

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

<https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.77>

Volume 5, Number 333 (2020), 10 – 18

N. K. Ashirbayev, Zh.N. Ashirbayeva, M.T. Shomanbayeva,  
R.B. Bekmoldayeva, T.S. Sultanbek, Sh.E. Altynbekov

M.Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan.  
E-mail: ank\_56@mail.ru, saya\_270681@mail.ru, mtshomanbaeva@mail.ru, raina\_b@mail.ru,  
sultur\_55@mail.ru, Altynbekov\_Shadiar@mail.ru

**WAVE PROCESSES IN A FLAT BODY WITH  
A SYMMETRIC LOCATED RECTANGULAR CUTOUT**

**Abstract.** The work is devoted to the generalization of the difference method of spatial characteristics to the case of the plane problem of the propagation of waves in a rectangular region of finite dimensions with a symmetrically-located rectangular cutout at the lateral boundaries. Based on the numerical technique developed in this work, the calculated finite - difference relations of dynamic problems are obtained at the corner points of a rectangular cutout, where the smoothness of functions that is “familiar” to dynamic problems is violated. At these corner points, the first and second derivatives of the desired functions suffer a discontinuity of the first kind. The results of the study are brought to a numerical solution. The effect of stress concentration in the vicinity of the cutout was studied and it was shown that the impact of the cutout on the particle velocity distribution, on the stress distribution has a local character.

**Keywords:** elastic, velocity, stress, load, plane deformation, wave process, stress concentration, numerical solution.

**Introduction.** Prediction of dynamic wave processes in solids of finite dimensions, taking into account a number of attenuating factors (discontinuities in the boundary conditions, holes, cavities, cutouts, etc.) by mathematical modeling to determine the nature of possible damage, is, besides purely scientific interest, an important applied value determined by requests for engineering practice.

The majority of structures used in construction, engineering and other branches of technology are characterized by the presence of various discontinuities in the form of holes, recesses, notches, protrusions, etc., due to either manufacturing technology or operational requirements. Near such discontinuities, as is known, the phenomenon of local distortion of stresses and strains arises, usually called stress concentration. These effects make a significant change in the “average” stresses and are often the cause of failure. The qualitative and quantitative effects of stress concentration are influenced by a variety of reasons related to the geometry of the concentrator, the type of impact, and the real properties of the material. Therefore, the problem of stress concentrations is given great attention in modern technology, which is reflected in the almost infinite number of domestic and foreign studies, as well as in the special monographs and the reference manuals. In general, the number of works devoted to the dynamic problems, taking into account a number of weakening factors, is very small; far from all aspects of their working capacity under conditions of unsteady external loads are considered in them [1-19]. However, interest in these problems, due primarily to the importance of solving complex practical problems, is great, and further improvement of numerical methods in various modifications using increasingly sophisticated electronic computing equipment should lead to a significant development of this direction.

**The mathematical formulation of the problem.** Let's consider the basic equations of the problem of the dynamic theory of elasticity for a homogeneous isotropic elastic body in a Cartesian coordinate system. For convenience, the axes of the Cartesian coordinate system are denoted by  $Ox_i$  ( $i=1,2$ ), and the time by  $t$ . The components of the stress tensor are denoted by  $\sigma_{ij}$  ( $x_1, x_2, t$ ), the strain tensor by  $\varepsilon_{ij}$  ( $x_1, x_2, t$ ) ( $i, j = 1,2$ ) and, finally, the displacement vectors by  $u_i$  ( $x_1, x_2, t$ ) ( $i = 1,2$ ).

It is convenient to represent the equations of motion and Hooke's law in the form of a normal hyperbolic system:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \partial^2 u_i / \partial t^2 \quad (i = 1, 2), \tag{1}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2 \mu \epsilon_{ij}, \tag{2}$$

where  $\rho$  is the density of the medium material,  $\lambda, \mu$  are the Lamé constants,  $\delta_{ij}$  is the Kronecker symbol,  $\theta$  is the volumetric strain equal to

$$\theta = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}.$$

A comma with an index means the partial derivative with respect to the corresponding argument. The summation is performed over  $j$  ( $j = 1, 2$ ).

The transition to dimensionless variables is carried out according to the formulas [7]:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \frac{tc_1}{b}; & \bar{x}_i &= \frac{x_i}{b}; & v_i &= \frac{1}{c_1} \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad (i=1,2) \\ p &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2\rho c_1^2}; & q &= \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\rho c_1^2}; \\ \tau &= \frac{\sigma_{12}}{\rho c_1^2}; & \gamma &= \frac{c_1}{c_2}, \end{aligned} \tag{3}$$

where  $b$  is the characteristic length,  $c_1, c_2$  are the velocities of the expansion and shear waves,  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$  are the components of the stress tensor, and  $\gamma$  is a constant parameter. In the future, the line over dimensionless parameters is omitted. Differentiating dependences (2) with respect to time, adding and subtracting the normal stresses  $\sigma_{11}$  and  $\sigma_{22}$ , the equations of motion (1) and physical relations (2) are written as a system of equations for the velocities of displacements  $v_1, v_2$  and three linear combinations  $p, q, \tau$  of the stress tensor components [7]:

$$\begin{aligned} v_1, t - p, 1 - q, 1 - \tau, 2 &= 0; & v_2, t - p, 2 + q, 2 - \tau, 1 &= 0; \\ \gamma^2 (\gamma^2 - 1) - 1 p, t - v_1, 1 - v_2, 2 &= 0; \\ \gamma^2 q, t - v_1, 1 + v_2, 2 &= 0; \\ \gamma^2 \tau, t - v_1, 2 - v_2, 1 &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

A comma with an index means the partial derivative with respect to the corresponding argument. This statement was chosen because such systems have been studied quite well by now, and in addition, when choosing velocities of displacements and stresses as dependent variables, the derivatives from the boundary conditions are excluded.

