NEWS
OF THENATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X **https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.70**
Volume 4, Number 332 (2020), 95 – 102

UDK 517.518.87
MRNTI 27.41

M.D. Ramazanov[1], Zh.K. Kaidassov[2], Zh.S. Tutkusheva[3]

[1]Institute of Mathematics with Computing Centre, Ufa, Russian;
[2]Aqtobe Regional Zhubanov State University.
E-mail: Ramazanovmd@yandex.ru; jet-k@mail.ru; zhailan_k@mail.ru

STUDYING THE EFFECTIVENESS OF A NEW ALGORITHM WITH A DEFINING FUNCTION FOR FINDING THE GLOBAL MINIMUM OF A SMOOTH FUNCTION

Abstract. This article presents a new algorithm with a defining function to find the global minimum of multi-extreme functions of two variables. The stages of the new algorithm are described in detail.

Computational experiments were performed on three different test assignments. We have found the global minima of the test functions. A convex function was given as the first example. In the second example, a non-convex function that has a global minimum inside a parabolic strongly elongated surface has been analyzed. In the third example, a function with a large number of local minima has been analyzed. These functions are different in complexity, but our algorithm determines the global minimum of different functions in the same amount of time.

A determining function is formed depending on the function considered so that the algorithm to function. If a function is two variables, then the defining function will contain a double integral. Such integrals were calculated using Sobolev's cubature formulas with a regular boundary layer. Computer programs were used to calculate cubature formulas. The calculation algorithm has been implemented using Microsoft Visual Studio in C++.

As a result of the computational experiment, the values and coordinates of the global minima of the test functions have been found. A comparative analysis of the reference values and those found was made using the new algorithm.

Key words: multidimensional optimization, global optimization algorithm, Sobolev’s cubature formulas, De Jong function, Rosenbrock function, Rastrigin function.

Recently, the relevance of optimization problems has been growing very rapidly and successfully. The range of optimization tasks has significantly expanded. There is a need to solve optimization problems in almost all Sciences. Many methods for finding the minimum of the function have been suggested [1-4]. Each method has its advantages and disadvantages. The task becomes more difficult if you need to find a global minimum for a function with a large number of local minima.

We have built a new algorithm for finding the global minimum. The algorithm for a function of a single variable has been analyzed [5] and tested.

Now let's describe the proposed algorithm for a function of two variables.

Let be a smooth function of two variables $z = f(x, y)$. The domain of the function $a \le x \le b$, $a \le y \le b$. It is necessary to find the value and coordinates of the global minimum $z = f(x, y)$.

The algorithm works by means of a defining function:

$$g(\alpha) = \int_a^b \int_a^b [|f(x,y) - \alpha| - (f(x,y) - \alpha)]^m dxdy , \qquad (1)$$

where the integration area on the plane xOy is a square $[a;b]_x \times [a;b]_y$. This integral defines the first touch of the global minimum of a function $z = f(x, y)$ with a plane $z = \alpha$, so the function (1) was called the defining function.

Let's start with the value of the global minimum point. Let's denote it $\hat{\alpha} = glob \min f(\hat{x}, \hat{y})$. To do this, it is necessary to select the value α and put it into the defining function and calculate the value of the integral.

If $f(x, y) \geq \alpha$, then the module as a defining function is expanded with a positive sign and is obtained $g(\alpha) = 0$. This means that the plane $z = \alpha$ passes below the function graph or touches the bottom. In further we select a value α greater than it was before.

If $f(x, y) < \alpha$, then the module in the defining function is expanded with a negative sign and is obtained $g(\alpha) > 0$. This means that the plane $z = \alpha$ passes above the function graph or intersects, so we select a value α less than it was before.

Continue to choose α until, $|\alpha_n - \alpha_{n+1}| \leq \varepsilon$ where $g(\alpha_n) = 0$ and $g(\alpha_{n+1}) > 0$. After a certain number of iterations, we will get close to the value of the global minimum up to the desired accuracy. The global minimum lies on the segment $\hat{\alpha} \in [\alpha_n; \alpha_{n+1}]$.

