

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 316 (2017), 27 – 38

K.A. Boshkayev^{1,2}, B.A. Zhami¹, Zh.A. Kalymova¹, Zh.N. Brisheva¹¹IETP, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, 050040, Kazakhstan²ICRANet, Piazza della Repubblica 10, Pescara, I-65122, ItalyE-mail: kuantay@mail.ru**STATIC WHITE DWARFS TAKING INTO ACCOUNT THE EFFECTS
OF FINITE TEMPERATURES AND GENERAL RELATIVITY**

Abstract. Cold and hot white dwarfs are investigated in the framework of the general relativity using the Chandrasekhar equation of state. Basic parameters of white dwarfs such as the central density, pressure, mass, radius, the temperature of an isothermal core and logarithm of surface gravity have been calculated. It has been shown that it is necessary to take into account the effects of finite temperatures in white dwarfs with low masses. The consideration of the effects of temperature can explain observational data from Sloan Digital Sky Survey Data Release 4. Additionally, the core temperatures have been estimated for white dwarfs – satellites of the millisecond pulsars PSR J1738 + 0333, PSR J1012 + 5307 and PSR J1911-5958A.

Key words: white dwarfs, general relativity, effects of temperature, observational data.

К.А. Бошкаев^{1,2}, Б.А. Жами¹, Ж.А. Калымова¹, Ж.Н. Бришева¹¹НИИЭТФ, КазНУ имени Аль-Фараби, Алматы, 050040, Казахстан;²ICRANet, Piazza della Repubblica 10, Pescara, I-65122, Italy**СТАТИЧЕСКИЕ БЕЛЫЕ КАРЛИКИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ
КОНЕЧНЫХ ТЕМПЕРАТУР И ОБЩЕЙ ТЕОРИИ
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**

Аннотация. В работе исследуются холодные и горячие белые карлики в рамках общей теории относительности с применением уравнения состояния Чандрасекара. Были вычислены основные параметры белых карликов, такие как центральная плотность, давление, масса, радиус, температура изотермического ядра и логарифм поверхностной гравитации. Также была показана необходимость учета эффектов конечных температур в маломассивных белых карликах. Учет температуры может объяснить наблюдательные данные из выпуска данных Слоановского Цифрового Небесного Обзора. В дополнении, были оценены температуры ядер белых карликов – спутников миллисекундных пульсаров PSR J1738+0333, PSR J1012+5307 и PSR J1911-5958A.

Ключевые слова: белые карлики, общая теория относительности, эффекты конечных температур, наблюдательные данные.

1 Введение. Компактные объекты представляют собой конечные продукты звездной эволюции и делятся на три основных типа: белые карлики (БК), нейтронные звезды (НЗ) и черные дыры (ЧД), за исключением экзотических и в то же время гипотетических объектов, как кварковые звезды, бозонные звезды, кротовые норы и т.д. Эти объекты называются компактными из-за большой массы и малого размера и соответственно, высокой плотности. Считается, что начальная масса является ключевым фактором, определяющим конечный тип звезды. Например, белые карлики образуются из легких звезд прародителей с массами $M \approx (1 - 4) M_{\odot}$ [1], но верхний

предел массы статического холодного белого карлика без магнитного поля не превышает предел Чандрасекара $M \leq 1.44M_{\odot}$ [2] (с магнитным полем значение массы может превысить данный предел [3], [4], [5]). Отношение гравитационного радиуса к фактическому радиусу объекта так называемый параметр компактности $z = r_g/R$ для белых карликов имеет значение $z \sim 0.001$, для нейтронных звезд $z \approx 0.3$, для черных дыр $z = 1$ [6], где $r_g = 2GM/c^2$ гравитационный радиус, G – гравитационная постоянная, M – полная масса рассматриваемого объекта, c – скорость света в вакууме. То есть, чем объект компактнее, тем больше становится заметнее роль общей теории относительности (ОТО). Важность общей теории относительности в случае массивных белых карликов была наглядно показана в предыдущих работах [7, 8, 9, 10].

Одной из актуальных задач современной астрофизики является построение реальной физической модели компактных объектов, таких, как белые карлики и нейтронные звезды и т.д., которые могут объяснить наблюдательные данные. Следовательно, для этого все физические величины и явления должны быть полностью учтены в уравнениях состояния (УС) вещества и звездной структуры. В уравнениях звездной структуры были приняты во внимания эффекты общей теории относительности, то есть было использовано уравнение Толмана-Оппенгеймера-Волкова (ТОВ). Согласно работам [11] и [12] необходимо исследовать БК в общей теории относительности, чтобы проанализировать их устойчивость на поправки ОТО, хотя ими можно пренебречь для маломассивных БК.

В данной работе рассматриваются не только влияние эффектов ОТО на структуру белых карликов, но и роль эффектов конечных температур. Учет таких эффектов и физических параметров делают теорию белого карлика более реалистичной.

В настоящее время существуют три основных вида уравнений состояния для описания вырожденной материи БК: уравнение состояния Чандрасекара, уравнение состояния Салпитера и релятивистское уравнение состояния Фейнмана-Метрополиса-Теллера. Основные отличия, преимущества и недостатки, между этими уравнениями состояния подробно приведены в работе [8]. Следует также отметить, что политропные уравнения состояния являются предельным случаем уравнения состояния Чандрасекара или Салпитера в нерелятивистском и релятивистском пределах.

