REPORTS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
ISSN 2224-5227 **https://doi.org/10.32014/2020.2518-1483.25**
Volume 2, Number 330 (2020), 5 – 13

UDK 521.1
MRNTI 41.03.02

M.Zh. Minglibayev[1,2], Ch.T. Omarov[2], A.T. Ibraimova[1,2]

[1]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;
[2]Fesenkov Astrophysical Institute, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: minglibayev@gmail.com, chingis.omarov@gmail.com, ibraimova@aphi.kz

NEW FORMS OF THE PERTURBED MOTION EQUATION

Abstract. Real celestial bodies are neither spherical nor solid. Celestial bodies are unsteady, in the process of evolution their masses, sizes, shapes and structures are changes. The paper considers a model problem proposed as an initial approximation for the problems of celestial mechanics of bodies with variable mass. Based on this model problem, perturbation theory methods are developed and new forms of the perturbed motion equation are obtained. The model problem as the problem of two bodies with variable mass in the presence of additional forces proportional to speed and mutual distance is a class of intermediate motions. This class of intermediate motions describes an aperiodic motion along a quasiconical section. In this paper, on the basis of this class of aperiodic motion over a quasiconical section, various new forms of the perturbed motion equation in the form of Newton's equations are obtained. Based on the known equations of perturbed motion for the osculating geometric elements $p,\ e,\ \omega,\ i,\ \Omega,\ \theta$ in the form of the Newton equation, we obtained the equations of perturbed motion for the following system of osculating elements $p,\ e,\ i,\ \pi,\ \Omega,\ \Phi(\tau)$ and $a,\ e,\ i,\ \pi,\ \Omega,\lambda$. Oscillating variables involving a dynamic element $\Phi(\tau)$ are suitable in the general case. A system of variables, where instead of the dynamic element $\Phi(\tau)$ is introduced λ - the average longitude in orbit is used in the quasielliptic case $e(t)<1$. The obtained new forms of the equation of perturbed motion, in the form of Newton's equations, in various systems of osculating variables can be effectively used in the study of the dynamics of non-stationary gravitating systems.

Key words: aperiodic motion along a quasiconical section, variable mass, unperturbed motion, equations of perturbed motion in the form of the Newton equation, perturbation theory, unsteady gravitational systems.

1. Introduction. Observational astronomy suggests that real celestial bodies are neither spherical nor solid. Celestial bodies are unsteady, in the process of evolution their masses, sizes, shapes and structures are changes [1-6]. On the basis of the model problem proposed as an initial approximation for the problems of celestial mechanics of bodies of variable mass [5], new forms of the equation of perturbed motion are obtained. The model problem as the problem of two bodies with variable mass in the presence of additional forces proportional to speed and mutual distance is a class of intermediate motions. This class of intermediate motions describes an aperiodic motion along a quasiconical section. In this paper, on the basis of this class of aperiodic motion over a quasiconical section, various new forms of the perturbed motion equation in the form of Newton's equations are obtained.

2. Aperiodic motion along a quasiconical section.

Some astronomical problems of non-stationary binary systems are described by equations of the form

$$\ddot{\vec{r}} = -fm\frac{\vec{r}}{r^3} - a\dot{\vec{r}} - b\vec{r}\,, \tag{2.1}$$

where $m = m(t) = m_1(t) + m_2(t)$, $m_1(t)$ is the mass of the central body, $m_2(t)$ is the mass of the satellite, f is the gravitational constant, a and b are some quantities, constants or functions of time, determined by the nature of the corresponding forces, $\vec{r}=\vec{r}(x,y,z)$ is the relative radius of the vector in the coordinate system *Oxyz*. In connection with the actual non-stationarity of gravitating systems, the issue of solving an equation of the form (2.1) becomes relevant. In the general case, the dynamics of non-stationary systems is difficult; solutions of equations such as (2.1) are unknown. Therefore, we study the dynamics of difficult non-stationary systems by the methods of perturbation theory based on aperiodic motion over a quasiconic section.

