NEWS
OF THENATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X **https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.71**
Volume 4, Number 332 (2020), 103 – 113

UDC 517.929.4
MRNTI 27.29.17, 27.29.23

K.B. Bapaev[1], G.K. Vassilina[1,2], S.S. Slamzhanova[3]

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan;
[2]Almaty University of Energy and Communications, Almaty, Kazakhstan;
[3]Zhetysu State University named after I. Zhansugurov, Taldykorgan, Kazakhstan.
E-mail: bapaev41@bk.ru, v_gulmira@mail.ru, beksultan.82e@mail.ru

ON COMPRESSIBILITY AREA OF UNSTABLE DIFFERENCE-DYNAMIC SYSTEMS AND DETERMINATED CHAOS

Abstract. In this paper saddle-point bifurcation is studied. It is shown that as a result of bifurcation or collision of stable and unstable points, they leave the area. In other words, they go into chaos, i.e. in a state of disorder. Here the normalization method is used to identify the bifurcation point. Unstable in the sense of Lyapunov difference-dynamic systems are considered.

In the first part of the paper, the transformation of linear systems in instability case is given. A linear system with a diagonal matrix is considered. It is shown that in a neighborhood of zero this system is not reduced to a special form with the help of non-degenerate transformations. It is proved that for non-degenerate transformations the trajectories of a system of a special form from a neighborhood of the origin cannot be displayed in the trajectory of solutions of a given linear system. Thus, the topology of the neighborhood of the zero point of a system of a special form does not transform into the topology of a given system in a neighborhood of zero. The causes of the contradiction obtained by applying this method are shown.

In the second part, analytic difference-dynamical systems and analytic homeomorphisms are considered. Also compressive difference-dynamical systems are investigated. The concept of ω-compressing difference-dynamical systems is given. It is shown to which system the ω-compressing difference-dynamical systems are isomorphic.

Key Words: difference-dynamic system**,** bifurcation, stability, homeomorphism, chaos.

Introduction. The word "chaos" comes from the Greek. Initially, it meant an infinite space that existed before the appearance of everything else. Later, the Romans interpreted chaos as the original raw formless mass, into which the creator brought order and harmony. In the modern sense, chaos means a state of disorder and an irregularity of physical processes, which is called hydrodynamic and plasma turbulence.

The theory of turbulence, it would seem, should be completely based on classical macroscopic equations: Navier-Stokes equations, equations of gas dynamics, etc. However, it is not yet possible to derive the main characteristics of turbulent motion from macroscopic equations and we have to resort to additional considerations.

Until recently, the Landau hypothesis reigned supreme in the theory of the appearance of turbulence [1,2]. This theory he expressed in 1944. Similar considerations were put forward by Hopf [3] in 1948.

Landau's theory connects the emergence of turbulence with instability. This is certainly true, but how Landau's theory does this will require substantial refinement. Landau's theory indicates only one of the possible variants of the appearance of turbulence and, apparently, is far from the most important. The modern theory of bifurcations offers many other ways [3-10].

These are new ways of randomization and stochatization of fluid motion, different from those indicated by Landau.

According to Landau, the occurrence of turbulence occurs as a result of a sequential series of stability loss by the equilibrium state, by the periodic motion, by the bipolar motion and etc., as a result of which the motion becomes multi-periodic:

$$V(t)=f(w_0t,w_1t,\ldots,w_nt),$$

here $w_0,w_1,\ldots,w_n$ are the frequencies. The function $f(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)$ as a function of variables $\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n$ is periodic for each of them with the period 2π . Ruelle and Tuckens [10] drew attention to the fact that the path indicated by Landau is not common, that the common possibility is the formation of a strange attractor [7]. But how a strange attractor arises, they have not investigated.

Statements by Yu.I. Neymark [11] on turbulence is the result of his study of homoclinic structures discovered by A. Poincare [12].

In the description of turbulence, against the background of chaos theory, one result stands out in a special way. This is a period doubling cascade discovered by the Los Alamos physicist Mitchell Feigenbaum [6,7].

One interesting aspect of the cascade of period doubling or fork-shaped bifurcation (Feigenbaum scenario) is that when you notice it during an experiment, you will not confuse it with anything else. In addition, it is known that chaos exists beyond the cascade. Therefore, the observation of the Feigenbaum cascade in hydrodynamics is particularly convincing evidence that modes must yield to chaos.

In this paper, we study bifurcation of the “saddle point” type. And the result of a collision (bifurcation) of stable and unstable fixed points is showed, as a result of which both disappear (leave the region) i.e. this point go into chaos. The use of the normalization method to identify the bifurcation point is used for the first time for difference-dynamic systems unstable in the sense of Lyapunov [13-15].