В статье рассматриваются горячие белые карлики с использованием уравнения состояния Чандрасекара, включая в него эффекты конечных температур. Аналогичный подход включения в релятивистское уравнение состояния Фейнмана-Метрополиса-Теллера влияния конечных температур рассматривали Ш. Карвальо и другие [12, 13, 14]. Для подтверждения достоверности данного подхода в конце работы теоретические результаты были сопоставлены с наблюдательными массами и радиусами от каталога белых карликов Слоановского Цифрового Небесного Обзора (Sloan Digital Sky Survey (SDSS)) [15, 16]. В отличие от работ Ш. Карвальо и др., в данной статье исследуется БК с помощью УС Чандрасекара, и Выпуск Данных 4 (Data Release 4 (DR 4)) SDSS, плюс новые источники (PSR J1012+5307, PSR J1911-5958A, PSR J1738+0333).

Структура статьи организована следующим образом: сначала в разделах 2 и 3 кратко рассматривается уравнение состояния Чандрасекара без учета и с учетом температуры; далее в разделе 4 приводится уравнение звездной структуры и равновесия для сферическо-симметричной звезды в общей теории относительности с переходом на классический предел. Затем, в разделе 5 рассматриваются белые карлики - компоненты миллисекундных пульсаров PSR J1738+0333, PSR J1012+5307 и PSR J1911-5958A, строятся зависимости: логарифма поверхностной гравитации от массы, логарифма поверхностной гравитации от радиуса, соотношения масса-радиус, совместно с наблюдательными данными определяются температуры ядер белых карликов. В заключении приводятся основные результаты и делаются соответствующие выводы.

2 Уравнение состояния Чандрасекара при нулевой температуре. Уравнение состояния вырожденного вещества белого карлика, в простейшем случае, определяет зависимость полного давления от полной плотности энергии. Вещество белых карликов состоит из электронов и положительно заряженных ионов (голых ядер). При этом электроны рассматриваются, как полностью вырожденный электронный газ и описываются статистикой Ферми-Дирака. В

приближении Chandrasekara распределение электронов, а также ионов предполагается локально постоянным. Следовательно, условие локальной нейтральности заряда задается как

$$n_e = \frac{Z}{A} n_N, \quad (1)$$

где n_e – концентрация электронов, Z – число протонов, A – средний атомный вес (массовое число), n_N – концентрация нуклонов. При полном вырождении заполнены все нижние энергетические уровни вплоть до некоторого максимального, называемого уровнем Ферми. Концентрация полного вырожденного электронного газа на уровне Ферми определяется как

$$n_e = \int_0^{p_e^F} \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} d^3 p = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_e^F} p^2 dp = \frac{(p_e^F)^3}{3\pi^2\hbar^3}, \quad (2)$$

где p_e^F – импульс Ферми электрона, \hbar – приведенная постоянная Планка.

По Chandrasekara полное давление создается давлением электронов P_e , в то время как давление положительно заряженных ядер P_N несущественно, а плотность энергии определяется плотностью энергии ядер ε_N , в то время как плотность энергии вырожденных электронов ε_e пренебрежимо мала. Таким образом, УС Chandrasekara задается, как

$$\varepsilon_{Ch} = \varepsilon_N + \varepsilon_e \approx \varepsilon_N = \frac{A}{Z} M_u c^2 n_e, \quad (3)$$

$$P_{Ch} = P_N + P_e \approx P_e, \quad (4)$$

где $M_u = 1.6604 \times 10^{-24} \text{ г}$ – атомная единица массы, ε_N – плотность энергии нуклонов, ε_e – плотность энергии электронов, P_N – давление нуклонов, P_e – давление электронов. Отношение атомного числа A к числу протонов Z обычно в литературе обозначается как $\mu = A/Z$ и для простоты все расчеты в статье проводились принимая значение $\mu = 2$.

Полная плотность энергии электронов записывается в следующем виде, хотя она пренебрегается в УС Chandrasekara

$$\varepsilon_e = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_e^F} \sqrt{c^2 p^2 + m_e^2 c^4} 4\pi p^2 dp = \frac{m_e^4 c^5}{8\pi^2 \hbar^3} \left[x_e \sqrt{1+x_e^2} (1+2x_e^2) - \text{arsh}(x_e) \right], \quad (5)$$

а полное давление электронов определяется как

$$P_e = \frac{1}{3} \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_e^F} \frac{c^2 p^2}{\sqrt{c^2 p^2 + m_e^2 c^4}} 4\pi p^2 dp = \frac{m_e^4 c^5}{8\pi^2 \hbar^3} \left[x_e \sqrt{1+x_e^2} (2x_e^2/3 - 1) + \text{arsh}(x_e) \right], \quad (6)$$

где $x_e = p_e^F / (m_e c)$ – безразмерный импульс Ферми электрона, m_e – масса электрона [8].

3 Уравнение состояния Chandrasekara при конечных температурах. В общем случае выражение для концентрации электронов следует из статистики Ферми-Дирака и она, при учете температуры, определяется как [17]

$$n_e = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{\exp\left[\frac{E(p) - \mu_e(p)}{k_B T}\right] + 1}, \quad (7)$$

где $k_B = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{ эрг} \cdot \text{К}^{-1}$ – постоянная Больцмана, μ_e – химический потенциал, $E(p) = \sqrt{c^2 p^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2$ – кинетическая энергия, p и m_e – импульс и масса покоя электрона соответственно.

Формула (2) с учетом эффектов конечных температур может быть записана в следующей альтернативной форме (см. Приложение А)

$$n_e = \frac{2\pi\sqrt{2}}{(2\pi\hbar)^3} m^3 c^3 \beta^{\frac{3}{2}} \left[F_{\frac{1}{2}}(\eta, \beta) + \beta F_{\frac{3}{2}}(\eta, \beta) \right], \quad (8)$$

где

$$F_k(\eta, \beta) = \int_0^\infty \frac{t^k \sqrt{1 + (\beta/2)t}}{1 + e^{t-\eta}} dt \quad (9)$$

релятивистский интеграл Ферми-Дирака, $\eta = \mu_e/(k_B T)$, $t = E/(k_B T)$ и $\beta = k_B T/m_e c^2$ параметры вырождения.