We turn to the equation

$$\ddot{\vec{r}}=-fm\frac{\vec{r}}{r^3}+\left(\frac{\dot{m}}{m}+\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\dot{\vec{r}}+\left[\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma}-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m}+\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right]\vec{r}, \tag{2.2}$$

where $\gamma=\gamma(t)$ is the dimensionless low differentiable time function, independent of zero, which is due to simplified differential equations or the condition of simplified differential equations of perturbed motion in osculating elements [5]. Equation (2.2) implies the integration of areas (the orbit is a flat curve)

$$\vec{r}\times\dot{\vec{r}}=\vec{c}\sqrt{m\gamma}\ ,\ \vec{c}=\overline{const}\ . \tag{2.3}$$

In polar coordinates, equation (2.2) - (2.3) can be written in the form [7]

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{r}{\gamma}\right)-\frac{r}{\gamma}\dot{\theta}^2=-\frac{fm/\gamma^3}{(r/\gamma)^2}+\frac{1}{2m/\gamma^3}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\gamma^3}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{r}{\gamma}\right), \tag{2.4}$$

$$\left(\frac{r}{\gamma}\right)^2\dot{u}=\frac{c}{\gamma^2}\sqrt{m\gamma}\ . \tag{2.5}$$

From equations (2.4)-(2.5) we obtain

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{\gamma}{r}\right)+\frac{\gamma}{r}=\frac{1}{c^2}\ . \tag{2.6}$$

Equation (2.6) for any initial conditions determines the aperiodic motion along the quasiconical section [8]. Therefore, solutions of equations (2.6) have the form

$$\frac{r}{\gamma}=\frac{p}{1+e\cos\theta},\quad \theta=u-\omega\ . \tag{2.7}$$

where $p,\ e,\ \omega$ are constants determined by the initial conditions; u is the polar angle. The analogs of the integral of areas, energy and the Laplace vector are as follows:

$$p=c^2,$$

$$\frac{\gamma^3}{fm}\left[\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{\gamma}\right)\right)^2-2\frac{fm}{\gamma^2 r}\right]=h=const\ , \tag{2.8}$$

$$\frac{\gamma^3}{fm}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{\gamma}\right)\times\left[\frac{\vec{r}}{\gamma}\times\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{\gamma}\right)\right]\right]-\frac{\vec{r}}{r}=\vec{q}=const\ ,\ |\vec{q}|=q\ , \tag{2.9}$$

$$e=q\ ,\quad e^2-1=hp\ . \tag{2.10}$$

We write down the radial and transverse components of the velocity

$$V_r=\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}r+\left(\frac{fm}{p\gamma}\right)^{1/2}e\sin(u-\omega), \tag{2.11}$$

$$V_n=\left(\frac{fm}{p\gamma}\right)^{1/2}\left[1+e\cos(u-\omega)\right]. \tag{2.12}$$

Equation (2.7) describes aperiodic motion along a quasiconical section, which in coordinate form can be written in the form

$$x = \gamma\rho\left[\cos u \cdot \cos\Omega - \sin u \cdot \sin\Omega \cdot \cos i\right],$$
$$y = \gamma\rho\left[\cos u \cdot \sin\Omega + \sin u \cdot \cos\Omega \cdot \cos i\right], \qquad (2.13)$$
$$z = \gamma\rho\left[\sin u \cdot \sin i\right], \quad r = \gamma\rho, \quad u = \theta + \omega,$$

where θ is the true anomaly

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}. \qquad (2.14)$$

The quantities p, e, i, ω, Ω are analogues of the known Keplerian elements. In the case of quasielliptical motion $\left(e(t) < 1\right)$, according to the standard transformation

$$tg\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}tg\frac{E}{2}, \; e < 1, \qquad (2.15)$$

we get the equation that matches the Kepler equation

$$E - e\sin E = M. \qquad (2.16)$$

However, in aperiodic motion along a quasiconic section, the time dependence of the eccentric $E = E(t)$ and average anomalies $M = M(t)$ is determined taking into account the laws of change in the masses of the bodies under consideration.

$$M = n\left[\Phi(t) - \Phi(\tau)\right], \; n = \frac{\sqrt{\mu_0}}{a^{3/2}} = const, \; \mu_0 = f\left[m_1(t_0) + m_2(t_0)\right] = const, \qquad (2.17)$$

where t_0 is the initial moment of time. Accordingly, $\Phi(t)$ the primitive function of

$$\left(\frac{m(t)}{m(t_0)\gamma^3}\right)^{1/2} = \left(\frac{m_1(t) + m_2(t)}{m_1(t_0) + m_2(t_0)} \cdot \frac{1}{\gamma^3}\right)^{1/2}, \qquad (2.18)$$

$\Phi(\tau)$ a dynamic element of aperiodic motion along a quasiconical section, an analog of the Keplerian dynamic element of the τ – moment of passage through the pericenter [1, 5, 9]. In undisturbed motion, respectively, we have

$$\dot{M} = n\left(\frac{m(t)}{m(t_0)\gamma^3}\right)^{1/2} = n\left(\frac{m_1(t) + m_2(t)}{m_1(t_0) + m_2(t_0)} \cdot \frac{1}{\gamma^3}\right)^{1/2}. \qquad (2.19)$$