In searching for the coordinates of the global minimum, it is necessary that the defining function takes a positive number $g(\hat{\alpha}) > 0$. Therefore, the approximate value of the global minimum takes the right end of the segment $[a_n, a_{n+1}]$, $g(\alpha_{n+1}) > 0$.

$$\alpha_{n+1} \approx \hat{\alpha} = glob \min f(\hat{x}, \hat{y}) \tag{2}$$

We found the value of the global minimum (2) with ε - precision.

Let's start searching for the coordinates of the global minimum point $\hat{x}$ and $\hat{y}$, where $\hat{x} \in [a; b]$ and $\hat{y} \in [a; b]$. We look for the coordinates of the point in the square $[a; b]_x \times [a; b]_y$. Divide the given square into four equal parts. We get four squares $[a; x_1]_x \times [a; y_1]_y, [a; x_1]_x \times [y_1; b]_y$, $[x_1; b]_x \times [a; y_1]_y$ and $[x_1; b]_x \times [y_1; b]_y$ by dividing the sides in half $x_1 = \dfrac{b+a}{2}$ and $y_1 = \dfrac{b+a}{2}$. We modify the defining function for each of the obtained regions(1).

$$g_{[a;x_1]_x \times [a;y_1]_y}(\hat{\alpha}) = \int_a^{y_1} \int_a^{x_1} [|f(x, y) - \hat{\alpha}| - (f(x, y) - \hat{\alpha})]^m \, dxdy \ , \ \ldots\ldots \tag{3}$$

$$g_{[x_1;b]_x \times [y_1;b]_y}(\hat{\alpha}) = \int_{y_1}^{b} \int_{x_1}^{b} [|f(x, y) - \hat{\alpha}| - (f(x, y) - \hat{\alpha})]^m \, dxdy$$

The found value of the global minimum (2)were used in the modified functions (3). At least one of these four integrals must be positive. We continue to search for the point of the global minimum in the part where the modified integral will take a positive number. We divide the selected part into four more squares and build four more integrals for them in the same way. This iteration continues until $|x_m - x_{m+1}| \leq \varepsilon$ and $|y_l - y_{l+1}| \leq \varepsilon$ where $g_{[x_m; x_{m+1}] \times [y_l; y_{l+1}]}(\hat{\alpha}) > 0$. The coordinates of the global minimum point are equal to $\hat{x} = \dfrac{x_{m+1} + x_m}{2}$ and $\hat{y} = \dfrac{y_{l+1} + y_l}{2}$.

The accuracy of the value and coordinates of the global minimum is set by us. In our examples, the values and coordinates of the global minimum are calculated with precision $\varepsilon = 10^{-6}$.

To calculate a two-dimensional complex integral, we used Sobolev's cubature formulas with a regular boundary layer [6-8], as multidimensional integrals are well approached by Sobolev's formulas.

The proposed algorithm for the minimization problem has been implemented in C++ in the Microsoft Visual Studio 2017 development environment [9].

In this article, we will test the new algorithm for accuracy and efficiency. Optimization methods are tested for accuracy and efficiency by means of test functions that have well-known exact extremes. To test our algorithm three well-known functions were chosen [11-12].

De Jong's Function. It is sometimes called a spherical function. It is one of the simplest test tasks used for testing the optimization algorithm [13]. The function is defined by the following formula:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 ,$$

where the scope of the function definition is $-5.12 < x < 5.12$, $-5.12 < y < 5.12$. The function is continuous and convex and has one global minimum: $f(x,y) = 0$, $x = 0$, $y = 0$. There are no local minimums. The graph of the function in space is shown in figure 1.