I Transformation of linear systems in instability case

Inability to make a special appearance. Consider the linear system

$$x_{n+1}=Ax_n,\ \left(x_n=x_n^1,\ldots,x_n^m\in R^m\right).$$

Without loss of generality, we can consider diagonal matrix A and restrict ourselves to the equation for one component:

$$x_{n+1}=\lambda x_n,\ x_n\in R^1,\quad |\lambda|>1. \tag{1.1}$$

Using analytic mappings in a neighborhood of point $x=0$ [4]

$$x=y+\sum_{k=2}^{\infty}a_ky^2\equiv\varphi(y);\quad y=x+\sum_{k=2}\alpha_kx^k\equiv\varphi^{-1}(x) \tag{1.2}$$

we transform (1.1) to the following form

$$y_{n+1}=\lambda y_n-ay_n^2. \tag{1.3}$$

We calculate the coefficients α_k of the inverse transformation $\varphi^{-1}(x)$:

$$y=\sum_0^{\infty}y^xa_k+\alpha_2\left(\sum_0^{\infty}y^xa_k\right)^2+\alpha_3\left(\sum_0^{\infty}y^xa_k\right)^3+\ldots=y+\left(a_2+\alpha_2\right)y^2+$$
$$+\left(a_3+2a_2\alpha_2+\alpha_3\right)y^3+\left(a_4+3a_2\alpha_3+\alpha_2\left(a_2^2+2a_3\right)+\alpha_4\right)y^4+\ldots;$$
$$\alpha_2=-a_2;\ \alpha_3=2a_2^2-a_3;\alpha_4=-a_4-a_2\left(a_2^2+2a_3\right)+3a_2\left(a_3-2a_2^2\right)_m,\ldots$$

From (1.3) we find $(a_2\equiv a)$

$$y_{n+1}=\lambda y_n-a\lambda(\lambda-1)y_n^2+\left(a_3\lambda-2a^2\lambda^2+2\lambda^3a^2-\lambda^3a_3\right)y_n^3+\ldots,$$
$$a_3\lambda-2a^2\lambda^2+2\lambda^3a^2-\lambda^3a_3=0.$$

Therefore if $a_k \neq 0$ then (1.1) can be reduced to (1.3). If mappings (1.2) are non-degenerate in the neighborhood of a point $x = 0$, then a unique trajectory $\{x_n\}$of equation (1.1) corresponds to any trajectory $\{y_n\}$ of equation (1.3) and vice versa.

Consider the trajectory $\{y_n\} \in (1.3)$, $y_0 = \frac{\lambda}{a}$

$$y_1 = y_0(\lambda - ay_0) = 0,\ y_k = 0,\ k \geq 1.$$

Then $x_0 = \varphi(y_0) \neq 0$, $x_1 = \lambda\varphi(y_0) = \varphi(y_1) = \varphi(0) = 0$. This is impossible.

Let $\{y_n\} \in (1.3)$ be such that $\mu_0 \leq |y_n| \leq \mu_1 n$. Then $x_0 = \varphi(y_0) \neq 0$, $x_2 = \lambda\varphi(y_0), \ldots, x_{n+1} = \lambda^n\varphi(y_0)$. i.e. $x_n \to \infty$ takes place for $n \to \infty$.

Theorem 1. For non-degenerate transformations (2) trajectories $\{y_n\} \in (1.3)$ from the neighborhood $y = 0$ cannot be displayed in the trajectory $\{x_n\} \in (1)$ the neighborhood $x = 0$.

Thus, the topology of the neighborhood of $y = 0$ of the system (1.3) does not transform into the topology of the system (1) in the neighborhood $x = 0$.

The neighborhood $y = 0$ of system (1.3) is very interesting:

$$|\lambda - ay_n| < 1; \left.\begin{matrix} 0 \leq \lambda - ay_n < 1 \\ 0 \leq ay_n - \lambda < 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{stability zones;}$$

$$|\lambda - ay_n| > 1; \left.\begin{matrix} \lambda - ay_n > 1 \\ ay_n - \lambda > 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{instability zones.}$$

$t_1 = \frac{\lambda - 1}{a}$, $t_2 = \frac{\lambda}{a}$, $t_3 = \frac{\lambda + 1}{a}$ are singular points of the system (1.3). As shown above, if the trajectory $\{y_n\} \in (1.3)$ falls for some "n" at a neutral singular point $t_2 = \frac{\lambda}{a}$ i.e. $t_n = \frac{\lambda}{a}$, then this trajectory goes to the point $y_n = 0 : \left\{ y_n = \frac{\lambda}{a},\ y_{n+k} = 0, k \geq 1 \right\}$. There are no such trajectories in system (1.1).

Let's consider a more general case: let (1) be converted to

$$y_{n+1} = \left(\lambda - ay_n^{2p}\right)y_n; z_{n+1} = \left(\lambda - az_n\right)^{2p} z_n\ ; |y_n|^{2p} = z_n. \tag{1.4}$$

Let the transformation $x = \varphi(z)$ (1.2) transform the neighborhood $z = 0$ into a neighborhood $x = 0$ one-to-one.

Then in particular the trajectory $\{z_n \in (4)\}$; $z_0 = \frac{\lambda}{a}$; $z_k = 0, k \geq 1$ goes into the trajectory $x_0 = \phi\left(\frac{\lambda}{a}\right) \neq 0, x_1 = \lambda\phi\left(\frac{\lambda}{a}\right) = \phi(y_1) = \phi(0) = 0.$ But it is impossible.

Similarly with the trajectories $\mu_0 \leq z_n \leq \mu_1 \forall n$ we have $x_0 = \phi(z_0) \neq 0, x_{n+1} = \lambda^n\phi(z_0), n > 1.$ Since $\lambda > 1$ it is followed $x_n \to \infty$ for $n \to \infty$. And in this case, Theorem 1 holds.

Thus, system (1.1) in a neighborhood of a point $x = 0$ cannot be reduced to the form (1.3) or (1.4) using non-degenerate transformations (1.2).