In other words, in an unperturbed aperiodic motion along a quasiconical section, the average motion (the rate of change of the average anomaly) is not constant, but depends on the laws of changing the mass of the bodies and on the chosen specific function $\gamma = \gamma(t)$. In particular, when (in the unperturbed motion (2.2) there is no force proportional to the radius of the vector)

$$\gamma = \gamma(t) = const = 1, \qquad (2.20)$$

we have a well-known aperiodic motion along a conical section [1, 10]. Another special case is when (in unperturbed motion (2.2) there is no force of proportional speed)

$$\gamma(t) = \frac{\mu(t_0)}{\mu(t)} = \frac{m(t_0)}{m(t)}, \qquad (2.21)$$

we have widely used as an unperturbed motion in studying the dynamics of unsteady gravitating systems [11, 12, 13].

3. Equations of perturbed motion for osculating geometric elements in the form of Newton's equation. Let's consider the aperiodic motion along the quasiconical section (2.2), in the presence of a perturbing force

$$\ddot{\vec{r}} = -fm\frac{\vec{r}}{r^3} + \left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\dot{\vec{r}} + \left[\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right]\vec{r} + \vec{F}, \tag{3.1}$$

$$\vec{F} = \vec{F}\left(t,\vec{r},\dot{\vec{r}}\right) = \vec{F}\left(F_r,F_\tau,F_n\right) = F_r\cdot\vec{e}_r + F_\tau\cdot\vec{\tau} + F_n\cdot\vec{n}. \tag{3.2}$$

The perturbing force $\vec{F}$ and, accordingly, its components $\left(F_r,\ F_\tau,\ F_n\right)$, in the general case, depend on time, coordinates and velocities. In this case F_r the radial (directed along the radius of the vector), F_τ transversal (perpendicular to the radius of the vector, lying on the plane of the instantaneous orbit) and F_n normal (perpendicular to the plane of the instantaneous orbit) components of the disturbing force, the $\vec{e}_r,\ \vec{\tau},\ \vec{n}$ corresponding unit vectors [1, 14, 15, 16, 17] .

For osculating geometric elements of aperiodic motion along a quasiconical section

$$p,\ e,\ \omega,\ i,\ \Omega,\ \theta, \tag{3.3}$$

equations of perturbed motion in the Newton equation form were obtained earlier in [7, 8]. Here $p,\ e,\ \omega,\ i,\ \Omega,\ \theta$ are analogs of Keplerian dynamic elements, p is an analog of the orbit parameter, e is an analog of eccentricity, ω is an analog of the pericenter angular distance of the from the node, i is an analog of the orbit inclination of the on the plane, Ω is an analog of the ascending node longitude, θ is an analog true anomaly. The corresponding Newton equations have the form

$$\dot{p} = \frac{2p}{1+e\cos\theta}\cdot\tilde{F}_\tau, \tag{3.4}$$

$$\dot{e} = \sin\theta\cdot\tilde{F}_r + \left(\cos\theta + \frac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta}\right)\cdot\tilde{F}_\tau, \tag{3.5}$$

$$\dot{\omega} = -\frac{\cos\theta}{e}\cdot\tilde{F}_r + \frac{1}{e}\left(\sin\theta + \frac{\sin\theta}{1+e\cdot\cos\theta}\right)\cdot\tilde{F}_\tau - \frac{\sin u\cdot \mathrm{ctg}\, i}{1+e\cdot\cos\theta}\cdot\tilde{F}_n, \tag{3.6}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\cos u}{1+e\cdot\cos\theta}\cdot\tilde{F}_n, \tag{3.7}$$

$$\dot{\Omega} = \frac{\sin u}{\left(1+e\cdot\cos\theta\right)\sin i}\cdot\tilde{F}_n, \tag{3.8}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\sqrt{\mu_0}}{p^{3/2}}\left(\frac{m}{m_0\gamma^3}\right)^{1/2}\left(1+e\cdot\cos\theta\right)^2 + \frac{\cos\theta}{e}\cdot\tilde{F}_r - \frac{1}{e}\left(\sin\theta + \frac{\sin\theta}{1+e\cdot\cos\theta}\right)\cdot\tilde{F}_\tau, \tag{3.9}$$

$$\tilde{F}_r = F_r\cdot\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\mu_0}}\left(\frac{\gamma m_0}{m}\right)^{1/2}, \quad \tilde{F}_\tau = F_\tau\cdot\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\mu_0}}\left(\frac{\gamma m_0}{m}\right)^{1/2}, \quad \tilde{F}_n = F_n\cdot\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\mu_0}}\left(\frac{\gamma m_0}{m}\right)^{1/2}, \tag{3.10}$$

$$\gamma = \gamma(t),\ m = m(t), \quad m_0 = m_1(t_0) + m_2(t_0) = const, \quad \mu_0 = fm(t_0) = const, \tag{3.11}$$

where t_0 is the initial moment of time. However, for practical applications, when studying the dynamics of non-stationary gravitating systems, other systems of osculating elements are more convenient.