Find the functions  $v_1, v_2, p, q, \tau$ , that in a rectangular strip  $0 \leq x_1 \leq l, -L \leq x_2 \leq L$  with a symmetrically located rectangular cutout on the lateral boundaries (Fig.1) satisfy the equations (4), the initial conditions for  $t = 0$

$$v_1(x_1; x_2; 0) = v_2(x_1; x_2; 0) = p(x_1; x_2; 0) = q(x_1; x_2; 0) = \tau(x_1; x_2; 0) = 0 \tag{5}$$

and the following boundary conditions for  $t \geq 0$ :

$$v_1 = f(t), \quad v_2 = 0 \quad \text{at } x_1 = 0, \quad -L \leq x_2 \leq L, \tag{6}$$

$$p - q = 0, \quad \tau = 0 \quad \text{at } |x_2| = L, \quad 0 \leq x_1 \leq x_1^0 \quad \text{and} \quad x_1^1 \leq x_1 \leq l, \tag{7}$$

$$p + q = 0, \quad \tau = 0 \quad \text{at } x_1 = x_1^0, \quad x_2^1 \leq |x_2| \leq L \quad \text{and} \quad \text{at } x_1 = x_1^1, \quad x_2^1 \leq |x_2| \leq L, \tag{8}$$

$$p - q = 0, \quad \tau = 0 \quad \text{at } |x_2| = x_2^1, \quad x_0^1 \leq x_1 \leq x_1^1, \tag{9}$$

$$v_1 = v_2 = 0 \quad \text{at } x_1 = l, \quad |x_2| \leq L. \tag{10}$$

Here  $f(t)$  is a given function that varies in time according to the law of a continuously differentiable function, which at the beginning monotonically increases to the maximum value  $f(t_0)$ , and then monotonically decreases;  $x_1^0, x_1^1, x_2^1$  are the constant numbers defining the size of the cutout. Zero initial conditions (5) mean that a rectangular strip with a symmetrically positioned rectangular cutout at the lateral boundaries until the time instant  $t \leq 0$  is in an unperturbed state. The boundary condition (6) is the specification of the normal component of the particle velocity and the absence of the tangent component of the particle velocity at the strip boundary  $x_1 = 0$  for all time instants. The boundary conditions (7) mean that the corresponding points of the boundary  $|x_2| = L$  ( $0 \leq x_1 \leq x_1^0$  and  $x_1^1 \leq x_1 \leq l$ ) are free of the stress for all moments of time. The boundary conditions (8) - (9) mean that the contour of the rectangular cutout is free of stresses. The boundary conditions (10) correspond to the conditions of rigid fastening of the back of the border  $x_1 = l$ .

The task is to determine inside a rectangular region with a symmetrically located rectangular cutout on the lateral boundaries of the stress and velocity fields caused by the fronts of incident and repeatedly diffracted elastic waves at a time  $t > 0$ .

The solution of the system of equations (4) under initial (5) and boundary (6) - (10) conditions is found by the difference method of spatial characteristics. An algorithm for solving equations (4) based on the spatial characteristics method was developed in [7] for internal, boundary, and corner points and the corresponding calculated finite-difference relations were obtained. It is based on finite-difference relations obtained by integrating equations (4) along bicharacteristics and recorded at the nodal points into which the entire investigated area is divided (figure 1). When considering the boundary conditions (7) - (9), for each of the corner points B, G, P, D, C, S, Q, F (Fig.1) of the cutout, the pairing law of tangential stresses is fulfilled. This circumstance reduces the number of specified conditions at the corner point by one, and in order to obtain a closed system of equations, it is necessary to obtain one additional equation for each corner point B, G, P, D, C, S, Q, F of the cutout, respectively. The method of obtaining the additional equations for each of the corner points of the rectangular region was considered in [7]. However, all the resulting finite - difference relations can only be used in areas with a continuous change in all incoming parameters.

A feature of the considered body with a cutout is that at the corner points of a rectangular cutout (figure 1), the smoothness of functions that is "familiar" to dynamic problems is violated, i.e. at these points, the first and second derivatives of the desired functions suffer a discontinuity of the first kind. Therefore, they are considered as ordinary corner points of a rectangular cutout, and the method developed in [6] is generalized to obtain resolving equations at these singular points. When constructing a numerical solution for problem (4) - (10), it is assumed that the border of the strip and the contour of rectangular cutouts coincide with the line of nodes of the square grid that covers the studied area.