So, the following contradiction has been obtained: on the one hand, formally (1.1) can be reduced to (1.3) (in the general case, (1.4)) by transformation (1.2), on the other hand, according to statement (1.1), this is impossible.

The reasons for the contradiction. Since we are talking about the transformation of a neighborhood of a point $x = 0$ into a neighborhood $y = 0$ (in the general case $z = 0$), it suffices to consider the transformation

$$x = y + ay^2 \equiv \phi(y);\ y = \frac{1}{2a}\left(\sqrt{1+4ax} - 1\right) \equiv \phi^{-1}(x);\ |ax| \le 1, \tag{1.5}$$

where from $y = x - ax^2 + 2a^3x^3 + \alpha_4 a^3 x^4 + \ldots \equiv \varphi^{-1}(x)$.

Moreover, (1) is reduced to the form

$$y_{n+1} \equiv \gamma_1 y_n + \sum_{k=3}^{\infty} \gamma_k (a\lambda)^{k-1} y_n^k;\ \gamma_1 = \lambda - \lambda(\lambda - 1)ay_n \tag{1.6}$$

For the map (1.6) to be contracting in a neighborhood $y = 0$, it is necessary that for

$$y_{n+1} \equiv \gamma_1 y_n + \sum_{k=3}^{\infty} \gamma_k (a\lambda)^{k-1} y_n^k;\ \gamma_1 = \lambda - \lambda(\lambda - 1)ay_n$$

inequalities

$$\omega : ay_n > 0,\quad |\gamma_1| = \lambda\left|1 - (\lambda - 1)|ay_n|\right| < 1 \tag{1.7}$$

take place.

Moreover, by virtue of $|y_n| < 1$ the terms in (1.6) should be small in comparison with $\{\gamma_1 y_n\}$.

On the other hand, by virtue of (1.7), we have

a) $0 \le \lambda - \lambda(\lambda - 1)|ay_n| < 1$;

b) $0 \le \lambda - \lambda(\lambda - 1)|ay_n| - \lambda < 1$.

Hence we have

a) $\{\gamma_1 y_n\}$;

b) $\lambda|ay_n| \ge \dfrac{\lambda}{\lambda - 1} > 1$, т.е. $(\lambda|ay_n|)^k > 1,\ \forall k \ge 3$.

But then in (1.6) $|\gamma_k|(|\lambda a y_n|)^{k-1}|y_n| > |\gamma_k||y_n|$ takes place, i.e. all terms in expansion (1.6) are comparable with the first term $(\gamma_1 y_n)$.

Direct study of the mapping (5). Based on (5), system (1) is transformed to

$$y_{n+1} = \frac{1}{2a}\left(\sqrt{1 + \Delta_n} - 1\right),\ \Delta_n = 4\lambda\left[ay_n + a^2 y_n^2\right]. \tag{1.8}$$

Let us find out when the map (1.8) is contracting in a neighborhood $y = 0$, i.e. inequality

$$|y_{n+1}| = \frac{1}{2|a|}\left|\sqrt{1 + \Delta_n} - 1\right| < \gamma|y_n|,\quad y_n \in \omega, \forall n >> 1 \tag{1.9}$$

holds. Let's consider all possible options:

(i) If $ay_n > 0$ then $\Delta_n \ge 0$. We will refine the estimate in (i):

$$|y_{n+1}| = \frac{2\lambda|y_n|(1 + |ay_n|)}{1 + \sqrt{1 + \Delta_n}} < \gamma|y_n|, \gamma < 1.$$

From this inequality we find

$$2\lambda(1 + z) < \gamma\left(1 + \sqrt{1 + \Delta_n}\right),\quad \Delta_n = 4\lambda(z + z^2),\quad z = |ay_n|.\ (*)$$

Take $\alpha = \frac{2\lambda}{\gamma} - 1 = \frac{2\lambda - \gamma}{\gamma} > \frac{2\lambda - \lambda}{\gamma} = \frac{\lambda}{\gamma} > 1, a > 1$. Inequality (*) takes the form

$$(\alpha + 2\lambda z) < 1 + 4\lambda(z + z^2), \quad (\alpha^2 - 1) + 4\lambda z(\alpha - 1) + 4\lambda z^2(\lambda - 1) < 0.$$

It is impossible for $\alpha = \frac{2\lambda}{\gamma} - 1 = \frac{2\lambda - \gamma}{\gamma} > \frac{2\lambda - \lambda}{\gamma} = \frac{\lambda}{\gamma} > 1, a > 1$, i.e.

$$|y_{n+1}| = \frac{1}{2|a|}\frac{|\Delta_n|}{1 + \sqrt{1 + \Delta_n}} < \lambda(|y_n| + |a|y_n^2) < \gamma|y_n|, \quad \gamma < 1$$

impossible since $\lambda > 1$.

(ii) $ay_n < 0$, $\Delta_n > 0$. Then $ay_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + |\Delta_n|} - 1) > 0, \Delta_n > 0$, which by virtue of (i) is impossible.