Следовательно, плотность энергии вырожденного электронного газа при конечных температурах выражается по формуле

$$\varepsilon_e = \frac{2^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} m_e^4 c^5 \beta^{5/2} \left[F_{3/2}(\eta, \beta) + \beta F_{5/2}(\eta, \beta) \right], \quad (10)$$

электронное давление при конечных температурах

$$P_e = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 \hbar^3} m_e^4 c^5 \beta^{5/2} \left[F_{3/2}(\eta, \beta) + \frac{\beta}{2} F_{5/2}(\eta, \beta) \right]. \quad (11)$$

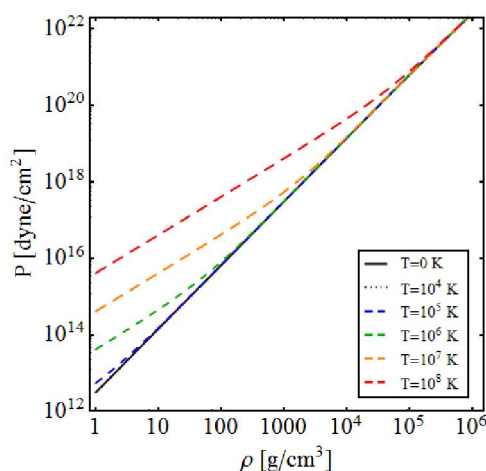


Рисунок 1 – Полное давление как функция полной плотности при значениях температур $T = (0, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8) \text{ К}$

В рисунке 1 построена зависимость полного давления от полной плотности при различных температурах $T = [0, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8]$ К. Как видно из рисунка, эффекты температуры существенны при малых плотностях. Влияние температуры становится заметнее начиная с температуры 10^5 К и оно растет с увеличением температуры при малых плотностях.

4 Уравнение звездной структуры и равновесия. Из сферически-симметричной метрики

$$ds^2 = e^{2\nu(r)} c^2 dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (12)$$

уравнения звездной структуры могут быть записаны в форме Толмана-Оппенгеймера-Волкова [18],

$$\frac{d\nu(r)}{dr} = \frac{GM(r)}{c^2 r^2} \left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{M(r)c^2} \right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \right)^{-1}, \quad (13)$$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -[\varepsilon(r) + P(r)] \frac{d\nu(r)}{dr}, \quad (14)$$

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \frac{\varepsilon(r)}{c^2}, \quad (15)$$

где $e^{-2\lambda(r)} = 1 - 2GM(r)/(c^2 r)$, $M(r)$ – масса вещества внутри белого карлика радиусом r , $\nu(r)$ – безразмерный гравитационный потенциал внутри БК, который связан с физическим потенциалом как $\Phi(r) = c^2 \nu(r)$, $\varepsilon(r) = c^2 \rho(r)$ – полная плотность энергии и $P(r)$ – полное давление, определяемые через уравнения (3) и (4).

Из уравнений (13) и (15) полное давление можно записать в следующей форме

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} \left[1 + \frac{P(r)}{\rho(r)c^2} \right] \left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{M(r)c^2} \right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \right)^{-1}, \quad (16)$$

Это и есть уравнение Толмана-Оппенгеймера-Волкова, которое полностью определяет структуру сферически-симметричного тела, находящегося в гидростатическом равновесии. Подробный вывод уравнений можно найти в работе [18]. Если пренебречь членами порядка $1/c^2$, то уравнение ТОВ переходит на классический – ньютоновский предел

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}, \quad (17)$$

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad (18)$$

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{GM(r)}{r^2}, \quad (19)$$

Эти уравнения хорошо описывают нерелятивистские объекты, где поправки общей теории относительности пренебрежимо малы.

Численно решая уравнение Толмана-Оппенгеймера-Волкова для уравнения состояния Чандрасекара ($\mu = 2$) при конечных температурах, получено соотношение массы и радиуса (см. рисунок 2).

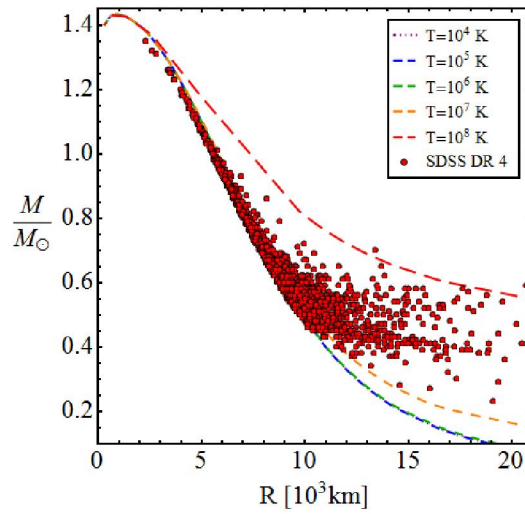


Рисунок 2 – Соотношение массы и радиуса при температурах $T = (10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8)$ К (кривые линии) и их сравнение с наблюдательными данными SDSS DR 4 (кружки)

Из рисунков 2 и 3 видно, что эффекты конечных температур существенны для маломассивных белых карликов (в рисунке 2 в пределах массы $M \approx (0.2 - 0.8) M_{\odot}$). Более того, с уменьшением массы роль данного эффекта растет. Это говорит о том, что вещество маломассивных белых карликов нельзя считать полностью вырожденным.