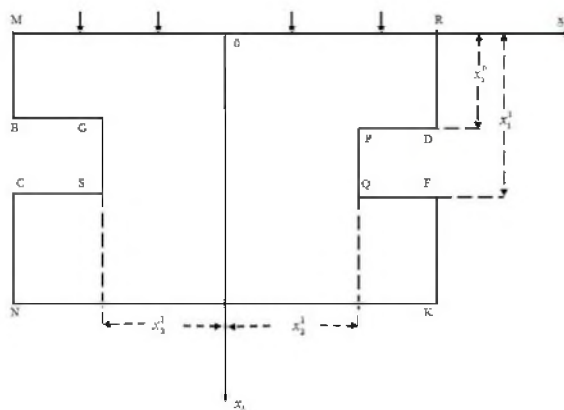


Figure 1 - The study area

**Analysis of the calculation results.** A square grid is applied to an elastic body in the form of a rectangular strip with a rectangular cutout, at the nodes of which the values of the velocity components  $v_1, v_2$  of displacements and stress  $p, q, \tau$  are determined. It is assumed that the boundaries of the body coincide with the line of nodes of the square grid that covers the studied area (figure 1).

The computational process is carried out in time steps. The time step  $k$  is selected in accordance with the necessary stability conditions [7]

$$\left(\frac{k}{h}\right)^2 \leq \min\left\{\frac{\gamma^2}{\gamma^2+1}, \frac{\gamma^2}{2(\gamma^2-1)}\right\} \quad (11)$$

that are used by the explicit finite - difference calculation scheme. In this way, the values of the sought quantities are calculated at any point of a rectangular strip with a rectangular cut at time  $t = t_0 = k\Delta t$ .

To obtain results at the next time step  $t = (k+1)\Delta t$ , it is enough to take the found values as the initial data and repeat the calculations. For the numerical implementation of the developed finite-difference scheme and the solution of non-stationary problems of the mechanics of a deformable solid, a calculation method and algorithm have been created and based on them a complex of calculation programs in Fortran-90 has been developed for high-speed personal computers.

Numerical results are given for the rectangular region  $0 \leq x_1 \leq 100 \cdot h$ ,  $|x_2| \leq 100 \cdot h$ . As an example, an I-beam construction with a deep symmetrically positioned side cutout was considered with the following values of the initial data:

$$f(t) = A \cdot t \cdot e^{-st}, \quad A=1, \quad s = 0.2, \quad k = 0.025, \quad h = 0.05, \quad x_1^0 = 20 \cdot h, \quad x_1^1 = 80 \cdot h, \quad |x_2^1| = 10 \cdot h, \quad \nu = 0.3, \\ \gamma = 1.87.$$

When analyzing the calculation results, the symmetry property of the problem with respect to the axis  $x_2 = 0$ , at the points of which  $v_2 = \tau = 0$  was used. Therefore, the obtained results are presented only for positive values  $x_2$  ( $x_2 \geq 0$ ).

It is noteworthy that, as the compression wave (longitudinal wave) propagates, the velocity of which  $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ , at the corner points of the strip and cutout, zones of diffraction perturbations arise. The emergence of these zones significantly complicates the construction of analytical solutions. From the physical point of view, the presence of these zones is due to lateral unloading in a direct compression wave, which, in turn, leads to a rotation of the velocity vector at internal points of the medium. The reflected longitudinal and transverse waves over time undergo multiple reflections from all boundaries, and the wave pattern is greatly complicated.

In the study of the complex stress state of an elastic medium, an analysis of the behavior of the individual components of the stress tensor is insufficient to conclude dangerous stress concentrations in terms of strength. In these cases, common criteria are often used, based on the application of the main normal and maximum tangential stresses. In the accepted dimensionless form, they can be written as

$$\sigma_{1,2} = p \pm \sqrt{q^2 + \tau^2}, \quad \tau_{\max} = \sqrt{q^2 + \tau^2}. \quad (12)$$

In this regard, Figures 2–4 in the plane  $x_1/h \cdot x_2/h$  for the time instant  $t = 500 \cdot k$  show, respectively, the isolines of the main normal  $\sigma_1 = const$ ,  $\sigma_2 = const$  and maximum tangential  $\tau_{\max} = const$  stresses, which demonstrate the stress state characteristic of an I-beam structure with a deep lateral cutout. The previous notation is accepted: solid, dash-dotted and dashed lines mark the contours of compressive, zero and tensile stresses, respectively. The numbers around the lines correspond to the values of the stresses on the isolines, and near the points - to the extreme values of the stresses. It can be noted that the level of the main normal  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  and maximum tangential  $\tau_{\max}$  stresses, the nature of their distribution is complex due to the superposition of reflected, diffracted, and interference waves and constantly changes in time, which is typical for dynamic problems.

First of all, it should be noted that most of the area behind the cutout (lower shelf) is not loaded for a long period of time (figure 2–4). The stress level in the "stagnant" zone is extremely low. The main bearing part of the I-beam structure is its wall. The intermediate values by the stress level are observed in the area located directly under the load (upper shelf). The lack of symmetry with respect to the midline

$x_1 = 50 \cdot h$  of the cutout can be explained by the different nature of the specified boundary conditions on the surfaces  $x_1 = 0$  and  $x_1 = 100 \cdot h$ .