(iii) $ay_n < 0$, $\Delta_n > 0$ (but certainly $1 + \Delta_n \geq 0$). Then

$$|y_{n+1}| = \frac{1}{2|a|}\left|\sqrt{1 + |\Delta_n|} - 1\right| = \frac{|\Delta_n|}{2|a|\left(1 + \sqrt{1 - |\Delta_n|}\right)} < \gamma|y_n|.$$

From the latter for $y_n \neq 0$ we have

$$\frac{|y_{n+1}|}{|y_n|} \equiv \frac{2\lambda(1 - |ay_n|)}{1 + \sqrt{1 - |\Delta_n|}} < \gamma < 1, \text{ i.e. } \lambda(1 - |ay_n|) \leq \frac{|y_{n+1}|}{|y_n|} < \gamma < 1.$$

Thus $|y_n| \geq \alpha_0 = \frac{1}{|a|}\left(1 - \frac{\gamma}{\lambda}\right) > 0, \quad \forall n >> 1,$ which contradicts the compressibility of the map.

Theorem 2. The map (1.8) is not compressive in a neighborhood $y = 0$.

II Analytic difference-dynamical systems and analytic homeomorphisms

Isomorphisms of difference-dynamical systems. Consider difference-dynamical systems on R^1

$$x_{n+1} = \lambda z_n + X(x_n); \quad X(x_n) = \sum_{k=b}^{\infty} b_k x^k, \tag{2.1}$$

Here the function $X(x_n)$ is analytic in a neighborhood of $x = 0$. We apply to (2.1) the analytic homeomorphism $x = \varphi(y)$ of a neighborhood of a point $y = 0$ [4]

$$x = \varphi(y) \equiv y + \Phi(y); \quad \Phi = \sum_{k=z}^{\infty} a_k y^k \tag{2.2}$$

$$y = \varphi^{-1}(y) \equiv x + \Psi(x); \quad \Psi(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k x^k,$$

Here $\Phi(y)$ and $\Psi(x)$ are respectively analytic in the neighborhoods of $y = 0$ and of $x = 0$. The coefficients a_k of expansion $\Psi(x)$ are uniquely determined through a_k of $\Phi(y)$.

In the new variables, system (1) takes the form

$$y_{n+1} = \lambda y_n + \chi(y_n); \quad \chi(y) = \sum_{k=2}^{\infty} \beta_k y^k \tag{2.3}$$

Here $\chi(y)$ is analytic in a neighborhood of $y = 0$ and its coefficients β_k are uniquely determined in terms b_k of (1) and a_k of (2).

Systems (2.1) and (2.3) are called isomorphic with respect to the analytic homeomorphism (2.2) or simply isomorphic.

ω **- compressive *difference-dynamical systems.*** System (2.1) is called ω-compressive if there exists a set $\omega \subset M : |x| < \varepsilon$ on which (1) is a compressive manifold

$$|x_{n+1}| \le \gamma |x_n|, \quad 0 < \gamma < 1; \quad x_n \in \omega, \quad \forall n >> 1. \tag{2.4}$$

Obviously, for $|\lambda| < 1$ (stable case) system (2.1) is compressive in a neighborhood $M : |x| < \varepsilon$, i.e. $\omega = M = \{x |x| < \varepsilon\}$.

Let 's highlight the next non-trivial class of unstable difference-dynamical systems ($|\lambda| > 1$)

$$x_{n+1} = (\lambda - a x_n^q) x_n + X(x_n); \quad X = x_n^{q+2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x_n^k, \quad q \ge 1. \tag{2.5}$$

In the neighborhood $M : |x| < \varepsilon$ we introduce the set

$$\omega = \{x / |\lambda - a x^q| < 1, |x| < \varepsilon\}. \tag{2.6}$$

Obviously, in the unstable case ($|\lambda| > 1$), the set ω does not contain a point $x = 0$, and system (5) is ω-compressive if $\omega \ne \phi$.

Let for definiteness $\lambda > 0$, then $|\lambda - a x^q| < 1$:

a) $0 \le \lambda - a x^q < 1$;

в) $0 \le a x^q - \lambda < 1$.

Let's put $p \equiv \left(\frac{\lambda}{|a|}\right)^{\frac{1}{q}}$, $\underline{p} \equiv \left(\frac{\lambda - 1}{|a|}\right)^{\frac{1}{q}}$, $p \equiv \left(\frac{\lambda + 1}{|a|}\right)^{\frac{1}{q}}$. If the condition

$$p \equiv \left(\frac{\lambda}{|a|}\right)^{\frac{1}{q}} < \varepsilon \tag{2.7}$$

is satisfied then

$$\omega = \underline{\omega} = \left\{ x / 0 < \underline{p} = \left(\frac{\lambda - 1}{|a|}\right)^{\frac{1}{q}} \le |x| \le p \equiv \left(\frac{\lambda}{|a|}\right)^{\frac{1}{q}} \equiv \overline{p} < \varepsilon \right\}, \text{ here } \underline{\omega} = \phi.$$

If the stronger condition

$$\overline{p} = \left(\frac{\lambda - 1}{|a|}\right)^{\frac{1}{q}} < \varepsilon \tag{2.8}$$

is satisfied then $\omega = \underline{\omega} U \overline{\omega}, \quad \overline{\omega} = \{x / p \le |x| \le \overline{p} < \varepsilon\} \ne \phi$.

Thus, when one of the conditions (2.7) or (2.8) is fulfilled, the difference-dynamical system (5) is ω-compressive.

In part I it is proved that (5) is not an isomorphic to the linear system (1) in $(X(x) \equiv 0)$.