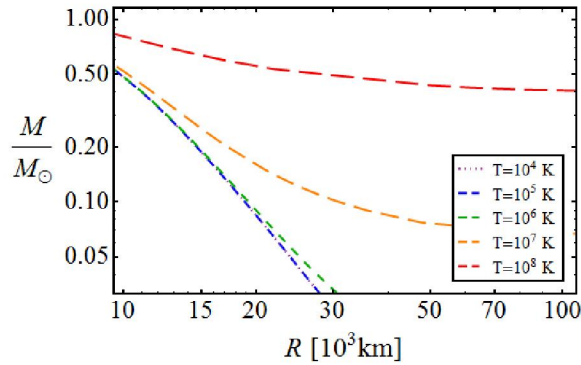


Рисунок 3 – Соотношение массы и радиуса при температурах $T = (10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8)$ К (кривые линии) при интервале радиуса $R = (10^4 - 10^5)$ км.

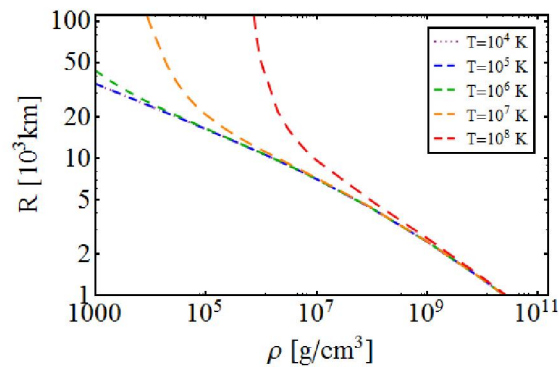


Рисунок 4 – Соотношения центральная плотность-радиус при температурах $T = (10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8)$ К

Как видно из рисунков 4 и 5 в соотношениях центральная плотность-радиус и центральная плотность-масса с уменьшением центральной плотности эффекты температур более заметны более явно, а с увеличением центральной плотности эти эффекты ослабевают. То есть эффекты температур особенно важны в для маломассивных белых карликов.

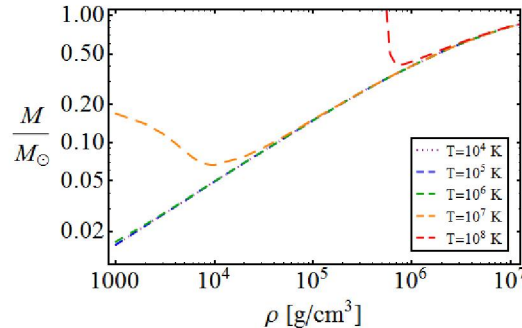


Рисунок 5 – Соотношения центральная плотность-масса при температурах $T = (10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8)$ К

5 Спутники - белые карлики миллисекундных пульсаров. Миллисекундный пульсар – это пульсар с периодом вращения в диапазоне от 1 до 10 миллисекунд. Подобные пульсары были обнаружены в радио-, рентгеновском и гамма-диапазоне волн электромагнитного спектра. Теория происхождения миллисекундных пульсаров полностью не разработана. Наиболее распространенная теория их образования гласит, что они начинают свою жизнь как пульсары с небольшими периодами вращения, но затем постепенно раскручивается путём аккреции. Миллисекундные пульсары являются компонентами маломассивных рентгеновских двойных систем [19].

Для теоретической оценки температуры ядра в статье рассматриваются белые карлики, которые являются спутниками миллисекундных пульсаров PSR J1738+0333, PSR J1012+5307 и PSR J1911-5958A. В расчетах, для простоты, ядра белых карликов считаются изотермическими.

5 а) PSR J1738+0333.

В работе Antoniadis и др. [20] были получены фотометрический радиус $R = (0.042 \pm 0.004) R_{\odot}$ спутника-белого карлика PSR J1738+0333, и с помощью анализа спектра атмосферы белого карлика эффективная поверхностная температура $T_{eff} = (9130 \pm 150)$ К и логарифмическая поверхностная гравитация $\log_{10}(g) = \log_{10}(GM/R^2) = 6.55 \pm 0.1$. Детали наблюдения и технические аспекты измерения параметров двойной системы можно найти в соответствующих работах [20].

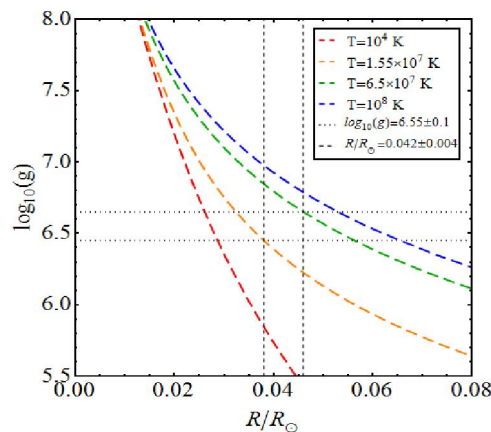


Рисунок 6 – Зависимость логарифма поверхностной гравитации от радиуса

На рисунке 6 была построена зависимость логарифма поверхностной гравитации как функция радиуса белых карликов при разных температурах изотермического ядра $T = (10^4, 1.55 \times 10^5, 6.5 \times 10^6, 10^8) \text{ K}$. Для оценки температуры изотермического ядра были также приведены наблюдательные данные для БК и двойной системы PSR J1738+0333. Горизонтальные пунктирные и вертикальные точечно-пунктирные линии на рисунке 6 показывают максимальные и минимальные значения поверхностной гравитации $\log_{10}(g) = 6.55 \pm 0.1$ и фотометрического радиуса $R = (0.042 \pm 0.004) R_{\odot}$, соответственно. С помощью этих данных из рисунков можно графически определить, что температура ядра БК – спутника (компаньона) пульсара находится приблизительно в районе $T_c \approx (1.55 - 6.5) \times 10^7 \text{ K}$.