4. The equations of perturbed motion for a system of osculating elements $p,\ e,\ i,\ \pi,\ \Omega,\ \Phi(\tau)$. In some applications of the equations of perturbed motion based on aperiodic motion along a quasiconic section in the Newton's equations form, the following system of osculating elements is preferably

$$p,\ e,\ i,\ \pi,\ \Omega,\ \Phi(\tau), \tag{4.1}$$

where π is the analog of the pericenter longitude. The corresponding equations of perturbed motion in the form of Newton's equations are derived from equations (3.4) – (3.9) taking into account formulas (2.5), (2.7), (2.17), as a result, we have

$$\dot{p} = \frac{2p}{1+e\cos\theta}\cdot\tilde{F}_\tau, \tag{4.2}$$

$$\dot{e} = \sin\theta\cdot\tilde{F}_r + \left(\cos\theta + \frac{e+\cos\theta}{1+e\cdot\cos\theta}\right)\cdot\tilde{F}_\tau, \tag{4.3}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\cos u}{1+e\cdot\cos\theta}\cdot\tilde{F}_n, \tag{4.4}$$

$$\dot{\pi} = -\frac{\cos\theta}{e}\cdot\tilde{F}_r + \frac{\sin\theta}{e}\left(1+\frac{r}{\gamma p}\right)\cdot\tilde{F}_\tau + \frac{r}{\gamma p}\sin u\cdot\mathrm{tg}\frac{i}{2}\cdot\tilde{F}_n, \tag{4.5}$$

$$\dot{\Omega} = \frac{\sin u}{(1+e\cdot\cos\theta)\sin i}\cdot\tilde{F}_n, \tag{4.6}$$

$$\frac{d\Phi(\tau)}{dt} = \frac{p\sqrt{p}}{e\sqrt{\mu_0}}\left\{\left[eN\sin\theta-\cos\theta\right]\cdot\tilde{F}_r + \frac{\gamma p}{r}N\cdot\tilde{F}_\tau\right\}\frac{r^2}{\gamma^2 p^2}, \tag{4.7}$$

$$N = \frac{p^2\gamma^2}{r^2}I_1, \tag{4.8}$$

$$I_1 = 2\int_0^\theta \frac{r^3}{\gamma^3 p^3}\cos\theta d\theta = 2\int_0^\theta \left(\frac{1}{1+e\cdot\cos\theta}\right)^3\cos\theta d\theta. \tag{4.9}$$

The derived equations of perturbed motion (4.2)-(4.7) we use in the study of the restricted three-body problem with variable masses that changes non-isotropically in the presence of reactive forces [18].

5. The system of osculating elements in quasi-elliptical motion. In the dynamics of gravitationally coupled systems, during evolution, the eccentricity perturbed analog of the of the aperiodic motion along the quasiconic section for a long time remains less than unity $e(t)<1$ [19-21]. In this case, it is convenient to use the following system of osculating elements

$$a,\ e,\ i,\ \pi,\ \Omega,\ \lambda, \tag{5.1}$$

where a is the analog of the semimajor axis, $\lambda = M + \pi$ is the analog of the average longitude in the orbit, M is the analog of the average anomaly, π is the analog of the pericenter longitude. In this case, the equations of perturbed motion in the Newton's equations form have the form

$$\dot{a} = \frac{2a^2 e\sin\theta}{p}\cdot\tilde{F}_r + \frac{2a^2}{r}\cdot\tilde{F}_\tau, \tag{5.2}$$

$$\dot{e} = \sin\theta\cdot\tilde{F}_r + \left(\cos\theta + \frac{e+\cos\theta}{1+e\cdot\cos\theta}\right)\cdot\tilde{F}_\tau, \tag{5.3}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\cos u}{1+e\cdot\cos\theta}\cdot\tilde{F}_n, \tag{5.4}$$