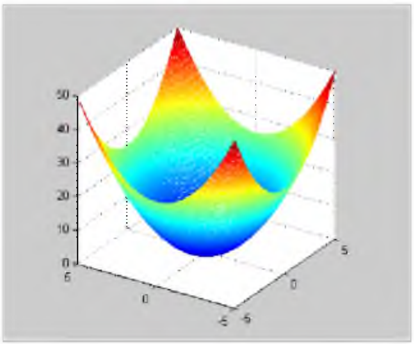

Figure 1-Graph of the De Jong' function of two variables

Rosenbrock Function. It is also called the "banana function". Finding the global minimum for this function is considered a non-trivial task [14-15]. The function has a slowly decreasing large plateau. The global minimum is located inside a long, narrow, parabolic flat valley. It is difficult to find a global minimum under these conditions,. The function has the following definition:

$$f(x;y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2 ,$$

where the function definition area is: $-2.048 < x < 2.048$, $-2.048 < y < 2.048$ and has one global minimum: $f(x,y) = 0$, $x = 0$, $y = 0$. There are no local minimums. The graph of the function in space is shown in figure 2.

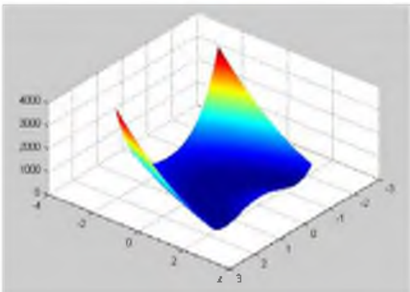

Figure 2 - Graph of the Rosenbrock function of two variables

The Rastrigin function is a non-convex and multi-extreme function [16]. Finding the global minimum of such a function is a difficult task because of the large number of local minima. For this reason, the Rastrigin function is used to test the effectiveness of optimization algorithms. The function is defined by the following formula:

$$f(x,y) = 20 + x^2 + y^2 - 10\cos(2\pi x) - 10\cos(2\pi y),$$

where the region of definition of the coordinates is $-5.12 < x < 5.12$ and $-5.12 < y < 5.12$ and has one global minimum: $f(x,y) = 0$, $x = 0$, $y = 0$. There are many local minimums. The graph of the function in space is shown in Figure 3.

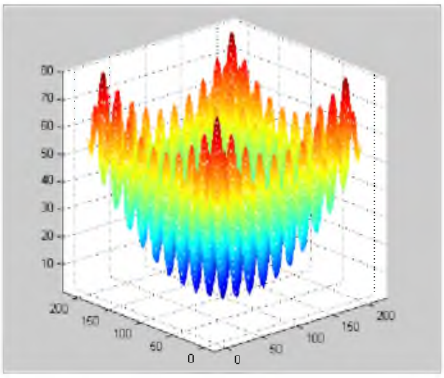

Figure 3 - Graph of the Rastrigin function of two variables

We will show how to search for the global minimum of the last example on the basis of the algorithm proposed above. It is more difficult to solve this example by using the gradient method than convex functions. The algorithm proposed above will easily calculate the value and coordinates of the global minimum.

First let's build a defining function for the Rastrigin function:

$$g(\alpha) = \int_{-5.12}^{5.12} \int_{-5.12}^{5.12} [\left|20 + x^2 + y^2 - 10\cos(2\pi x) - 10\cos(2\pi y) - \alpha\right| -$$
$$-(20 + x^2 + y^2 - 10\cos(2\pi x) - 10\cos(2\pi y) - \alpha)]^6 \, dxdy$$

Search $\hat{\alpha}$ for the value of the global minimum point using the function $g(\alpha)$. The initial value α is randomly selected. If the function value area is set, you can start from it. If the function value area is not specified, then start searching with $\alpha = 0$. At $\alpha = 0$, it turns out $g(0) = 0$. Then the plane $z = \alpha$ passes below the graph of the specified function or touches at the point of the global minimum. Table 1 below shows a computational search $\hat{\alpha}$ experiment.

Table 1- step-by-step search $\hat{\alpha}$

	Select a value α	Calculate the value of the defining function	The location of the plane $z = \alpha$	We need to find the definition of an interval belonging to α
1	$\alpha = 0$	$g(0) = 0$	$z = 0$ the plane passes below the graph or touches the function graph at the global minimum point	We need to find the global minimum value is greater than 0, $\alpha \in [0;+\infty)$
2	$\alpha = 5$	$g(5) > 0$	$z = 5$ the plane passes above or intersects the function graph	We need to find the global minimum value is less than 5, $\alpha \in [0;5)$
3	$\alpha = 2,5$	$g(2.5) > 0$	$z = 2.5$ the plane passes above or intersects the function graph	We need to find the global minimum value is less than 2.5, $\alpha \in [0;2.5)$
4	$\alpha = 1.25$	$g(1.25) > 0$	$z = 1.25$ the plane passes above or intersects the function graph	We need to find the global minimum value is less than 1.25, $\alpha \in [0;1.25)$
	....	...	...	...
	$\alpha = 0.000001$	$g(0.000001) > 0$	$z = 0.000001$ the plane passes above or intersects the function graph	The accuracy has been achieved $\alpha \in [0;0.000001)$