Полученный теоретический результат можно сравнить с наблюдением. Для этого воспользуемся формулой Коестера [21], которая связывает поверхностную температуру белого карлика с температурой изотермического ядра

$$\frac{T_{eff}^4}{g} = 2.05 \times 10^{-10} T_c^{2.56}, \quad (20)$$

где T_{eff} – поверхностная эффективная температура, T_c – температура изотермического ядра (температура в центре БК), g – поверхностная гравитация (ускорение свободного падения). Формула Коестера была получена, решая уравнения теплопроводности для вырожденного вещества белого карлика, с учетом толщины оболочки (атмосферы) БК и поправок гравитационного красного смещения. Для белого карлика в системе PSR J1738+0333 формула Коестера выдает температуру изотермического ядра $T_c = (2.59 \pm 0.17) \times 10^7 \text{ K}$, которая в пределах погрешности полностью совпадает с нашей теоретической оценкой.

5 б) PSR J1012+5307.

В работе J. A. Panei et al. [22] приведены параметры белого карлика, такие как $\log_{10}(g) = 6.34 \pm 0.2$, $M = (0.16 \pm 0.02) M_{\odot}$ и $T_{eff} = (8670 \pm 300) \text{ K}$ в тесной двойной системе PSR J1012+5307. В частности, для графических расчетов были использованы значения ускорения свободного падения и массы БК.

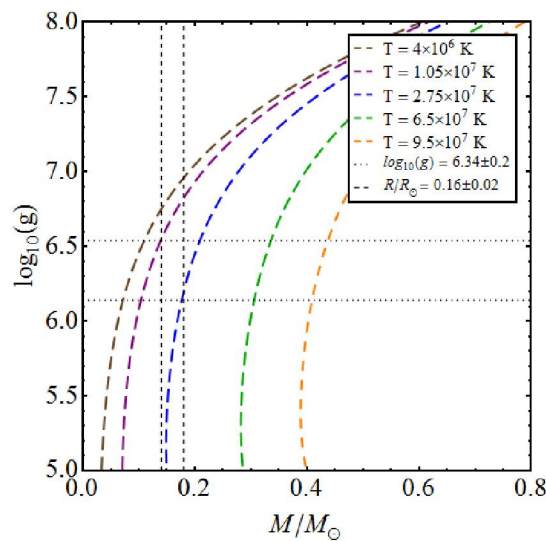


Рисунок 7 – Зависимость логарифма поверхностной гравитации от массы

На рисунке 7 был построен график ускорения свободного падения на поверхности $\log_{10}(g)$ как функция массы белых карликов с внутренними температурами $T = (10^4, 1.05 \times 10^7, 2.75 \times 10^7, 6.5 \times 10^7, 9.5 \times 10^7) \text{ K}$. Горизонтальные пунктирные линии показывают максимальные и минимальные значения $\log_{10}(g) = 6.34 \pm 0.2$, а вертикальные пунктирные линии максимальные и минимальные значения массы $M = (0.16 \pm 0.02) M_{\odot}$ белого карлика в системе PSR J1012-5307.

На основе теоретических кривых и наблюдательных данных была сделана оценка температуры ядра белого карлика – спутника пульсара. По нашей оценке она приблизительно равна $T_c = (1.05 - 2.75) \times 10^7 \text{ K}$, в то время соотношение Коестера выдает $T_c = (2.9 \pm 0.4) \times 10^7 \text{ K}$. Следовательно, наблюдательное и теоретическое значения температуры ядра T_c совпадают в диапазоне $(2.5 - 2.75) \times 10^7 \text{ K}$.

5 в) PSR J1911-5958A.

На рисунке 8 было получено соотношение масса-радиус горячих статических белых карликов при конечных температурах $T = (4 \times 10^6, 2.75 \times 10^7, 6.5 \times 10^7, 9.5 \times 10^7) \text{ K}$. Диагональные пунктирные линии показывают максимальные и минимальные значения ускорения свободного падения на поверхности $\log_{10}(g) = 6.44 \pm 0.2$, вертикальные точно-пунктирные линии радиуса $R = (0.044 \pm 0.009) R_{\odot}$ белого карлика - спутника миллисекундного пульсара PSR J1911-5958A.

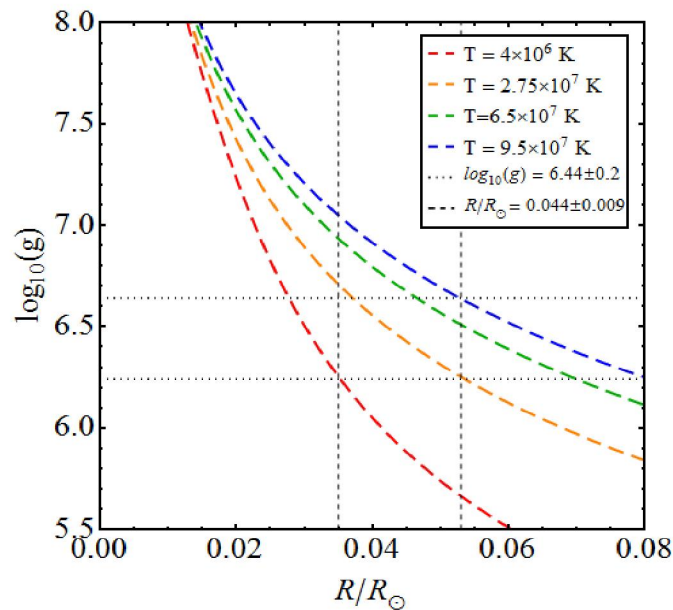


Рисунок 8 – Зависимость логарифма поверхностной гравитации от радиуса

Из рисунка 8 можно аналогично к предыдущим случаям графически определить температуру ядра БК в двойной системе PSR J1911-5958A. Наша оценка показывает, что температура ядра БК находится в пределах $T_c = (0.4 - 9.5) \times 10^7 \text{ K}$. Для этого БК с поверхностной гравитацией $\log_{10}(g) = 6.44 \pm 0.2$ и поверхностной эффективной температурой $T_{eff} = (10090 \pm 150) \text{ K}$ (см. J. A. Rane et al. [22]) формула Коестера выдает температуру ядра $T_c = (3.35 \pm 0.5) \times 10^7 \text{ K}$, которая в пределах погрешности наблюдения совпадает с нашей оценкой.