$$\dot{\pi} = -\frac{\cos\theta}{e}\cdot\tilde{F}_r + \frac{\sin\theta}{e}\left(1+\frac{r}{\gamma p}\right)\cdot\tilde{F}_\tau + \frac{r}{\gamma p}\sin u\cdot \mathrm{tg}\frac{i}{2}\cdot\tilde{F}_n, \tag{5.5}$$

$$\dot{\Omega} = \frac{\sin u}{(1+e\cdot\cos\theta)\sin i}\cdot\tilde{F}_n, \tag{5.6}$$

$$\begin{gathered}\dot{\lambda} = n\left(\frac{m_1(t)+m_2(t)}{m_1(t_0)+m_2(t_0)}\cdot\frac{1}{\gamma^3}\right)^{1/2} - 2\frac{r}{\gamma p}\sqrt{1-e^2}\cdot\tilde{F}_r + \frac{r}{\gamma p}\sin u\cdot \mathrm{tg}\frac{i}{2}\cdot\tilde{F}_n + \\ + \frac{1}{1+\sqrt{1-e^2}}\left[-\tilde{F}_r\cdot\cos\theta + \left(1+\frac{r}{\gamma p}\right)\tilde{F}_\tau\cdot\sin\theta\right]\end{gathered}, \tag{5.7}$$

where $n=\sqrt{\mu_0}/a^{3/2}$ is the average orbital movement. We will use the obtained new forms of the equation of perturbed motion, based on aperiodic motion along a quasiconic section, in the study of the dynamics of non-stationary gravitating systems [22].

6. Conclusion

In the present work, new forms of the Newton equation of perturbed motion based on aperiodic motion along a quasiconic section are obtained. Based on the known equations of perturbed motion for osculating geometric elements p, e, ω, i, Ω, θ in the form of the Newton equation, we obtained the equations of perturbed motion for the following system of osculating elements:

$$p,\ e,\ i,\ \pi,\ \Omega,\ \Phi(\tau), \tag{6.1}$$

$$a,\ e,\ i,\ \pi,\ \Omega,\ \lambda, \tag{6.2}$$

Osculating variables (6.1), including a dynamic element $\Phi(\tau)$, are suitable in the general case. The system of variables (6.2), where instead of a dynamic element $\Phi(\tau)$ is introduced λ - the average longitude in orbit is used in the quasielliptic case $e(t)<1$.

The obtained new forms of the equation of perturbed motion, in the form of Newton's equations, in various systems of osculating variables can be effectively used in studying the dynamics of non-stationary gravitating systems.

The work was carried out within the framework of Project No. BR05236322, financed by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

М.Ж. Минглибаев[1,2], Ч.Т.Омаров[2], А.Т. Ибраимова[1,2]

[1]Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, Алматы, Қазақстан;
[2]В.Г. Фесенков атындағы астрофизика институты, Алматы, Қазақстан

ҰЙЫТҚЫҒАН ҚОЗҒАЛЫС ТЕНДЕУЛЕРІНІҢ ЖАҢА ТҮРЛЕРІ

Аннотация. Классикалық аспан механикасында кеплер қоғалысы негізінде ұйытқу теориясы жақсы дамыған. Ұйытқыған қозғалыс теңдеулерінің түрлері конондық теңдеулермен, Лагранж және Ньютон теңдеулерімен сипатталған. Сонымен қатар массалары тұрақты денелер нүкте ретінде немесе сфералық дене ретінде қарастырылады. Көптеген астрономиялық мәселелерді зерттеуде классикалық ұйытқу теориясы басты құрал болып саналады. Заманауи бақылау астрономиясы нақты ғарыштық денелердің массалары уақыт өте өзгеретінін растайды. Шынайы ғарыштық денелер – сфералық емес және қатты емес. Аспан денелері – бейстационар, эволюция кезеңінде олардың массалары, өлшемдері, пішіндері және құрылымы өзгереді. Қазіргі таңда айнымалы массалы аспан механикасы бойынша бірқатар ауқымды зерттеулер, библиографиялық жұмыстар бар. Алайда бейстационар ғарыштық жүйелер үшін ұйытқу теориясы жеткілікті дәрежеде дамымаған. Аталған жұмыста аспан механикасындағы айнымалы массалы денелер мәселесінің