Theorem 3. If the difference-dynamical system (2.5) is ω-compressive, then it is isomorphic to the system

$$y_{n+1} = (\lambda - a y_n^p) y_n, \forall p \ge 1. \tag{2.9}$$

Consider the general case of system (1) for $x_n \in R^m, m \ge 1$.

The proof is carried out in two stages. I. We prove first that (2.5) can be reduced to (2.9). For any fixed q (in this case $b \equiv a$) we apply sequentially the transformations

$$x = y + \gamma_i y^{q+i} \equiv \varphi_i(y), \quad i \geq 2 \quad (2.10)$$

We start for $i = 2$ and calculate the inverse transformation

$$y \equiv \phi_2^{-1}(x) = x + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k = \left(y + \gamma_2 y^{q+2}\right) + \alpha_z \left(y + \gamma_2 y^{q+}\right)^2 + \ldots =$$

$$= y + \alpha_2 y^2 + \ldots + \alpha_{q+1} y^{q+1} + \left(\gamma_2 + \alpha_{q+2}\right) y^{q+2} + \ldots.$$

From here we find $\alpha_k = 0,\ k = 2, q+1;\ \alpha_{q+2} = -\gamma_2$. Substituting the transformations $\varphi_2(y)$ and $\varphi_2^{-1}(x)$ to (5), we get

$$y_{n+1} = x_{n+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_{n+1}^k = \lambda x_n - a x_n^{q+2} + X_*(x_n)^3 -$$

$$-\gamma_2 \left(\lambda x_n - a x_n^{q+1} + X(x_n)\right)^{q+2} = \lambda x_n - a x_n^{q+1} + \left(b_0 - \lambda^{q+2}\gamma_2\right) x_n^{q+2} + x_n^{q+3} X^*(x_n),$$

here $X^*(x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^* x_n^k, \quad X_*(x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{k*} x_n^k.$

So

$$y_{n+1} = \lambda\left(y_n + \gamma_2 y_n^{q+2}\right) - a\left(y_n + \gamma_2 y_n^{q+2}\right)^{q+1} + \left(b_0 - \lambda^{q+2}\gamma_2\right)\left(y_n + \gamma_2 y_n^{q+2}\right)^{q+2} +$$

$$+ y_n^{q+3} Y(y_n) = \lambda y_n - a y_n^{q+1} + \left(b_0 + \gamma_2\left(\lambda - \lambda^{q+2}\right)\right) y_n^{q+2} + y_n^{q+3} Y(y_n).$$

Assuming $\gamma_2 = -\left(\lambda - \lambda^{q+2}\right)^{-1} b_0$ we get to the difference-dynamical system (2.5):

$$y_{n+1} = \left(\lambda - a y_n^q\right) y_n + y_n^{q+3} Y(y_n); \quad Y = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k y_n^k .$$

Applying the transformation (10) $y = z + \gamma_3 z^{q+3} \equiv \phi_3(z)$ for $i = 3$ to the last difference-dynamical system, we obtain

$$z_{n+1} = \left(\lambda - a z_n^q\right) z_n + z_n^{q+4} Z(z_n)$$

and i.e. As usual, using Newton's method the convergence of this infinite process of "destroying" decomposition members in (2.5) is proved. Note that $Y(y_n)$ do not enter the growing degrees of the "large" parameter $|a| >> 1$.

We show that the system

$$x_{n+1} = \left(\lambda - a x_n^q\right) x_n; \quad \omega(x) \neq \phi, \quad \omega = \left\{x \middle| \left|\lambda - a x^q\right| < 1, |x| < \varepsilon\right\} \quad (2.11)$$

reduced to the following system

$$y_{n+1} = \left(\lambda - b y_n^q\right) y_n + y_n^{q+3} Y(y_n); \quad \omega(y) \neq \phi \quad (2.12)$$

using conversion

$$x = y + \gamma_1 y^{q+1} + \gamma_2 y^{q+2} \equiv \varphi(y).$$

Note that for existence $\varphi^{-1}(x)$ the neighborhood of a point $y = 0$ must be so small as to $\left|\gamma_1 y^{q+1} + \gamma_2 y^{q+2}\right| \leq |y| \mu$.

Consider the inverse transformation $y = x + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k x^k \equiv \varphi^{-1}(x)$. As before, we make sure that $\widetilde{\alpha}_k = 0, \quad k = \overline{2, q}$. Then

$$\phi^{-1}(x) = y = x + \alpha_1 x^{q+1} + \alpha_2 x^{q+2} + \alpha_3 x^{q+3} + \ldots = \left(y + \gamma_1 y^{q+1} + \gamma_2 y^{q+2}\right) +$$
$$+\alpha_1(\phi)^{q+1} + \alpha_2(\phi)^{q+2} + \alpha_3(\phi)^{q+3} + \ldots = y + (\gamma_1 + \alpha_1) y^{q+1} + (\gamma_2 + \alpha_2) y^{q+2} + \ldots.$$