Таблица 1 – параметры белых карликов.

| Параметры БК Источники | Наблюдения | | | | Теоретические расчеты температуры ядра БК T_c (10^7 К) | |
|-------------------------------|---------------|----------------|---------------|---------------|---|-------------|
| | T_{eff} (К) | $\log_{10}(g)$ | M/M_{\odot} | R/R_{\odot} | Формула Коэстера | Наша оценка |
| PSR J1738+0333 | 9130±150 | 6.55±0.1 | --- | 0.042±0.004 | 2.59±0.17 | 4.025±2.475 |
| PSR J1012+5307 | 8670±300 | 6.34±0.2 | 0.16±0.02 | --- | 2.9±0.4 | 1.9±0.5 |
| PSR J1911-5958A | 10090±150 | 6.44±0.2 | --- | 0.044±0.009 | 3.35±0.5 | 4.95±4.55 |

В таблице 1 – приведены основные наблюдательные данные и теоретические расчеты, выполненные в этой статье. Как видно, из таблицы теоретические расчеты в пределах погрешности наблюдения вполне соответствуют.

6 Заключение. В статье были исследованы свойства невращающихся горячих белых карликов в рамках общей теории относительности. С этой целью, уравнение Толмана-Оппенгеймера-Волкова совместно с уравнением баланса массы были проинтегрировано численно с использованием уравнения состояния Чандрасекара ($\mu = 2$) при конечных температурах. В результате были получены соотношения центральная плотность-масса, центральная плотность-радиус, масса-радиус для горячих белых карликов. Исследования показывают, что эффекты конечных температур существенно влияют на структуру белых карликов при низких плотностях, то есть они играют ключевую роль для маломассивных белых карликов.

Помимо этого, было показано, что учет эффектов конечных температур может объяснить вычисленные массы и радиусы белых карликов из выпуска данных 4 Sloan Digital Sky Survey небесного обзора. Следовательно, для построения реалистичной модели белых карликов эффекты конечных температур должны быть приняты во внимание надлежащим образом. Наши расчеты полностью подтверждают правильность выводов сделанных в работе [12].

В статье также были оценены температуры изотермических ядер некоторых белых карликов-спутников миллисекундных пульсаров PSR J1738+0333, PSR J1012+5307 и PSR J1911-5958A. Параллельно эти оцененные температуры были проверены с помощью формулы Коэстера. Подход, примененный в этой статье, можно рассматривать как альтернативный способ вычисления температуры ядра и поверхности белого карлика. В дальнейших работах, для полноты, будут рассмотрены невращающиеся и вращающиеся горячие белые карлики в общей теории относительности с учетом ядерного состава, кулоновского взаимодействия, поправки Томаса-Ферми и т.д.

Благодарность. Работа была выполнена при поддержке гранта 3101/ГФ4 ИПС-11/2015, МОН РК.

Приложение А. В данном приложении приводится вывод следующего выражения

$$n_e = \frac{8\pi\sqrt{2}}{(2\pi\hbar)^3} m_e^3 c^3 (\beta)^{3/2} [F_{1/2}(\eta, \beta) + \beta F_{3/2}(\eta, \beta)] = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{\infty} \frac{p^2 dp}{\exp[(E(p) - \mu_e(p))/k_B T] + 1}, \quad (A 1)$$

для этого воспользуемся интегралом Ферми-Дирака, далее приведены алгебраические преобразования и окончательный вывод вышеприведенной формулы.