алғашқы жуықтауы ретінде ұсынылған модельдік есеп қарастырылды. Осы модельдік есептің негізінде ұйытқу теорияларының әдістері дами түсті және ұйытқыған қозғалыс теңдеулерінің жаңа түрлері алынды. Модельдік есеп қосымша күштерді ескере отырып, айнымалы массалы екі дене есебі ретінде, жылдамдыққа және өзара арақашықтыққа пропорционал аралық қозғалыс класы болып табылады. Аталған аралық қозғалыс класы квазиконустық қима бойынша апериодтық қозғалысты сипаттайды. Бұл жұмыста аталған квазиконустық қима бойынша апериодтық қозғалыс класы негізінде Ньютон теңдеулері түрінде ұйытқыған қозғалыс теңдеулерінің жаңа түрлері алынды. Ньютон теңдеулері түріндегі оскуляциялаушы геометриялық элементтер – p, e, ω, i, Ω, θ үшін белгілі ұйытқыған қозғалыс теңдеулері негізінде келесідей оскуляциялаушы элементтер жүйесі үшін ұйытқыған қозғалыс теңдеулері алынды: p, e, i, π, Ω, $\Phi(\tau)$ және a, e, i, π, Ω, λ. Құрамында $\Phi(\tau)$ динамикалық элементі бар оскуляциялаушы айнымалылар жалпы жағдайға пайдаланылады. Дербес жағдайда аталған аралық қозғалыс класы танымал Омаров-Хаджидеметриу конустық қимасы бойынша периодты қозғалысты қамтиды. Сонымен қатар барлық оскуляциялаушы геометриялық элементтер Армелинни-Джинс түріндегі кеплер элементтерімен сәйкес келеді. Эллипс бойынша апериодты қозғалыс пен Армелинни-Джинс негізіндегі кеплер элементтерінің бір-бірінен айырмашылығы динамикалық элемент τ перицентр арқылы өту моментінде. Қозғалыс жылдамдығы, сонымен қатар массалардың уақыт бойынша өзгеру қарқындылығы сияқты пропорционал «үйкеліс» ұйытқытушы күштер бар кезде, конустық қима бойынша апериодтық қозғалыс есебі ретіндегі Гюльден-Мещерский мәселесі түсіндіріледі. Айрықша көңіл бөлетін жәйт – жалпы жағдайда, конустық қима бойынша апериодтық қозғалыстың барлық элементтері және квазиконустық қима бойынша апериодтық қозғалыстың барлық элементтері массалардың өзгеру заңдылығы арқылы уақыт бойынша байланысады. Ұсынылған аралық қозғалыс класының Армелинн-Джинс түріндегі кеплер элементтерінен түбегейлі айырмашылығы осында. Алайда квазиэллиптикалық қозғалыстағы Кеплер теңдеулерінің аналогы массалары тұрақты классикалық екі дене есебін қатарға жіктеуді математикалық тұрғыдан қолдануға мүмкіндік береді. Сонымен қатар бұл айнымалылардың физикалық (динамикалық) мағынасы кеплер элементтерінен ерекшеленеді. Гравитациялы байланысқан жүйелер динамикасында, эволюция процесі кезеңінде, квазиконустық қима бойынша апериодты қозғалыстың ұйытқыған эксцентриситет аналогы ұзақ уақыт бойы бірден кем болады: $e(t)<1$. Әртүрлі жүйедегі оскуляциялаушы айнымалыларда Ньютон теңдеулері түрінде алынған ұйытқыған қозғалыс теңдеулерінің жаңа формаларын бейстационар гравитацияланатын жүйелердің динамикасын зерттеуде тиімді пайдалануға болады.

Түйін сөздер: Квазиконустық қима бойынша апериодты қозғалыс, айнымалы масса, ұйытқымаған қозғалыс, Ньютон теңдеулері түріндегі ұйытқыған қозғалыс теңдеулері, ұйытқу теориясы, бейстационар гравитациялanушы жүйелер.

М.Дж. Минглибаев[1,2], Ч.Т. Омаров[2], А.Т. Ибраимова[1,2]

[1]КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
[2]Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова, Алматы, Казахстан