We stop the computational experiment when we reach the desired accuracy. In our examples, the accuracy for the value of the global minimum point $\varepsilon \le 10^{-6}$ is taken. We took the right end $\hat{\alpha} = 0{,}000001$ of the segment $\alpha \in [0;0.000001)$ as the value of the global minimum, because in searching for the coordinates of the global minimum point, the defining function must give a positive number.

Let's start searching for the coordinates of the global minimum point $\hat{x}$ and $\hat{y}$, where $\hat{x} \in [-5.12;5.12]$ and $\hat{y} \in [-5.12;5.12]$. We are looking for the coordinates of the point in the square $[-5.12;5.12]_x \times [-5.12;5.12]_y$. Divide the given square into four equal parts.

Dividing the sides in half $x_1 = \dfrac{5.12 + (-5.12)}{2} = 0$ and $y_1 = \dfrac{5.12 + (-5.12)}{2} = 0$, we get four squares $[-5.12;0]_x \times [-5.12;0]_y$, $[-5.12;0]_x \times [0;5.12]_y$, $[0;5.12]_x \times [-5.12;0]_y$ and $[0;5.12]_x \times [0;5.12]_y$. We will start calculating modified defining functions for the obtained regions.

$$g_{[-5.12;0]_x \times [-5.12;0]_y}(\hat{\alpha}) \equiv \int_{-5.12}^{0} \int_{-5.12}^{0} [\left|20 + x^2 + y^2 - 10\cos(2\pi x) - 10\cos(2\pi y) - \hat{\alpha}\right| -$$
$$- (20 + x^2 + y^2 - 10\cos(2\pi x) - 10\cos(2\pi y) - \hat{\alpha})]^6 \, dxdy$$

The integral for the first part gives a positive number. The integrals over the other parts can not be seen. We continue to search for the global minimum point in the square $[-5.12;0]_x \times [-5.12;0]_y$. We divide the selected part into four more squares and build four more integrals for them in the same way. table 1 below shows the search for global minimum coordinates.

Table 2-step-by-step search for global minimum coordinates

The definition area under consideration	Value of defining functions	Actions
$[-5.12;5.12]_x \times [-5.12;5.12]_y$.	$g_{[-5.12;5.12]_x \times [-5.12;5.12]_y}(\hat{\alpha}) > 0$	Divide the definition area into four equal parts
$[-5.12;0]_x \times [-5.12;0]_y$	$g_{[-5.12;0]_x \times [-5.12;0]_y}(\hat{\alpha}) > 0$	Divide the definition area into four equal parts
$[-5.12;-2.56]_x \times [-5.12;-2.56]_y$	$g_{[-5.12;-2.56]_x \times [-5.12;-2.56]_y}(\hat{\alpha}) = 0$	Do not consider this part, move to the next square
$[-5.12;-2.56]_x \times [-2.56;0]_y$	$g_{[-5.12;-2.56]_x \times [-2.56;0]_y}(\hat{\alpha}) = 0$	Do not consider this part, move to the next square
$[-2.56;0]_x \times [-2.56;0]_y$	$g_{[-5.12;0]_x \times [-2.56;0]_y}(\hat{\alpha}) > 0$	Divide the definition area into four equal parts
...	...	...
$[-0.000001;0]_x \times [-0.000001;0]_y$	$g_{[-0.000001;0]_x \times [-0.000001;0]_y}(\hat{\alpha}) > 0$	Stop searching for coordinates. The desired accuracy has been achieved.