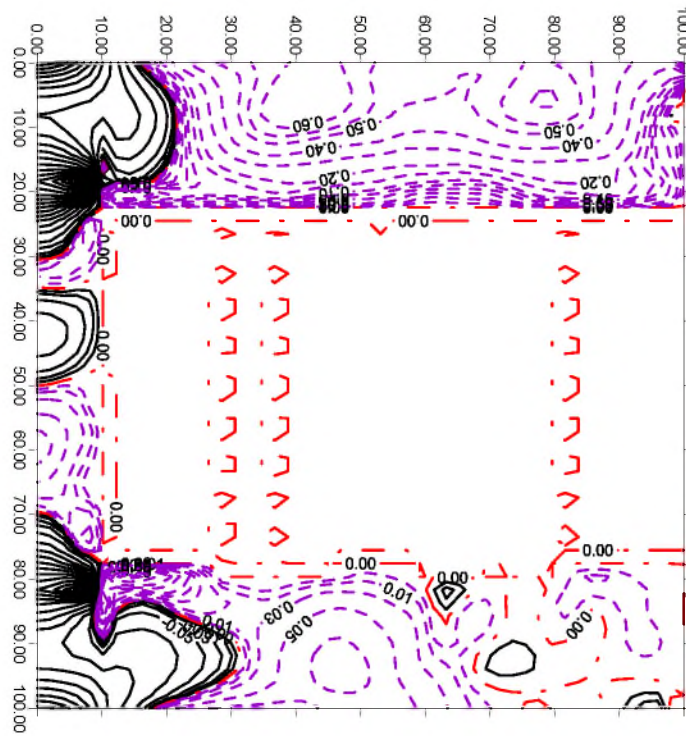


Figure 2 - Isolines of maximum stresses  $\sigma_1 = const$  at time  $t = 500 \cdot k$

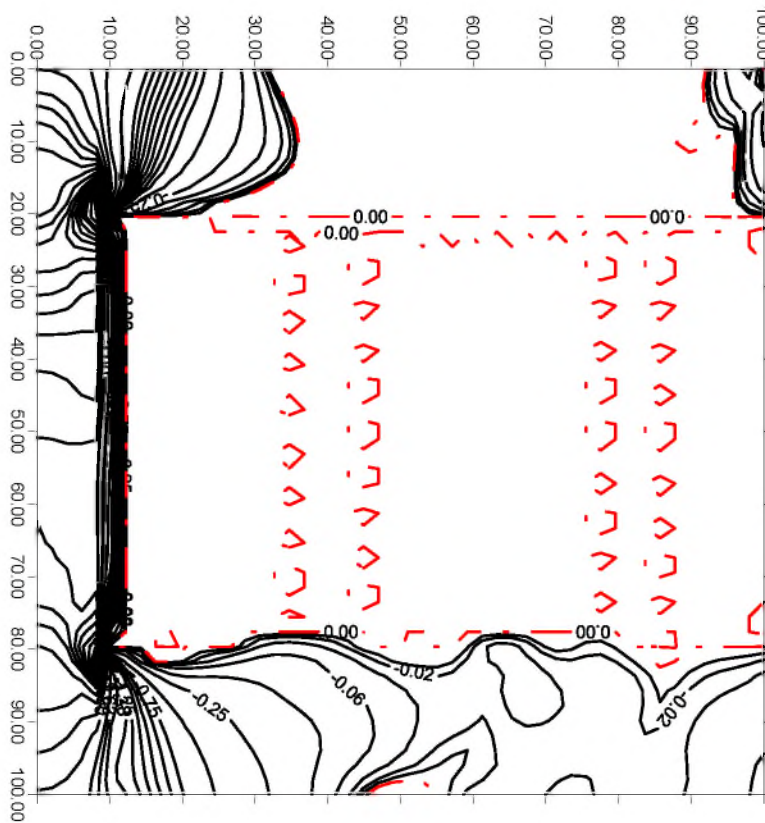


Figure 3 - Isolines of minimum stresses  $\sigma_2 = const$  at time  $t = 500 \cdot k$