$$n_e = \frac{8\pi\sqrt{2}}{(2\pi\hbar)^3} m_e^3 c^3 (\beta)^{3/2} [F_{1/2}(\eta, \beta) + \beta F_{3/2}(\eta, \beta)] = \frac{8\pi\sqrt{2}}{(2\pi\hbar)^3} m_e^3 c^3 (\beta)^{3/2} \left[\int_0^{\infty} \frac{t^{1/2} \sqrt{1 + (\beta/2)t}}{1 + \exp[t - \eta]} dt + \beta \int_0^{\infty} \frac{t^{3/2} \sqrt{1 + (\beta/2)t}}{1 + \exp[t - \eta]} dt \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8\pi\sqrt{2}}{(2\pi\hbar)^3} m_e^3 c^3 \left(\frac{k_B T}{m_e c^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \left[\frac{2(E(p)/(k_B T))^{1/2} \sqrt{1+E(p)/(2m_e c^2)}}{1 + \exp\left[\frac{E(p) - \mu_e(p)}{k_B T}\right]} + \left(\frac{k_B T}{m_e c^2} \right) \frac{(E(p)/(k_B T))^{3/2} \sqrt{1+E(p)/(2m_e c^2)}}{1 + \exp\left[\frac{E(p) - \mu_e(p)}{k_B T}\right]} \right] \times \\
&\times \frac{c^2 p dp}{k_B T \sqrt{c^2 p^2 + m_e^2 c^4}} = \frac{8\pi\sqrt{2}}{(2\pi\hbar)^3} m_e^3 c^3 \int_0^\infty \left[\left(\frac{E(p)}{k_B T} \right)^{1/2} \left(\frac{k_B T}{m_e c^2} \right)^{3/2} + \left(\frac{E(p)}{k_B T} \right)^{3/2} \left(\frac{k_B T}{m_e c^2} \right)^{5/2} \right] \frac{\sqrt{1 + \frac{E(p)}{2m_e c^2}}}{1 + e^{\frac{E(p) - \mu_e(p)}{k_B T}}} \times \\
&\times \frac{c^2 p dp}{k_B T \sqrt{c^2 p^2 + m_e^2 c^4}} = \frac{8\pi\sqrt{2}}{(2\pi\hbar)^3} m_e^3 c^3 \int_0^\infty \left[\frac{(E(p))^{1/2}}{(m_e c^2)^{3/2}} + \frac{(E(p))^{3/2}}{(m_e c^2)^{5/2}} \right] \frac{\sqrt{1 + E(p)/(2m_e c^2)}}{1 + \exp\left[\frac{E(p) - \mu_e(p)}{k_B T}\right]} \frac{c^2 p dp}{\sqrt{c^2 p^2 + m_e^2 c^4}} = \\
&= \left[\frac{(E(p))^{1/2}}{(m_e c^2)^{3/2}} \left(1 + \frac{E(p)}{m_e c^2} \right) = \frac{(E(p))^{1/2}}{(m_e c^2)^{5/2}} (m_e c^2 + E(p)) \right] = \frac{8\pi\sqrt{2}}{(2\pi\hbar)^3} m_e^3 c^3 \int_0^\infty \frac{(E(p))^{1/2}}{(m_e c^2)^{5/2}} \frac{(m_e c^2 + E(p)) \sqrt{1 + \frac{E(p)}{2m_e c^2}}}{1 + e^{\frac{E(p) - \mu_e(p)}{k_B T}}} \times \\
&\times \frac{c^2 p dp}{\sqrt{c^2 p^2 + m_e^2 c^4}} = \frac{8\pi\sqrt{2}}{(2\pi\hbar)^3} m_e^3 c^3 \int_0^\infty \frac{\sqrt{2m_e c^2 E(p) + E^2(p)}}{\sqrt{2m_e^3 c^6}} \frac{c^2 p dp}{1 + e^{\frac{E(p) - \mu_e(p)}{k_B T}}} = \left[\sqrt{2m_e c^2 E(p) + E^2(p)} = \quad (A 2) \right. \\
&= \left. \sqrt{2m_e c^2 (\sqrt{c^2 p^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2)} + (\sqrt{c^2 p^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2)^2 = cp \right] = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{1 + \exp\left[\frac{E(p) - \mu_e(p)}{k_B T}\right]}.
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] S.L. Shapiro, S.A. Teukolsky. Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects (John Wiley & Sons, New York, 1983).
- [2] S. Chandrasekhar, *The Astrophysics Journal*, 1931, 74, 81.
- [3] U. Das, B. Mukhopadhyay, *Physical Review D*, 2012, 86, 042001.
- [4] U. Das, B. Mukhopadhyay, *International Journal of Modern Physics D*, 2012, 21(11), 124001.
- [5] U. Das and B. Mukhopadhyay, *Physical Review Letters*, 2013, 110, 071102.
- [6] D.G. Yakovlev, *International Journal of Modern Physics A*, 2016, 31, 1641017.
- [7] K.A. Boshkayev, B.A. Zhami et al, *News of NAS RK*, 2016, 3 (307), 49-60.
- [8] M. Rotondo, J. A. Rueda, R. Ruffini and S.-S. Xue, *Physical Review D*, 2011, 84, 084007.
- [9] K. Boshkayev, J. A. Rueda, R. Ruffini, I. Siutsou, *The Astrophysical Journal*, 2013, 762, (2), 117.
- [10] K. Boshkayev, J.A. Rueda, R. Ruffini, I. Siutsou, General Relativistic and Newtonian White Dwarfs // Proceedings of the MG13 Meeting on General Relativity (in 3 Volumes). Edited by Rosquist Kjell et al. Published by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2015. ISBN #9789814623995, pp. 2468-2474.
- [11] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, *J.Br. Astronom. Assoc.*, 1983, 93, 276.
- [12] S. M. de Carvalho, M. Rotondo, J. A. Rueda and R. Ruffini, *Physical Review C*, 2014, 89, 015801.
- [13] K. Boshkayev, J.A. Rueda, B. Zhami, Zh. Kalymova, G. Balgymbekov, *International Journal of Modern Physics: Conference Series*, 2016, 1660129.
- [14] K. Boshkayev, J.A. Rueda, B. Zhami, *Proceedings of the Twelfth Asia-Pacific International Conference*. Edited by HSU JONG-PING ET AL. Published by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2016. ISBN #9789814759816, pp. 189-190.
- [15] P.-E. Tremblay, P. Bergeron, and A. Gianninas, *The Astrophysics Journal*, 2011, 730, 128.
- [16] S.O. Kepler, I. Pelisoli, D. Koester et al, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2015, 446, 4078.
- [17] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Статическая физика: Том 5. (Наука, Москва, 1976).
- [18] J. R. Oppenheimer and G.M. Volkoff, *Phys. Rev.*, 1939, 55, 374 (in Eng.).

- [19]P. Haensel, A.Y. Potekhin, D.G. Yakovlev. Neutron Stars I: Equation of State and Structure (Springer, New York, 2007).
- [20]J. Antoniadis, M. H. van Kerkwijk, D. Koester, P. C. C. Freire, N. Wex, T. M. Tauris, M. Kramer, and C. G. Bassa, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, 2012, 423, 3316.
- [21]D. Koester, *Astronomy and Astrophysics*, 1976, 52, 415.
- [22]J. A. Panei, L. G. Althaus, X. Chen, Z. Han, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2007, 382, 779.