НОВЫЕ ФОРМЫ УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Аннотация. В классической небесной механике хорошо развита теория возмущения на базе кеплеровского движения. Различные виды уравнения возмущенного движения описаны каноническими уравнениями, уравнениями Лагранжа и уравнениями Ньютона. При этом массы тел считается постоянными, тела точечными или сферическими. Классическая теория возмущения являются основными инструментами в изучении многих астрономических проблем. Современная наблюдательная астрономия свидетельствует о том, что массы реальных космических тел со временем меняются. Реальные небесные тела несферичные и нетвердые. Небесные тела нестационарные: в процессе эволюции меняются их массы, размеры, формы и структуры. В настоящее время существует ряд исследований с общиной библиографией работ по небесной механике тел переменной массы. Однако теория возмущения для нестационарных космических систем не достаточна развита. В работе рассмотрена модельная задача, предложенная в качестве исходного приближения для проблем небесной механики тел переменной массы. На основе этой модельной задачи развиты методы теории возмущений и получены новые формы уравнения возмущенного движения. Модельная задача как задача двух тел переменной массы при наличии дополнительных сил, пропорциональных скорости и взаимному расстоянию представляет собой класс промежуточных движений. Этот класс промежуточных движений описывает апериодическое движение по квазиконическому сечению. В настоящей работе на основе этого класса апериодического движения по квазиконическому сечению получены различные новые формы уравнения возмущенного движения в виде уравнений Ньютона. Исходя из известных уравнений возмущенного движения для оскулирующих геометрических элементов p, e, ω, i, Ω, θ в форме уравнении Ньютона, нами получены уравнения возмущенного движения для следующих системы оскулирующих элементов p, e, i, π, Ω, $\Phi(\tau)$ и a, e, i, π, Ω, λ. Оскулирующие переменные, включающие динамический элемент $\Phi(\tau)$, пригодны в общем случае. В частном случае, этот класс промежуточных движении содержит широко известное периодическое движения по коническому сечению Омарова-Хаджидеметриу. При этом все оскулирующие геометрические элементы совпадают с кеплеровскими элементами в смысле Армелинни – Джинса. Разница апериодическое движение по эллипсу и кеплеровских элементов в смысле Армелинни – Джинса заключается в динамическом элементе – τ момента прохождения через перицентр. На базе периодического движение по коническому сечению Омаров-Хаджидеметриу дали трактовку проблеме Гюльдена-Мещерского как задачу об апериодическом движении по коническому сечению при наличии возмущающей силы «трения», пропорциональной как скорости движения, так и темпу изменения массы со временем. Мы подчеркиваем, что в общем случае все элементы апериодического движения по коническому сечению и все элементы апериодического движения по квазиконическому сечению связаны со временем через законы изменения масс. Это принципиальное различие представленного класса промежуточных движений от кеплеровских элементов в смысле Армелинны-Джинса. Однако аналог уравнений Кеплера в квазиэллиптическом движении дает возможность формально математически использовать широко известные разложения в ряд классической задачи двух тел с постоянными массами. При этом физический (динамический) смысл этих переменных отличаются от кеплеровских элементов. В динамике гравитационно связанных систем, в ходе эволюции, возмущенный аналог эксцентриситета апериодического движения по квазиконическому сечению в течении длительного времени остается меньше единицы $e(t)<1$. Полученные новые формы уравнения возмущенного движения в виде уравнений Ньютона, в различных системах оскулирующих переменных можно эффективно использовать при исследовании динамики нестационарных гравитирующих систем.

Ключевые слова: апериодическое движение по квазиконическому сечению, переменная масса, невозмущенное движение, уравнения возмущенного движения в форме уравнения Ньютона, теория возмущения, нестационарные гравитирующие системы.

Information about authors:

Minglibayev Mukhtar Zhumabekovich, al-Farabi Kazakh National University, Fesenkov Astrophysical Institute, Chief Researcher, minglibayev@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-8724-2648;

Omarov Chingis Tukenovich, candidate of phys.-math.sciences, Fesenkov Astrophysical Institute, Chief Researcher. Fesenkov Astrophysical Institute, Chief Researcher. chingis.omarov@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-1672-894X;

Ibraimova Aigerim, al-Farabi Kazakh National University, doctoral student, Fesenkov Astrophysical Institute, Junior Researcher, ibraimova@aphi.kz, https://orcid.org/0000-0002-6998-8323

REFERENCES

[1] Omarov T.B. (1975) Dinamika gravitiruyushchikh sistem metagalaktiki // Izd. Nauka, Kazakhskoy SSR. Alma-Ata. 144 p. (in Russ.).

[2] Omarov T.B. (2002) (Editor) Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy. New-York: Nova Science Publ.Inc. 260 p.

[3] Bekov A.A., Omarov T.B. The theory of orbits in non-stationary stellar systems // Astron. Astrophys. Trans. 2003. Vol. 22(2). P.145-153.

[4] Eggleton P. (2006) Evolutionary processes in binary and multiple stars. Cambridge University Press. 332 p.

[5] Minglibayev M.Zh. (2012) Dinamika gravitiruyushchikh tel s peremennymi massami i razmerami. LAP LAMBERT Academic Publishing. 224p. (in Russ.).