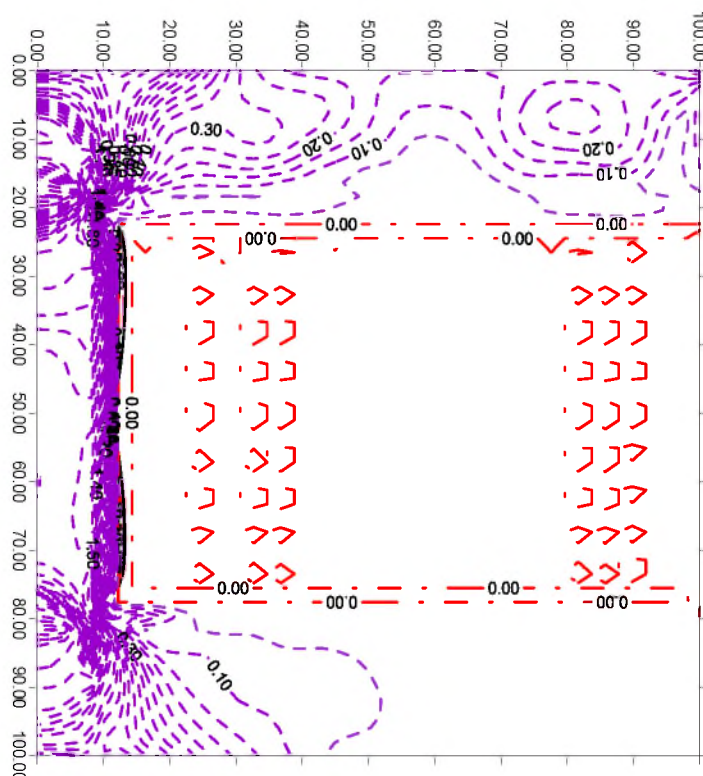


Figure 4 - Isolines of maximum tangential stresses  $\tau_{\max}$  at time  $t = 500 \cdot k$

The analysis of maximum stresses  $\sigma_1$  shows that in the I-beam design, six characteristic subregions can be distinguished (figure 2). At the time in question, in the subregions 1, 3 and 5 the maximum stresses  $\sigma_1$  are compressive, and in the subregions 2, 4 and 6 they are tensile. Moreover, each subregion is bordered by an isoline of zero stresses. The maximum compressive stress  $\sigma_1$  is achieved at some distance from the corner points  $(P, Q)$ , and the minimum compressive  $\sigma_2$  (figure 3) and maximum tangential stresses  $\tau_{\max}$  (figure 4) are at the corner points  $(P, Q)$ . The nature of the change in the main normal  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  and maximum tangential  $\tau_{\max}$  stresses in the region before the cutout is explained by the propagation of diffracted waves emanating from the corner points  $(P, D, R)$ .

The maximum values of the main normal  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  and maximum tangential  $\tau_{\max}$  stresses can be compared with their permissible limit values. This will evaluate the performance of this construction.

The developed mathematical model for solving plane dynamic problems of the theory of elasticity can be used to analyze the propagation of dynamic disturbances in a strip with a rectangular cross section of finite size and a cutout of complex geometric shape. In addition to the identified and discussed physical phenomena, the results obtained demonstrate the effectiveness of the developed computational algorithms.

**Н.Қ. Әшірбаев, Ж.Н. Әшірбаева, М.Т. Шоманбаева,  
Р.Б. Бекмолдаева, Т.С. Сұлтанбек, Ш.Е. Алтынбеков**

М.О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан

#### **СИММЕТРИЯЛЫ ОРНАЛАСҚАН ТЕСІКТЕРІ БАР ДЕНЕДЕГІ ТОЛҚЫНДЫ ӨРІС**

**Аннотация.** Бірқатар босансыту факторы (шекаралық шарттардағы үзіліс, тесік, қуыс, кесік, т.с.с.) негізінде конструкция элементтерінің динамикалық әрекетін болжаудың инженерлік тәжірибе сұраныстары арқылы анықталатын теориялық әрі қолданбалы мәні бар.

Құрылыста, машина жасауда және техниканың басқа да салаларында дайындау технологиясы немесе тасымалдау талаптарына байланысты болатын тесік, ойма (қырнау), ойық, шығыңқы жерлер, т.с.с. тегістікті бұзушылықтар байқалады. Мұндай тұтассыздық маңайында әдетте кернеу концентрациясы деп аталатын кернеулер мен деформациялардың жергілікті бұрмалау құбылысы пайда болады. Бұл эффектілер «орташа» кернеулерге айтарлықтай өзгерістер енгізеді және бүліну себебі ретінде аталады. Кернеу концентрациясының сапалық және сандық эффектілеріне концентратор геометриясы, әсер ету түрі, материалдың нақты



касиеттерімен байланысты әртүрлі себептер ықпал етеді. Сондықтан заманауи техникада кернеулер концентрациясы мәселесіне үлкен назар аударылуда, бұл отандық және шетелдік зерттеулердің, сондай-ақ арнайы монографиялар мен анықтамалық құралдардың көбісінде көрініс тапты. Мұндай облыстар үшін шекаралық мәселелерді шешу тиімді сандық әдістерді құрастырусыз мүмкін емес. Сондықтан тұтас ортадағы стационар емес толқынды қозғалысты зерттеу мәселелерінің ауыр центрі есептеу нәтижелерін жақсартуға мүмкіндік беретін айырымдық схемаларды жасау және жетілдіруге ығысып отыр. Алайда қазіргі уақытқа дейін сандық әдістер арқылы әртүрлі конфигурациялы біртегіз шектелген денелердегі динамикалық серпімділік теориясының шешілген мәселелері салыстырмалы түрде аз. Осылайша практикаға деген қажеттілік осы жұмыстың зерттеу пәніне айналып отырған тұтас орта динамикасының өзекті ғылыми және практикалық мәселелерінің шеңберін анықтайды.