This iteration continues until we reach the desired accuracy $\varepsilon \le 10^{-6}$. The coordinates of the global minimum point are $\hat{x} \approx \dfrac{0 + (-0.000001)}{2} \approx -0.0000005$ and $\hat{y} \approx \dfrac{0 + (-0.000001)}{2} \approx -0.0000005$. We found the global minimum: $f(x, y) \approx 0$, $x \approx 0$, $y \approx 0$. They match the reference values.

All test cases have been solved with accuracy $\varepsilon \le 10^{-6}$ and the answers received match the reference values.

The proposed algorithm does not do any extra work. First of all, it finds the value of the global minimum. And only then searches for the coordinates of this point. This will take less time and make your computer work easier.

М.Д. Рамазанов[1], Ж.Қ. Қайдасов[2], Ж.С.Туткушева[2]

[1]Математика институты, Уфа, Ресей;
[2]Қ. Жұбанов атындагы АӨМУ, Ақтөбе, Қазақстан;

ТЕГІС ФУНКЦИЯНЫҢ ГЛОБАЛЬДЫ МИНИМУМЫН ІЗДЕУДЕ ЖАҢА АЛГОРИТМНІҢ ТИІМДІЛІГІН ЗЕРТТЕУ

Аннотация. Соңғы уақытта оңтайландыру есептерінің өзектілігі өте қарқынды және табысты өсуде. Оңтайландыру есептерін қолдану аясы айтарлықтай кеңейді. Оңтайландыру есептерін шешу қажеттілігі барлық гылымдарда бар. Функцияның локальды минимумын табудың көптеген әдістері ұсынылды. Бірақ функцияның глобальды минимумын табу міндеті аз зерттелген. Әр әдістің өзінің артықшылықтары мен кемшіліктері бар. Локальды минимумдары көп функцияның глобальды минимумын табу қажет болса, есеп қиындай түседі.

Бұл мақалада екі айнымалысы бар локальды минимумдары көп функцияның глобальды минимумын іздеу үшін жаңа алгоритм ұсынылган. Мұнда жаңа алгоритмнің жұмыс кезеңдері егжей-тегжейлі жазылган.

Ұсынылған әдіс басқа әдістерден ерекшеленеді, бұл жерде іздеуді глобальды минимум нүктесінің мәнін, ягна деңгейін анықтаудан бастаймыз. Глобальды минимум нүктесінің мәнін және координаталарын есептеу үшін жаңа анықтаушы функция құрылды. Анықтаушы функцияның көмегімен берілген функцияның глобальды минимум нүктесіне жанама жазықтықты табамыз. Глобальды минимум нүктесінің мәнін анықтағаннан кейін оның координаттары есептелді.

Мақалада квадратта анықталган функциялар қарастырылған. Глобальды минимум координаттарын табу үшін анықталу облысын төрт тең квадратқа бөлу керек. Бұдан әрі осы квадраттардың қайсысында глобальды минимум бар екенің анықтаймыз. Таңдалған квадрат тағы төрт тең квадратқа бөлінеді. Бізге қажетті дәлдікке дейін квадратты бөлу жалгасады. Олар өзгерген анықтаушы функцияның көмегімен анықталады. Біз "жаңа" квадратты қарастырганда, анықтаушы функция да интегралдау аймағы өзгертеді.

Бұл алгоритм есептеулер санын айтарлықтай азайтады, олай болса есептеу уақыты қысқарады.

Глобальды оңтайландыру алгоритмдерінің жылдамдыгы мен дәлдігін бағалау үшін тесттік функциялар қолданылды. Үш түрлі тесттік функциялар алынды. Бірінші мысал ретінде дөңес функция келтірілді. Екінші мысалда параболалық қатты созылган беттің ішінде глобальды минимумы бар дөңес емес функция қарастырылды. Үшінші мысалда локальды минимумдары өте көп функцияның глобальды минимумы ізделді. Осы функциялармен есептеу эксперименттері жүргізілді. Барлық есептеулер $\varepsilon \leq 10^{-6}$ дәлдігімен орындалды. Біз тесттік функциялардың глобальды минимумдарының мәндерін және координаттарын жаңа алгоритмнің көмегімен тауып, эталондық мәндермен салыстырдық. Есептелген мәндер эталондық мәндерге сәйкес келді. Бұл тесттік функциялар күрделілігіне қарай әр түрлі, бірақ ұсынылган алгоритм бірдей уақыт ішінде әр түрлі функциялардын глобальды минимумын анықтайды.