[6] Cherepashchuk A.M. (2013) Tesnyye dvoynyye zvezdy. Chast' II.-M.: Fizmatlit. P.572. (in Russ.).

[7] Minglibayev M. Dzh., Omarov T.B. (1984) K nestatsionarnym model'nym zadacham nebesnoy mekhaniki. // Trudy AFN AN KazSSR. Alma-ata: Nauka. Vol.43. P.3-11. (in Russ.).

[8] Minglibayev M. Dzh. (1989) Model'nyye zadachi gravitiruyushchikh sistem peremennoy massy: Avtoref.diss…kand.fiz.-mat. nauk: 01.02.01. Alma-ata: KazGU. 16p. (in Russ.).

[9] Bizhanova S.B., Minglibayev M. Dzh., Prokopenya A.N. (2020) Issledovaniye vekovykh vozmushcheniy postupatel'no vrashchatel'nogo dvizheniya v nestatsionarnoy zadache dvukh tel s primeneniyem komp'yuternoy algebry // Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki. Vol.60(1). P.27-36. (in Russ.).

[10] Hadjidemetriou J.D. (1967) Secular variation of mass and the evolution of binary systems // Advances in Astronomy and Astrophysics. N-Y, L., Acad. Press. V.5. P. 131-188.

[11] Minglibayev M. Zh., Mayemerova G.M. (2014) Evolution of The Orbital-Plane Orientations in the Two-Protoplanet Three-Body Problem with Variable Masses // Astronomy Reports. Vol.58(9). P.667-677.

[12] Minglibayev M. Zh., Prokopenya A.N., Mayemerova G.M., Imanova Zh.U. (2017) Three-body problem with variable masses that change anisotropically at different rates // Mathematics in Computer Science. Vol. 11(3-4). P.383-391.

[13] Prokopenya A., Minglibayev M., Shomshekova S. (2019) Applications of Computer Algebra in the Study of the Two-Planet Problem of Three Bodies with Variable Masses // Programming and Computer Software. V. 45(2). P.73–80.

[14] DOI:10.1134/S0361768819020087.

[15] Duboshin G.N. (1968) Nebesnaya mekhanika. Osnovnyye zadachi i metody. M.: Nauka. Glav. red. fiz.-mat. lit. 800p. (in Russ.)

[16] Subbotin M.F. (1968) Vvedeniye v teoreticheskuyu astronomiyu M.: Nauka, Glav. red. fiz.-mat. lit. 808p. (in Russ.).

[17] Lur'ye A.I. (1959) Uravneniye vozmushchennogo dvizheniya v zadache Keplera // Prikladnaya matematika i mekhanika. T.23(2). P.412-414. (in Russ.).

[18] Loytsyanskiy L.G., Lur'ye A.I. (1955) Dvizheniye natural'nogo triedra trayektorii tochki. V kn. Kurs teoreticheskoy mekhaniki. Tom 1, 6-izd. GITTL. Moskva. 375p. (in Russ.).

[19] Minglibayev M.Zh., Ibraimova A.T. (2019) mEquations of motion of the restricted three-body problem with non-isotropically variable masses with reactive forces // Izvestiya natsional'noy akademii nauk Respubliki Kazakhstan. Seriya fiziko-matematicheskaya. Vol.325(3). P.5-12. https://doi.org/10.32014/2019.2518-1726.18

[20] Minglibayev M.Zh., Ahmetrassulova A.A. (2012) Secular perturbations in the problem of translational rotational motion two axisymmetric non-stationary gravitating bodies with variable oblate. In: Classical and Elestial Mechanics. Selected Papers, L. Gadomski, P. Krasilnikov, A. Prokopenya (Eds.). Siedlce: Wydawnictwo Collegyim Mazovia. P.116-126.

[21] Minglibayev M. Dzh. Turdaliyev B.ZH. (1994) Prostranstvennyye dvizheniya v zadache Lapina // Astronomicheskiy zhurnal. Moskva «Nauka». Vol.71(2). P.334-336. (in Russ.).

[22] Prokopenya A.N., Minglibayev M. Zh., Beketauov B.A. (2015) Secular perturbations of quasi-elliptic orbits in the restricted three-body problem with variable masses // International Journal of Non-Linear Mechanics. Vol.73. P. 58-63. DOI:10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.007

[23] Minglibayev M., Shomshekova S. (2018) Analytical expressions of the perturbing functions in two planetary three - body problem with masses varying non-isotropically when available for reactive forces // Izvestiya NAN RK, seriya fiziko-matematicheskaya. Vol.319(3). P.134-163.