Жұмыста мәселенің сызықтық қойылымында бүйір шекараларында симметриялы орналасқан тікбұрышты қимасы бар тікбұрышты облыста динамикалық ұйытқудың таралуы туралы есеп қарастырылады. Толқындық процесс сыртқы динамикалық жүктемені тікбұрышты облыстың беттік шекарасына қою арқылы туындайды, ал облыстың бүйір шекаралары кернеуден бос жатады. Тікбұрышты облыстың төменгі шекарасы қатты бекітілген. Тікбұрышты ойындының контуры кернеуден бос. Мәселе бүйір шекараларда тікбұрышты ойындысы симметриялы түрде орналасқан тікбұрышты облыстың ішінде құлап жатқан және  $t > 0$  уақыт моментінде бірнеше рет дифракцияланған серпімді толқындардың шебі арқасында туындаған кернеу мен жылдамдық өрісін анықтауға тіреледі.

Бүйір шекараларда тікбұрыш ойындысы симметриялы түрде орналасқан соңғы өлшемді тікбұрышты облыс үшін бастапқы және шекаралық шарттары берілген аралас есепті сандық әдіспен шешу үшін кеңістік сипаттамалар әдісіне негізделген айқын соңғы айырымдық схема құрылды. Ол бүкіл зерттеліп отырған облыс бөлінетін түйін нүктелерде жазылған биосипаттамалар бойындағы теңдеулер жүйесін интегралдау арқылы алынған ақырлы-айырымдық қатынастарға негізделген. Жұмыста тәуелді айнымалылар ретінде кернеудің орын ауыстыру жылдамдықтары мен тензор векторының компоненттері қабылданады, себебі кернеу мен орын ауыстыру жылдамдықтары механизмдерді зерттеу жағынан серпімді деформация кезіндегі динамикалық үдерістерді анықтайтын негізгі физикалық шамалар болып саналады. Есептің бұлайша қойылуы мұндай жүйелердің қазіргі кезде жеткілікті түрде терең және жан-жақты зерттелгендігінен, сонымен қатар орын ауыстыру жылдамдықтары мен кернеулерді таңдау кезінде шекаралық шарттардан туындылар ескерілмейтіндіктен таңдалды, ал бұл осы мәселені сандық әдіспен шешуде пайдалану үшін өте маңызды.

Тікбұрышты ойығы бар қарастырылып отырған дененің ерекшелігі тікбұрышты ойықтың бұрыштық нүктелерінде динамикалық мәселелер үшін «әдеттегі» функцияның тұтастығы бұзылады, яғни бұл нүктелерде қарастырылған функциялар мен олардың бірінші және екінші ретті туындылары бірінші текті үзіліске ұшырайды. Біз зерттеп отырған мәселеде осындай ерекше нүктелер үшін есептеу әдісі құрастырылмаған. Сондықтан олар тікбұрышты ойықтың кәдімгі бұрыштық нүктелері ретінде қарастырылады және осындай ерекше нүктелерде қарастырылған функцияларды табуға арналған шешуші теңдеулерді алуға арналған әдіс ұсынылып отыр. Шекаралық шарттар үзілісінің маңайындағы динамикалық кернеу концентрациясы зерттелді. Зерттеу нәтижелері сандық шешімге дейін келтірілді.

Зерттеу нәтижелері қатаң физикалық және математикалық негізді тірек етеді. Алынған нәтижелердің дәлелі шешімін табатын мәселенің қатаң математикалық тұжырымы мен белгілі сандық әдістерді қолдану, қажетті орнықты шарттарды орындау мен есептеу әдісінің орнықтылығын сандық әдіспен тексеру, сандық есептеу мен Рэль-Ламба есебінің аналитикалық шешімінің сәйкес келуі, алынған нәтижелердің қойылған есептің физикалық мазмұнымен сәйкес келуін тірек етеді.

Серпімділік теориясының жазық динамикалық есептерін шығаруға арналып құрастырылған математикалық модель арқылы өлшемді тікбұрышты көлденең қимасы және күрделі геометриялық формалы ойығы бар жолақтағы динамикалық ұйытқудың таралуын талдауда пайдаланылуы мүмкін. Алынған нәтижелер айқындалған және талқыланған физикалық құбылыстардан басқа құрастырылған есептеу алгоритмдерінің тиімділігін де көрсетеді.

**Түйін сөздер:** серпімді, жылдамдық, кернеу, күш, жазық деформация, толқын үдерісі, кернеу концентрациясы, сандық шешім.

**Н.К. Аширбаев, Ж.Н. Аширбаева, М.Т. Шоманбаева,  
Р.Б. Бекмолдаева, Т.С. Султанбек, Ш.Е. Алтынбеков**

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауэзова, Шымкент

### **ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПЛОСКОМ ТЕЛЕ С СИММЕТРИЧНО РАСПОЛОЖЕННЫМ ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ВЫРЕЗОМ**

**Аннотация.** Прогнозирование динамического поведения элементов конструкций с учетом ряда ослабляющих факторов (разрывы в граничных условиях, отверстия, полости, вырезы и т.д.) имеет не только теоретическое, но и прикладное значение, определяемое запросами инженерной практики.