Hence $\alpha_k = -\gamma_k$, $k = 1,2$ and by that $y = x + \gamma_1 x^{q+1} + \gamma_2 x^{q+2} + \ldots \equiv \varphi^{-1}(x)$. Substituting $\varphi(y)$ and $\varphi^{-1}(x)$ to (2.11) we obtain

$$y_{n+1} = \left(\lambda - a x_n^q\right)x_n - \gamma_1\left(\lambda - a x_n^q\right)^{q+1} x_n^{\,q+1} - \gamma_2\left(\lambda - a x_n^q\right)^{q+2} x_n^{\,q+2} + \ldots =$$
$$= \lambda x_n - \left(a + \gamma_1 \lambda^{q+1}\right)x_n^{q+1} - \lambda^{q+2}\gamma_2 x_n^{q+2} + \ldots =$$
$$= \lambda\left(y_n + \gamma_1 y_n^{q+1} + \gamma_2 y_n^{q+2}\right) - \left(a + \gamma_n \lambda^{q+1}\right)\left(\phi(y_n)\right)^{q+1} - \gamma_2 \lambda^{q+2}\left(\phi(y_n)\right)^{q+2} + \ldots =$$
$$= \lambda y_n + \left(\left(\lambda - X^{q+1}\right)\gamma_1 - a\right) y_n^{q+1} + + \left(\lambda - X^{q+2}\right)\gamma_2 y_n^{q+2} + \ldots.$$

Assuming $\gamma_1 = \left(\lambda - \lambda^{q+1}\right)^{-1} a$ and $\left(\lambda - \lambda^{q+2}\right)\gamma_2 \equiv -b$ we obtain (2.12) with arbitrary b (together with arbitrary γ_2), which allows us to obtain $\omega(y) \neq \phi$, $\omega = \left\{ y \middle| \left|\lambda - b y^{q+1}\right| < 1, |y| < \delta \right\}$.

Note that, due to the ω-compressibility of the considered difference-dynamical systems (conditions (2.7), (2.8)), we have $|\gamma_1| >> 1$. Similarly, the ω-compressibility conditions (2.12) lead to the relation $|\gamma_2| >> 1$.

Therefore, when proving the convergence of decompositions, it is necessary to distinguish the growing degrees of values $p = \left|\lambda - a x_n^{\,q}\right| < 1$ и $\mu = \left|\lambda - a y_n^{\,q+1}\right| < 1$. The theorem is proved.

Remark. Polynomial difference-dynamical systems

$$x_{n+1} = \sum_{k=1}^{p-1} a_k x_n^k + x_n^p X_p(x_n), \tag{2.13}$$

can be considered. Here continuous function $X_p(x)$ is uniformly bounded

$$|X_p(x)| \leq M, \quad |x| < \varepsilon$$

in the neighborhood of the point $x = 0$.

System (2.13) turns into analytic if $X_p(x)$ is analytic function in the neighborhood of the point $x = 0$, i.e. the series $X_p(x) = \sum_{k=0}^{x} b_k x^k$ converges for $|x| < \varepsilon$.

Similarly, one can consider polynomial homeomorphisms $x = \varphi(y)$ of a neighborhood $y = 0$ into the neighborhood of $x = 0$:

$$x = y + \sum_{k=2}^{p-1} \gamma_k y_k + \Phi_p(y) \equiv \varphi(y); \quad y = x + \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k x^k + \chi_p(x) \equiv \varphi^{-1}(x),$$

here $\Phi_p(y)$ and $\chi_p(x)$ are continuous functions, i.e. they are uniformly bounded functions respectively in the neighborhoods of $y = 0$ and of $x = 0$.

Moreover, the need for proving the convergence of the series in the neighborhood of the points $y = 0$ and $x = 0$ disappears.

К.Б. Бапаев[1], Ғ.Қ. Василина[1,2], С.С. Сламжанова[3]

[1]Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан;
[2]Алматы энергетика және байланыс университеті, Алматы, Қазақстан;
[3]I. Жансүгіров атындагы Жетісу мемлекеттік университеті, Талдықорган, Қазақстан

ТҰРАҚТЫ ЕМЕС АЙЫРЫМДЫ-ДИНАМИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ СЫҒЫМДАЛУ АЙМАҒЫ ТУРАЛЫ ЖӘНЕ ДЕТЕРМИНИСТІК ХАОС

Аннотация. Хаос теориясы белгілі бір жагдайларда хаос (динамикалық хаос, детерминистік хаос) деп аталатын құбылысқа ұшырайтын кейбір сызықты емес динамикалық жүйелердің әрекетін сипаттайтын теория. Мұндай жүйенің өзгерісі кездейсоқ болып көрінеді, тіпті егер жүйені сипаттайтын модель детерминистік болса да.

Қазіргі магынада, хаос дегеніміз - гидродинамикалық және плазмалық турбуленттілік деп аталатын физикалық процестердің тұрақсыздыгы.

Турбуленттілік теориясы толыгымен классикалық макроскопиялық теңдеулерге негізделуі керек: Навье-Стокс теңдеулері, газ динамикасы және т.б., дегенмен турбулентті қозгалыстың негізгі сипаттамаларын макроскопиялық теңдеулерден алу әлі мүмкін емес, сондықтан қосымша ойларга жүгінуге тура келеді.

Соңғы кезге дейін Ландау гипотезасы турбуленттіліктің пайда болу теориясында басты орынга ие болды. Ландау теориясы турбуленттіліктің пайда болуын тұрақсыздықпен байланыстырады. Бұл әрине дұрыс, бірақ оны жасау әдісі айтарлықтай жетілдіруді талап етеді. Жаңа көзқарастар тұргысынан Ландау теориясы толық емес. Бұл турбуленттіліктің пайда болуының мүмкін болатын нұсқаларының тек біреуін гана көрсетеді және, мүмкін, ең маңыздысынан алыс. Қазіргі бифуркация теориясы Ландау теориясынан басқа сұйықтықтың қозгалысын рандомизация және стохатизациялау жолынан басқа көптеген жолдарды ұсынады.