Анықтаушы функция қарастырылатын функцияға және оның анықтау облысына байланысты. Егер екі айнымалысы бар функция берілген болса, онда анықтаушы функция қос интегралды болады, оның интегралдау аймагы анықтау облысына сәйкес келеді. Берілген облыс бойынша еселі интегралды жуықтап есептеу үшін тұрақты шекаралық қабаты бар Соболев кубатуралық формулаларын пайдалану қолайлы. Бір өлшемді квадратураларды есептеудегі маңызды қасиеттерін Соболевтің көп өлшемді кубатуралық формулаларында да сақталады. Олар кеңістіктің кең класстары үшін колдонылады.

Кубатуралық формулаларды есептеу компьютер бағдарламалары арқылы жүзеге асырылады. Біз С++ бағдарламалау тілін таңдадық. Себебі С++ багдарламалау тілінің қолдану аясы өте кең және күрделі есептерді іске асыру мүмкіндігі жогары. Есептеу алгоритмі С++ тілінде Microsoft Visual Studio багдарламасының көмегімен іске асырылды.

Түйін сөздер: көп өлшемді оңтайландыру, глобальды оңтайландыру алгоритмі, Соболев кубатуралық формулалары, Де Джонг функциясы, Розенброк функциясы, Растригин функциясы.

М.Д. Рамазанов[1], Ж.К. Кайдасов[2], Ж.С. Туткушева[2]

[1]Уфимский Институт Математики, Уфа, РФ;
[2]Актюбинский региональный государственный университет
имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан;

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ НОВОГО АЛГОРИТМА С ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ В ПОИСКЕ ГЛОБАЛЬНОГО МИНИМУМА ГЛАДКОЙ ФУНКЦИИ

Аннотация. В последнее время актуальность задач оптимизации растет очень интенсивно и успешно. Круг задач оптимизации существенно расширился. Потребность решить оптимизационные задачи есть практически во всех науках. Предложены много методов нахождения локального минимума функции. Меньше изучена задача нахождения глобального минимума функции. У каждого метода есть свои достоинства и недостатки. Задача становится сложнее, если нужно найти глобальный минимум у функции с большим количеством локальных минимумов.

В данной статье представлен новый алгоритм для поиска глобального минимума многоэкстремальных гладких функций двух переменных. Здесь детально расписаны все этапы работы нового алгоритма.

Предложенный метод отличается от других методов тем, что здесь поиск начинается со значения, то есть определяем уровень точки глобального минимума. Для вычисления значений и координат глобального минимума построена новая определяющая функция. С помощью определяющей функции мы находим касательную плоскость к графику заданной функции в точке глобального минимума. После определения значения точки глобального минимума, вычисляются координаты точки глобального минимума.

В статье рассмотрены функции определенные в квадрате, чтобы найти координаты глобального минимума, область определения делим на четыре равные квадраты. Дальше определяем, в каком из этих квадратов лежит найденное значение глобального минимума. Выбранный квадрат делим еще на четыре равные квадраты. И так продолжается до нужной нам точности. Они определяются с помощью видоизмененной определяющей функции. У определяющей функции будет меняться область интегрирования, каждый раз, когда мы рассматриваем «новый» квадрат.

Такой алгоритм значительно уменьшает количество вычислений – это значит, сокращается время вычислений.

