального эллипсоида инерции. Тогда силовая функция задачи имеет вид

$$U = \frac{fM}{r} - \frac{f(A-C)}{2r^s}(x^2 + y^2 - 2z^2) \qquad (1)$$

или в цилиндрической системе координат (при малом наклоне орбиты к основной плоскости $s = \dfrac{z}{\rho}$, $s^2 \neq 0$, $s^4 \approx 0$) имеем

$$U = \frac{L}{\rho} + \frac{\chi}{\rho^3} - \frac{D}{\rho^3}z^2 - \frac{E}{\rho^5}z^2\,, \qquad (2)$$

где $L = fM$, $\chi = \frac{1}{2}Cf(1-n)$, $D = \frac{1}{2}L$, $E = \frac{9}{2}\chi$

Дифференциальные уравнения пробного тела в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\lambda}^2 = U'_\rho, \; \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\lambda}) = U'_\lambda, \; \ddot{z} = U'_z, \tag{3}$$

где: $U'_\rho = -\frac{L}{\rho^2} - \frac{3\chi}{\rho^4} + \frac{3D}{\rho^4}z^2 + \frac{5E}{\rho^6}z^2$, $U'_\lambda = 0$, $\rho^2\dot{\lambda} = \alpha_2 = \text{const}$, $U'_z = -\frac{2D}{\rho^3}z - \frac{2E}{\rho^5}z$.

Из структуры правых частей (3) видно, что (3) не интегрируется в конечном виде, поэтому используем метод Гамильтона-Якоби. Кинетическая энергия орбитального движения пробного тела

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\lambda}^2 + \dot{z}^2), \tag{4}$$

здесь кинетическая энергия отнесена к массе m_0.

Используя (4), найдем выражения для импульсов

$$P_\rho = \dot{\rho}, \; P_\lambda = \rho^2\dot{\lambda} = \alpha_2, \; P_z = \dot{z}. \tag{5}$$

Функция Гамильтона

$$H = T - U = \frac{1}{2}\left(P_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}P_\lambda^2 + P_z^2\right) - \frac{L}{\rho} - \frac{\chi}{\rho^3} + \frac{D}{\rho^3}z^2 + \frac{E}{\rho^5}z^2. \tag{6}$$

Следует отметить, что H не зависит явно от времени $\frac{\partial H}{\partial t} \equiv 0$, отсюда

$$\frac{1}{2}\left(P_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}P_\lambda^2 + P_z^2\right) - \frac{L}{\rho} - \frac{\chi}{\rho^3} + \frac{D}{\rho^3}z^2 + \frac{E}{\rho^5}z^2 = h_1, \tag{7}$$

где h_1 – постоянная интеграла энергии.

Запишем уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(\rho, \lambda, z, \frac{\partial V}{\partial \rho}, \frac{\partial V}{\partial \lambda}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) = 0, \tag{8}$$

где V – производящая функция.

У нас $\frac{\partial H}{\partial t} \equiv 0$, поэтому [3, С.38] имеем

$$V = -h_1 t + W(\rho, \lambda, z), \tag{9}$$

где $W(\rho, \lambda, z)$ удовлетворяет (8).

Принимая во внимание (7) и (6), имеем

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 - \frac{2L}{\rho} - \frac{2\chi}{\rho^3} + \frac{2D}{\rho^3}z^2 + \frac{2E}{\rho^5}z^2 = 2h_1. \tag{10}$$

Пусть

$$W = W_1(\rho) + W_2(\lambda) + W_3(z), \tag{11}$$

тогда (10) имеет вид

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_3}{\partial z}\right)^2 - \frac{2L}{\rho} - \frac{2\chi}{\rho^3} + \frac{2D}{\rho^3}z^2 + \frac{2E}{\rho^5}z^2 = 2h_1. \tag{12}$$

Умножим обе части (12) на ρ^2

$$\left(\rho\frac{\partial W_1}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial W_2}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\rho\frac{\partial W_3}{\partial z}\right)^2-2L\rho-\frac{2\chi}{\rho}+\frac{2D}{\rho}z^2+\frac{2E}{\rho^3}z^2=2h_1\rho^2. \quad (13)$$

Потребуем следующее соответствие:

$$\frac{dW_2}{d\lambda}=\alpha_2=h_2,\quad \rho^2\left(\frac{dW_3}{dz}\right)^2+\frac{2D}{\rho}z^2+\frac{2E}{\rho^3}z^2=h_3^2,$$

$$\rho^2\left(\frac{dW_1}{d\rho}\right)^2+h_2^2+h_3^2-2L\rho-\frac{2\chi}{\rho}=2h_1\rho^2.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} &W_2=h_2\lambda,\\ &W_1=\int\sqrt{2h_1+\frac{2\chi}{\rho^3}+\frac{2L}{\rho}+\frac{(h_2^2+h_3)}{\rho^2}}d\rho,\\ &W_3=\int\sqrt{\frac{h_3^2}{\rho^2}-\frac{2D}{\rho^3}z^2-\frac{2E}{\rho^5}z^2}dz. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

В последнем выражении

$$2D\frac{z^2}{\rho^3}=2D\frac{s^2}{\rho}=O(s^3)\approx 0,\quad 2E\frac{z^2}{\rho^5}=2E\frac{s^3}{\rho^3}=O(s^4)\approx 0,$$

поэтому

$$W_3=\int\frac{1}{\rho}h_3dz=h_3\int\frac{dz}{\rho}. \quad (15)$$

Подставив (14) и (15) в (11), найдем

$$W=h_2\lambda+h_3\int\frac{dz}{\rho}+\int\sqrt{[2h_1\rho^3+2L\rho^2+(h_2^2+h_3^2)\rho+2\chi]\cdot\frac{1}{\rho^3}}d\rho. \quad (16)$$

В соответствии с общей теории решение канонических уравнений Гамильтона имеет вид [3]

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial h_1}=t+\beta_1,\quad \frac{\partial W}{\partial h_2}=\beta_2,\quad \frac{\partial W}{\partial h_3}=\beta_3,\\ &\frac{\partial W}{\partial\rho}=P_\rho,\quad \frac{\partial W}{\partial\lambda}=P_\lambda,\quad \frac{\partial W}{\partial z}=P_z, \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

где β_1, β_2, β_3 – постоянные интегрирования.