Для большинства конструкций, применяемых в строительстве, машиностроении и других отраслях техники, характерно наличие различных нарушений сплошности в виде отверстий, выточек, пазов, выступов и т.п., обусловленных либо технологией изготовления, либо эксплуатационными требованиями. Возле таких несплошностей возникает, как известно, явление местного искажения напряжений и деформаций, называемое обычно концентрацией напряжений. Эти эффекты вносят существенное изменение в «средние» напряжения и нередко являются причиной разрушения. На качественные и количественные эффекты концентрации напряжений влияют разнообразные причины, связанные с геометрией концентратора, видом воздействия, реальными свойствами материала. Поэтому проблеме концентраций напряжений уделяется в современной технике огромное внимание, что нашло отражение в практически необозримом количестве отечественных и зарубежных исследований, а также специальных монографиях и справочных руководствах. Решение краевых задач для таких областей невозможно без разработки эффективных численных методов. Поэтому центр тяжести проблемы исследования нестационарных волновых движений в сплошных средах все больше смещается в сторону разработки и совершенствования разностных схем, позволяющих улучшать результаты расчетов. Однако до настоящего времени сравнительно мало решенных задач динамической теории упругости в ограниченных телах с неоднородностями различной конфигурации с использованием численных методов.

Таким образом, потребности практики определяют круг актуальных научных и практических задач динамики сплошной среды, которые стали предметом исследования настоящей работы.

В работе в линейной постановке рассматривается задача о распространении динамических возмущений в прямоугольной области конечных размеров с симметрично-расположенным прямоугольным вырезом на боковых границах. Волновой процесс вызывается прикладыванием внешней динамической нагрузки на лицевой границе прямоугольной области, а боковые границы области свободны от напряжений. Нижняя граница прямоугольной области жестко закреплена. Контур прямоугольного выреза свободен от напряжений. Задача заключается в определении внутри прямоугольной области с симметрично-расположенным прямоугольным вырезом на боковых границах полей напряжений и скоростей, вызванных фронтами падающих и многократно дифрагированных упругих волн в момент времени  $t > 0$ .

Для численного решения смешанной задачи с начальными и граничными условиями для прямоугольной области конечных размеров с симметрично-расположенным прямоугольным вырезом на боковых границах построена явная конечно-разностная схема, основанная на методе пространственных характеристик. Он основан на конечно – разностных соотношениях, полученных интегрированием системы уравнений вдоль бихарактеристик и записанных в узловых точках, на которые разбивается вся исследуемая область. В работе в качестве независимых переменных принимаются компоненты вектора скоростей перемещений и тензора напряжений, поскольку напряжения и скорости перемещений являются основными физическими величинами, представляющими интерес с точки зрения изучения механизмов, определяющих динамические процессы при упругом деформировании. Эта постановка выбрана потому, что такие системы изучены в настоящее время достаточно глубоко и основательно и, кроме того, при выборе скоростей перемещений и напряжений в качестве основных переменных, исключаются производные из граничных условий, что чрезвычайно важно при использовании численных методов решения задачи.

Особенностью рассмотренного тела с прямоугольным вырезом является то, что в угловых точках прямоугольного выреза нарушается «привычная» для динамических задач гладкость функций, т.е. в этих точках искомые функции и их первые и вторые производные терпят разрыв первого рода. Для таких особых точек, которые имеют место в исследуемой нами задаче, метод расчета не разработан. Поэтому они рассматриваются как обычные угловые точки прямоугольного выреза. Был предложен метод получения разрешающих уравнений для нахождения искомых функций в этих особых точках. Исследована концентрация динамических напряжений в окрестности разрыва граничных условий. Результаты исследования доведены до численного решения.

Результаты исследований базируются на строгих физических и математических основах. Достоверность полученных результатов обусловлена строгой математической формулировкой решаемой задачи и применением известных численных методов решения, выполнением необходимых условий устойчивости и численной проверкой устойчивости метода расчета, совпадением результатов численных расчетов с результатами точного аналитического решения задачи Рэлея – Ламба, соответствием полученных результатов физическому содержанию поставленной задачи.

Разработанная математическая модель решения плоских динамических задач теории упругости может быть использована для анализа распространения динамических возмущений в полосе с прямоугольным поперечным сечением конечного размера и вырезом сложной геометрической формы. Кроме выявленных и обсужденных физических явлений, полученные результаты демонстрируют эффективность разработанных расчетных алгоритмов.

**Ключевые слова:** упругость, скорость, напряжение, нагрузка, плоская деформация, волновой процесс, концентрация напряжений, численное решение.



**Information about authors:**

Ashirbayev Nurgali Kudiyarovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, M.O. Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent. ank\_56@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0001-8566-097X>;

Ashirbayeva Zhansaya Nurgaliyevna, candidate of pedagogical sciences, associate professor, M.O. Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent. saya\_270681@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0003-0058-5793>;

Shomanbayeva Manat Torgayevna, cand. phys.-math. sc., associate professor, M.O. Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent. mtshomanbaeva@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0002-2325-9053>;

Altynbekov Shadiyar Erkinovich, master, senior lecturer, M.O. Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent. altynbekov\_shadiar@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0002-5531-8652>;

Bekmoldayeva Raina Baykenovna, candidate of pedagogical sciences, associate professor of the department "Mathematics" of the M. Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent. raina\_b@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0002-0608-6613>;

Sultanbek Turlybek Synabayouly, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the department "Mathematics" of the M. Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent. sul-55@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0782-7337>

**REFERENCES**

[1] Frishter L.Yu. On the possibilities of investigate by the method of photoelasticity the stress concentration in the zone of a sharp change in the shape of the structure // Transactions of the International Scientific and Practical Conference "Engineering Systems-2011". M.: RUDN. 2011. P. 3–9. (in Russian).