Ландаудың айтуы бойынша турбуленттіліктің пайда болуы тепе-теңдік күйдің тұрақтылықты жогалтудың дәйекті тізбегі, пайда болған периодты қозгалыс, пайда болган биполярлық қозгалыс және т.б. нәтижесінде пайда болады, нәтижесінде қозгалыс көп периодты болады.

Рюэль мен Такенс Ландау көрсеткен жолдың тар емес екендігіне, ортақ мүмкіншілік - бейтаныс тартуды қалыптастыру екендігіне назар аударды. Бірақ таңгажайып тартушы қалай пайда болады, олар зерттелмеген.

Ю.И. Неймарктің турбуленттік туралы мәлімдемесі - А. Пуанкаре ашқан гомоклиникалық құрылымдарды зерттеудің нәтижесі.

Лос-Аламостың физигі Митчел Фейгенбаум ашқан хаос теориясының фонындагы турбуленттіліктің ерекше әсемдігімен және маңыздылыгымен ерекшеленетіні бір нәтижеден көрінеді. Екі еселенген немесе шанышқы тәрізді бифуркация кезеңінің каскадының бір қызықты аспектісі - оны тәжірибе кезінде байқасаңыз, сіз оны басқа ештеңемен шатастырмайсыз. Сонымен қатар, хаостың каскадтан тыс болатыны белгілі. Демек, Фейгенбаум каскадының гидродинамикада байқалуы режимдердің хаосқа түсетіндігінің нақты дәлелі болып табылады.

Бұл жұмыста біз ерекше нүкте бифуркациясын зерттейміз. Тұрақты және тұрақсыз нүктелердің бифуркация немесе соқтыгысуы нәтижесінде олар аймақтан шыгатыны көрсетілген. Басқаша айтқанда, олар хаосқа түседі, ягни қарбалас жағдайына. Мұнда бифуркация нүктесін анықтау үшін қалыпқа келтіру әдісі қолданылады. Ляпунов магынасында тұрақсыз айырымды-динамикалық жүйелер қарастырылган.

Жұмыстың бірінші бөлімінде сызықтық жүйелердің тұрақсыздыгы жағдайында олардың түрленуі келтірілген. Диагональды матрицасы бар сызықтық жүйе қарастырылган. Нөлдің айналасында бұл жүйе арнайы түрге азайтылмайтын түрлендірулердің көмегімен төмендетілмейтіндігі көрсетілген. Нерогенді емес түрлендірулер үшін белгілі бір сызықтық жүйе шешімдерінің траекториясында тектік аудандардың траекториялары көрсетілмейтіндігі дәлелденген. Осылайша, арнайы форма жүйесіндегі нөлдік нүктенің аймагының топологиясы берілген жүйенің нөлдік аймағында топологиясына айналмайды. Осы әдісті қолдану арқылы алынган қайшылықтың себептері көрсетілген.

Екінші бөлімде аналитикалық айырымды-динамикалық жүйелер мен аналитикалық гомеоморфизмдер қарастырылган. Сонымен қоса айырымды-динамикалық ω – сыгымдалган жүйелер де зерттелген. ω – сыгымдалған айырымды-динамикалық жүйелер туралы түсінік берілген. ω – сыгымдалган айырымды-динамикалық жүйелер қандай жүйелерге изоморфты болып табылатыны көрсетілген.

Түйін сөздер: динамикалық-айырымдық жүйе, бифуркация, орнықтылық, гомеоморфизм, хаос.

К.Б. Бапаев[1], Г.К. Василина[1,2], С.С. Сламжанова[3]

[1]Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
[2]Алматинский университет энергетики и связи, Алматы, Казахстан
[3]Жетысуский государственный университет им. И. Жансугурова, Талдыкорган, Казахстан

ОБ ОБЛАСТИ СЖИМАЕМОСТИ НЕУСТОЙЧИВЫХ РАЗНОСТНО-ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

Аннотация. Теория хаоса есть теория, которая описывает поведение некоторых нелинейных динамических систем, подверженных при определённых условиях явлению, называемому хаос (динамический хаос, детерминированный хаос). Поведение такой системы кажется случайным, даже если модель, описывающая систему, является детерминированной.

В современном понимании хаос означает состояние беспорядка и нерегулярность физических процессов, которое называется гидродинамической и плазменной турбулентностью. Теория турбулентности, казалось бы, должна полностью основываться на классических макроскопических уравнениях: уравнениях Навье-Стокса, газодинамики и др., однако вывести основные характеристики турбулентного движения из макроскопических уравнений пока не представляется возможным и приходится прибегать к дополнительным соображения. До последнего времени в теории возникновения турбулентности безраздельно господствовала гипотеза Ландау.

Теория Ландау связывает возникновение турбулентности с неустойчивостью. Это, безусловно верно, но то, как она это делает, потребует существенных уточнений. С точки зрения новых воззрений теория Ландау не полна. Она указывает лишь на один из возможных вариантов возникновения турбулентности и, по-видимому, далеко не самый важный. Современная теория бифуркаций предлагает много других путей, отличных от теории Ландау, пути хаотизации и стохатизации движения жидкости. По Ландау возникновение турбулентности происходит в результате последовательной серии потери устойчивости состоянием равновесия, возникшим периодическим движением, появившимся двояко периодическим движением и т.д., в результате чего движение становится многопериодическим.