REFERENCES

- [1] S.L. Shapiro, S.A. Teukolsky. Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects (John Wiley & Sons, New York, 1983) (in Eng.).
- [2] S. Chandrasekhar, *The Astrophysics Journal*, 1931, 74, 81 (in Eng.).
- [3] U. Das, B. Mukhopadhyay, *Physical Review D*, 2012, 86, 042001 (in Eng.).
- [4] U. Das, B. Mukhopadhyay, *International Journal of Modern Physics D*, 2012, 21(11), 124001 (in Eng.).
- [5] U. Das and B. Mukhopadhyay, *Physical Review Letters*, 2013, 110, 071102 (in Eng.).
- [6] D.G. Yakovlev, *International Journal of Modern Physics A*, 2016, 31, 1641017 (in Eng.).
- [7] K.A. Boshkayev, B.A. Zhami et al, *News of NAS RK*, 2016, 3 (307), 49-60 (in Kaz.).
- [8] M. Rotondo, J. A. Rueda, R. Ruffini and S.-S. Xue, *Physical Review D*, 2011, 84, 084007 (in Eng.).
- [9] K. Boshkayev, J. A. Rueda, R. Ruffini, I. Siutsou, *The Astrophysical Journal*, 2013, 762, (2), 117 (in Eng.).
- [10]K. Boshkayev, J.A. Rueda, R. Ruffini, I. Siutsou, General Relativistic and Newtonian White Dwarfs // Proceedings of the MG13 Meeting on General Relativity (in 3 Volumes). Edited by Rosquist Kjell et al. Published by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2015. ISBN #9789814623995, pp. 2468-2474 (in Eng.).
- [11]S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, *J.Br. Astronom. Assoc.*, 1983, 93, 276 (in Eng.).
- [12]S. M. de Carvalho, M. Rotondo, J. A. Rueda and R. Ruffini, *Physical Review C*, 2014, 89, 015801 (in Eng.).
- [13]K. Boshkayev, J.A. Rueda, B. Zhami, Zh. Kalymova, G. Balgymbekov, *International Journal of Modern Physics: Conference Series*, 2016, 1660129 (in Eng.).
- [14]K. Boshkayev, J.A. Rueda, B. Zhami, *Proceedings of the Twelfth Asia-Pacific International Conference*. Edited by HSU JONG-PING ET AL. Published by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2016. ISBN #9789814759816, pp. 189-190 (in Eng.).
- [15]P.-E. Tremblay, P. Bergeron, and A. Gianninas, *The Astrophysics Journal*, 2011, 730, 128 (in Eng.).
- [16]S.O. Kepler, I. Pelisoli, D. Koester et al, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2015, 446, 4078 (in Eng.).
- [17]L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *Sticheseskaya fizika: Tom 5 (Nauka, Moskva, 1976)* (in Russ.).
- [18]J. R. Oppenheimer and G.M. Volkoff, *Phys. Rev.*, 1939, 55, 374 (in Eng.).
- [19]P. Haensel, A.Y. Potekhin, D.G. Yakovlev. Neutron Stars I: Equation of State and Structure (Springer, New York, 2007) (in Eng.).
- [20]J. Antoniadis, M. H. van Kerkwijk, D. Koester, P. C. C. Freire, N. Wex, T. M. Tauris, M. Kramer, and C. G. Bassa, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, 2012, 423, 3316 (in Eng.).
- [21]D. Koester, *Astronomy and Astrophysics*, 1976, 52, 415 (in Eng.).
- [22]J. A. Panei, L. G. Althaus, X. Chen, Z. Han, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2007, 382, 779 (in Eng.).

Қ.А. Бошқаев^{1,2}, Б.А. Жәми¹, Ж.А. Қалымова¹, Ж.Н. Бришева¹

¹ЭТФҒЗИ, Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, Алматы, 050040, Қазақстан
²ICRANet, Piazza della Repubblica 10, Pescara, I-65122, Italy

ШЕКТІ ТЕМПЕРАТУРАЛАР МЕН ЖАЛПЫ САЛЫСТЫРМАЛЫҚ ТЕОРИЯСЫНЫҢ ӘСЕРЛЕРІН ЕСКЕРГЕНДЕГІ СТАТИКАЛЫҚ АҚ ЕРГЕЖЕЙЛІ ЖҰЛДЫЗДАР

Аннотация. Мақалада суық және ыстық ақ ергежейлі жұлдыздар Чандрасекар күй теңдеуінің көмегімен жалпы салыстырмалық теориясы аясында зерттелді. Ақ ергежейлі жұлдыздардың келесідей негізгі параметрлері есептелінді: орталық тығыздық, қысым, масса, радиус, изотермиялық ядро температурасы және беттік еркін түсу үдеуі. Массасы аз ақ ергежейлі жұлдыздарда шекті температуралардың әсерлерін ескеру қажеттігі көрсетілді. Температураның әсерін ескеру арқылы Sloan Digital Sky Survey Data Release 4 бақылауынан белгілі болған деректерді түсіндіруге болады. Сонымен қатар PSR J1738+0333, PSR J1012+5307 және PSR J1911-5958A миллисекундтық пульсарлардың серігі болып табылатын ақ ергежейлі жұлдыздардың ядроларының температуралары бағаланды.

Тірек сөздер: ақ ергежейлі жұлдыздар, жалпы салыстырмалық теориясы, шекті температураның әсерлері, бақылған деректер.