[2] Gorbachev V.I., Gadiev R.R. Stress concentration in elastic bodies with multiple concentrators // Vestnik MGU, a series of Mathematics. Mechanics. 2014. No. 6. P.46–50. (in Russian).

[3] Kukujanov K.V., Levitin A.L. Deformation processes of an elastoplastic material with defects under electrodynamic loading // Bulletin of PNIPU. Mechanics. 2015. No. 1. P.106–120. DOI: 10.15593 / perm.mech / 2015.1.07. (in Russian).

[4] Dan Sun, Song-Nan Luo The wave propagation and dynamic response of rectangular functionally graded material plates with completed clamped supports under impulse load original Research Article // European Journal of Mechanics-A/Solids. 2015. Vol.30, №3. P.396–408.

[5] Ashirbayev N., Ashirbayeva Zh., Sarsenova G., Bekmoldayeva R., Nurmaganbetova Zh., Duisebayeva P. Investigation of Wave Processes in a Rectangular Region with Discontinuous Boundary Conditions // ISSN 1392–1207. *Mechanika*, 2018, Volume 24(5), p. 680–684.

[6] Ashirbayev N., Dasibekov A., Abzhapbarov A., Shomanbayeva M.T. Initial values of pores' pressure and stress in the problems of soil consolidation. // Bulletin of the Karaganda university. Series Mathematics. 2019. Vol.95, No. 3. P. 101–108.

[7] Erzhanozh Zh. S., Karimbayev T. D., Bayteliyev T. B. The Stress Waves in Homogeneous and Heterogeneous Environments. Almaty: Gylym, 1998. P.171.

[8] Massanov Zh. K., Baimakhan R. B., Kozhabekov Zh. T., Tugelbayeva G.K., Madaliyev T. B., Abdraimov E. S. Wave spreading in resilient viscous-plastic layer with cavity on the rigid base. NEWS of the Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of Geology and Technical Sciences. Vol.1. Number 439 (2020), PP. 56–64. ISSN 2224-5278. <https://doi.org/10.32014/2020.2518-170X.7>

[9] Seitmuratov A., Dauitbayeva A., Berkimbaev K.M., Turlugulova K.N., Tulegenova E. Constructed two-parameter structurally stable maps. NEWS of the Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of Geology and Technical Sciences. Volume 6, Number 438 (2019), PP.302–307. ISSN 2224-5278 <https://doi.org/10.32014/2019.2518-170X.182>

[10] Nurimbetov A.U., Orynbayev S.A., Junisbekov M.Sh., Omarov Zh.T. Numerical solution stressed defressed condition of multilayer composition blades in the field of centrifugal forces. NEWS of the Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of Geology and Technical Sciences. Volume 5, Number 437 (2019), PP. 60–73. ISSN 2224-5278. <https://doi.org/10.32014/2019.2518-170X.126>

[11] Bukenov M.M., Adamov A.A., Mukhametov Y.M. Two-dimensional thermo-viscoelastic waves in layered media // Bulletin of the Karaganda university. Series Mathematics. 2019. Vol. 94, No. 2. P. 106–114.

[12] Mamayev Sh.M., Borasheva N.T. Numerical analysis of dynamic disturbances in the composite rods grid-characteristic method // Proceedings of National Academy of Sciences of Kazakhstan. 2015. No.3(301). P.145–154.

[13] Gavrilov S.N., Herman G.C. Wave propagation in a semi-infinite heteromodular elastic bar subjected to a harmonic loading // J. Sound and Vibr. 2012. 331 c. № 20. P.4464–4480.

[14] Kochoev A.L., Brazhe R.A. Mathematical modeling of elastic wave propagation in crystals: 3d-wave surfaces // *Acta mechanica*, 2011. Vol. 222 № 1-2. P.193–198.

[15] Parvanova S., Dineva P., Manolis George D. Elastic wave fields in a half-plane with free-surface relief, tunnels and multiple buried inclusions // *Acta Mechanica*. 2014. Vol.225. P.1843–1865.

[16] Lys E.V., Romenski E.I., Cheverda V. A., Epov M. I. Interaction of seismic waves with zones of concentration of initial stresses // *Doklady Earth Sciences*. 2013. Vol.449 (2). P. 402–405.

[17] Lesan D., Scalia A. On the deformation of orthotropic Cosserat elastic cylinders // *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2011. Vol. 16(2). P.177–199.

[18] Israilov M.Sh. Reduction of Boundary Value Problems of Dynamic Elasticity to Scalar Problems for Wave Potentials in Curvilinear Coordinates // *Mechanics of Solids*. 2014. Vol.46, №1. P.104–108.

[19] Yi-chao Chen. On the dynamic behavior of a class of Cauchy elastic materials // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2016. Vol. 16 (5). P.563–569.