Рюэль и Такенс обратили внимание на то, что путь, указанный Ландау, не общий, что общая возможность – это образование странного аттрактора. Но как возникает странный аттрактор, они не исследовали.

Высказывания Ю.И. Неймарка о турбулентности – результат исследования им гомоклинических структур, открытых еще А. Пуанкаре. Описание турбулентности на фоне теории хаоса, благодаря своей особой красоте и значимости, особенным образом выделяется один результат - каскад удвоения периода, открытый Лос-Аламосским физиком Митчеллом Фейгенбаумом.

Один интересный аспект каскада удвоения периода или вилообразной бифуркации (Сценарий Фейгенбаума) состоит в том, что когда вы заметите его в ходе эксперимента, то не спутаете ни с чем другим. Кроме того, известно, что за каскадом существует хаос. Следовательно, наблюдение каскада Фейгенбаума в гидродинамике является особенно убедительным доказательством того, что моды должны уступать хаосу.

В данной работе исследуется бифуркация типа седловой точки. Показывается, что в результате бифуркации или столкновения устойчивой и неустойчивой точек, они уходят из области. Другими словами, они переходят в хаос, т.е. в состояние беспорядка. Здесь применяется метод нормализации для выявления точки бифуркации. Рассматриваются разностно-динамические системы неустойчивые в смысле Ляпунова.

В первой части работы дается преобразование линейных систем в случае их неустойчивости. Рассматривается линейная система с диагональной матрицей. Показывается, что в окрестности нуля данная система не приводится с помощью невырожденных преобразований к специальному виду. Доказывается, что для невырожденных преобразований траектории системы специального вида из окрестности начала координат не могут отображаться в траектории решений заданной линейной системы. Таким образом, топология окрестности нулевой точки системы специального вида не преобразуется в топологию заданной системы в окрестности нуля. Показываются причины противоречия, получаемого при применении данного метода.

Во второй части рассматриваются аналитические разностно-динамические системы и аналитические гомеоморфизмы. Также исследуются ω – сжимающие разностно-динамические системы. Дается понятие ω – сжимающих разностно-динамических систем. Показывается какой системе изоморфны ω – сжимающие разностно-динамические системы.

Ключевые слова: разностно-динамическая система, бифуркация, устойчивость, гомеоморфизм, хаос.

Information about authors.

Bapaev K.B., Doctor of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan, bapaev41@bk.ru, https://orcid.org/0000-0002-7931-6985;

Vassilina G.K., PhD, Senior Researcher, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Senior Lecturer, Almaty University of Energy and Communications, Almaty, Kazakhstan, v_gulmira@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-2504-9620;

Slamzhanova S.S., candidate of Physics and Mathematics, associate professor, Zhetysu State University named after I. Zhansugurov, Taldykorgan, Kazakhstan, beksultan.82e@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-7059-0785

REFERENCES

[1] Landau L. D. On the problem of turbulence // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1944. Vol. 44, No. 8. P. 339-342.

[2] Landau L. D., Livshits E. M. Hydrodynamics. Moscow, 1988.

[3] Hopf E. A mathematical example displaying features of turbulence // Comm. Pure Appl. Math. 1948. Vol. 1. P. 303-322.

[4] Arnol'd V.I. Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics // Russian Mathematical Surveys. 1963. 18(6):85. http://dx.doi.org/10.1070/RM1963v018n06ABEH001143.

[5] Arnold V.I., Avets A. Ergodic problems of classical mechanics. Izhevsk, 1999. 160 pp.

[6] Feigenbaum M. Quantitative universality for a class of non-linear transformations // J. Statist. Phys. 1978. 19, 25–52.

[7] Feigenbaum M. The universal metric properties of nonlinear transformations // J. Stat. Phys. 1979. 21, 669.

[8] Lorenz E.N. On the prevalence of aperiodicity in simple systems. In: Grmela M., Marsden J.E. (eds) Global Analysis // Lecture Notes in Mathematics, 1979. Vol. 755.

[9] Manneville P., Pomeau Y. Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems // Physica D. 1980. Vol. 1, No. 2. P. 219–226.

[10] Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence // Commun Math Phys. 1971. 20, 167–192.

[11] Neymark Yu.I. The structure of the motions of a dynamical system in the vicinity of a homoclinic curve // Proceedings of the 5th Summer Mathematical School. Kiev, 1968. P. 400-435.

[12] Poincare A. Selected Works. Vol. II. Moscow, 1972.

[13] Bopaev K.B. Normalization of systems of nonlinear difference equations. KazSU, NSU. Almaty-Novosibirsk, 1995. 61 p.

[14] Bapaev K.B., Slamzhanova S.S. On stability and bifurcation of resonant difference-dynamic system // News of the national academy of sciences of the republic of Kazakhstan. Series physico-mathematical. 2015. № 4. P. 250-255.

[15] Bapaev K.B., Vassilina G.K. On Lagrange stability and Poisson stability of the differential-dynamic systems // News of the national academy of sciences of the republic of Kazakhstan. Series physico-mathematical. 2019. Vol. 5, № 327. P. 120-125. https://doi.org/10.32014/2019.2518-1726.66