Перепишем (17) в явном виде

$$t+\beta_1=\int\frac{\rho^{9/2}}{\sqrt{2h_1\rho^3+2L\rho^2+(h_2^2+h_3^2)\rho+2\chi}}d\rho, \quad (18)$$

$$\beta_2=\lambda+\int h_2\frac{\rho^{5/2}}{\sqrt{2h_1\rho^3+2L\rho^2+(h_2^2+h_3^2)\rho+2\chi}}d\rho, \quad (19)$$

$$\beta_3=\int\frac{dz}{\rho}+\int\frac{\rho^{5/2}h_3}{\sqrt{2h_1\rho^3+2L\rho^2+(h_2^2+h_3^2)\rho+2\chi}}d\rho. \quad (20)$$

$$P_\rho = -h_3 \int \frac{dz}{\rho^2} + \frac{3}{2} \int \frac{\rho^{1/2}}{\sqrt{2h_1\rho^3 + 2L\rho^2 + (h_2^2 + h_3^2)\rho + \chi}} d\rho +$$

$$+ \int \frac{3h_1\rho^{7/2} + 2L\rho^{5/2} + \frac{1}{2}(h_2^2 + h_3^2)\rho^{3/2}}{\sqrt{2h_1\rho^3 + 2L\rho^2 + (h_2^2 + h_3^2)\rho + 2\chi]^3}} d\rho, \quad (21)$$

$$P_\lambda = h_2, \quad (22)$$

$$P_z = h_3 \int \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\right) dz. \quad (23)$$

Из (18) можно определить $\rho(t)$, из (19) можно найти $\lambda(t)$.

Умножим (19) на h_3, а (20) на h_2, затем взяв дифференциалы из полученных выражений, составим их разность и тогда найдем

$$z(t) = \frac{h_3}{h_2} \int \rho d\lambda = h_3 \int \frac{dt}{\rho(t)}, \quad (24)$$

где $\rho(t)$ определена ранее из (18).

Таким образом, разработана новая версия задачи двух неподвижных центров, которая пригодна для исследования движения близких спутников Земли.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Шинибаев М.Д., Беков А.А. и др. Об орбитальном движении неуправляемого космического объекта в поле тяготения центрального и внешнего тела //Доклады НАН РК.– 2014, №3.– С.21-26.
[2] Newton R. Motion of a satellite around an unsymmetrical central body. Journ. Appl. phys., vol. 30, №2, 1959.
[3] Демин В.Г. Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения.- М.: Наука, 1968.- 352 с.

REFERENCES

[1] Shinibaev M.D., Bekov A.A. et al. On the orbital motion of uncontrolled space object in the gravitational field of the central and outer body. Reports of NAS RK.- 2014, №3.- p. 21-26 (in Russ).
[2] Newton R. Motion of a satellite around an unsymmetrical central body. Journ. Appl. phys., vol. 30, №2, 1959.
[3] Demin V.G. Dvigenie iskusstvennogo sputnik v nezentralnom pole tyagotenia.-M: Nauka, 1968.- 352 s. (in Russ).

М.Д. Шинибаев[1], А.А. Беков[1], С.С. Даирбеков[2], С.А. Жолдасов[2], Г.Е. Мырзакасова[2], Д.Р. Алиаскаров[2], С.А. Шекербекова[2], А.Ж. Садыбек[2]

Ұлттық ғарыштық зерттеулер мен технологиялар орталығы, Алматы, Қазақстан;
Сыр-Дария университеті, Жетысай, Қазақстан;

ЕКІ ЖЫЛЖЫМАЙТЫН НҮКТЕ ПРОБЛЕМАСЫНЫҢ ЖАҢА НҰСҚАСЫ

Аннотация: Ғарыштық аппараттардың қозғалыстарын зерттегенде, олардың математикалық моделін құрастыру қажет болады, және ол шын қозғалысқа адекваттық қалыпта болуы қажет [1].

Егер Жер маңындағы қозғалыс қарастырылса, онда Жер және жақын орналасқан планеталардың өрісінің моделін соғуға тура келеді. Осы бағытта Р.Ньютон [2] бастама жасаған еді, ол сфероид тәрізді планетаның өрісін екі жылжымайтын нүкте есебінің өрісімен аппроксимацияланады.

Бұл бағыт В.Г. Демин, В.Г.Дегтярев, Е.П. Аксенов, Е.А.Гребеников, В.М. Алексеевтардың және басқалардың көптеген зерттеулерінде орын табады.

Мұндай мүмкіншілік тек алыс орналасқан Жер серіктеріне ғана тиесілі деп жазылған [3, б. 112].

Бірақ біздің зерттеулеріміз бойынша бұл идея жақын орналасқан Жер серіктерінің қозғалыстарын зерттеуге де қолдануға болады. Дәлел ретінде біз жаңа версия енгіздік.

Тірек сөздер: Жер серігі, бином қатары, екі жылжымайтын нүкте проблемасы, гравитациялық күш өрісі, сынақтық дене, сынақтық дене қозғалысы.