Для оценки скорости и точности алгоритмов глобальной оптимизации применяются тестовые функции. Подобраны три различные тестовые задачи. В качестве первого примера приведена выпуклая функция, где локальный минимум совпадает с глобальным минимумом. Во втором примере разобрана невыпуклая функция, которая имеет глобальный минимум внутри параболической сильно вытянутой поверхности. В третьем примере разобрана функция с большим количеством локальных минимумов. Проведены вычислительные эксперименты с данными функциями. Мы нашли значения и координаты глобальных минимумов тестовых функций с помощью нового алгоритма и сравнили с эталонными значениями. Все вычисления сделаны с точностью $\varepsilon \leq 10^{-6}$. Вычисленные значения и координаты точек глобальных минимумов совпадают с эталонными значениями. Эти функции разные по сложности, но предложенный алгоритм определяет глобальный минимум различных функций за одинаковое количество времени.

Определяющая функция зависит от рассматриваемой функции и от ее области определения. Если заданная функция двух переменных, то определяющая функция будет содержать двойной интеграл, где область интегрирования совпадает с областью определения. Для приближенного вычисления кратных интегралов по заданной области предлагается использовать кубатурные формулы Соболева с регулярным пограничным слоем. Многомерные кубатурные формулы Соболева сохраняют достоинства одномерных квадратур. Они оптимальны для широкого класса пространств.

Вычисления кубатурных формул реализованы с помощью компьютерных программ. Мы выбрали язык программирования C++ потому, что язык C++ имеет очень широкое применение и возможность реализовать сложные задачи. Алгоритм вычисления реализован с помощью программы Microsoft Visual Studio на языке C++.

Ключевые слова: многомерная оптимизация, алгоритм глобальной оптимизации, кубатурные формулы Соболева, функция Де Джонга, функция Розенброка, функция Растригина.

Information about authors:

Ramazanov Marat Davidovich - Institute of Mathematics with Computing Centre, Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Science, Doctor of physical and mathematical sciences, Professor of Mathematics, Ramazanovmd@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-9374-5997;

Kaidassov Zhetkerbay - Aqtobe Regional Zhubanov State University, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, jet-k@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-3746-6117;

Tutkusheva Zhailan Salavatovna – Aqtobe Regional Zhubanov State University, PhD Student, zhailan_k@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-3611-9620.

REFERENCES

[1] Kochegurova E.A. Optimization theory and methods, Tomsk: Tomsk Polytechnic University, (2011), 150. (in Russian)

[2] Yang X.-S., Deb S., Engineering optimization by cuckoo search. Int. J. Math. Modelling Num. Optimisation, (2010). Vol. 1, № 4, 330-343.

[3] Panteleev A.V., Letova T.A., Optimization methods in examples and problems, M.: Higher school, (2005), 544. (in Russian).

[4] CHernoruckij I.G. Optimization methods in management theory, SPb.: Peter, (2004), 256. (in Russian).

[5] Tutkusheva Zh.S. Determining the coordinates of the global minimum of an arbitrary smooth function // Modern innovations: Journal. Moscow(2019). No 4(32), 5-7. (in Russian).

[6] Sobolev S.L. Vaskevich V.L Cubature formula, Novosibirsk: Sobolev Institute of mathematics, (1996), 484. (in Russian).

[7] Ramazanov M.D. New algorithm for asymptotically optimal lattice cubature formulas // Ufa mathematical journal, (2009), 178. (in Russian).

[8] Ramazanov, M.D. Theory of lattice cubature formulas with a bounded boundary layer // Ufa mathematical journal, (2010), Vol. 2, No 3. 63-82. (in Russian).

[9] Kul'tin. N. Visual C++ in tasks and examples. - 2nd ed. - Petersburg: BHV-Petersburg, (2015), 268. (in Russian).

[10] Sidorina T. L. "Tutorial Microsoft Visual Studio C++ and MFC" BHV-Petersburg, (2009), 848. (in Russian).

[11] Sergienko A.B. Test functions for global optimization. Krasnoyarsk, (2012), 112. (in Russian).

[12] Yuret D. De Jong’s test suite, (1997), http://www2.denizyuret.com/pub/ aitr1569/node19.html.

[13] Rosenbrock function. http://en.wikipedia.org/wiki/Rosenbrock_function.

[14] Rosenbrock H.H., An automatic method for finding the greatest or least value of a function». - The Computer Journal 3, (1960), 175–184.

[15] Rastrigin function. http://en.wikipedia.org/wiki/Rastrigin_function