NEWS
OF THENATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X **https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.15**
Volume 2, Number 330 (2020), 58 – 66

UDK 517.977.8

U.M. Ibragimov[1], D.S. Kurakbayev[2], I. Orazov[3], E. Nyssanov[4]

[1,2,4]M.Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan
[3]International Kazakh-Turkish University H.A.Yasawi, Turkestan, Kazakhstan.
E-mail: us-ibr@mail.ru, kurakbayev_ds@mail.ru, isabek.orazov@bk.ru, nyssanb@mail.ru

ABOUT ONE INVARIANT MULTIVALUED MAPPING IN THE TASK OF THERMAL CONDUCTIVITY WITH TIME DELAY

Abstract. This paper considers a matter on the strong and weak invariance of the constant multi-valued mapping towards thermal conductivity equation with boundary control in the presence of time delay. Sufficient conditions for the strong and weak invariance of this multi-valued mapping were obtained for the heat transfer control task with a delayed argument with boundary and initial conditions. The concept of "invariant sets" is applied to a system with distributed parameters, the physical meaning of which is to "keep" the object in the desired state as long as possible by controlling it. At the same time, here object retention is understood not in the geometric sense, but in the sense of holding the average value relative to the volume of the object. The necessary conditions for keeping the object in the desired state are proposed. To solve the equations, we first expand the definition of the elliptic operator and the operator itself to a self-adjoint operator, and then consider the existence of a solution that belongs to the energy space of this operator. This uses the fact that the extended operator has generalized eigenvalues and generalized eigenfunctions that make up the complete system both in the energy space of the operator and in each space. In this case, a generalized solution is understood as a solution, because it is represented as a Fourier series whose coefficients satisfy infinite ordinary differential equations. Just in this system of differential equations there is a control parameter. An essential point in considering this task is that the controls are located on the border of the area. In this case, the control area is a convex compact polyhedron, and the restriction area and the terminal set are half-spaces. This, in certain conditions, allows the possibility of applying the obtained results in solving practical tasks.
Keywords: invariant set, control, multi-valued mapping, control of systems with distributed parameters, time delay.

1. Introduction

Note that there are theoretical and practical issues in the controllable systems with distributed parameters, incapable of solution with the help of known methods. Typical examples of such kind of tasks are retention of temperature in the acceptance limits in a specified volume, avoidance of undesirable conditions, etc.

Results in the matter about invariance of specified sets concerning systems with lumped parameters were obtained earlier in the works of A. Feuer, M. Heymann, V.N. Ushakov, Kh.G. Gusseinov, N.S. Rettiyev, A.Z. Fazylov and other authors [1-7]. As against the work [7], this paper considers problems with boundary control. The works [7] consider interesting applied problems on the control by convectors for heat distributions in a volume. As against the work, this paper considers tasks with boundary control.

The theory of differential equations with a deviating argument has been developed in various directions; natural formulations of tasks have been found [8–12].

As you know, many real controlled objects can be considered as objects with distributed parameters, in which control parameters can be located both on the right side of the equation and in boundary conditions.

In the work [13-15] considers tasks with distributed parameters.

Invariant sets with respect to a system with distributed parameters, the physical meaning of which is to keep the object in the desired state as long as possible by controlling it. Moreover, here the retention of the object is understood not in the geometric sense, but in the sense of holding the average value relative to the volume of the object. The works [16-19] considers questions of the invariance of given sets with respect to systems with distributed parameters. In particular, the paper [17] is devoted to the questions of the strong and weak invariance of a constant multivalued mapping with delay, and the paper [18] is devoted to a controlled process, which is described by an equation of parabolic type, with the control parameter participating in the additive form on the right side of the equation. This work [19] introduces concept of the invariance of a multi-valued mapping with respect to a system with distributed parameters. In [20], a numerically approximate method for solving of a control problem for integro-differential equations of parabolic type was considered.

This work considers a matter on the strong and weak invariance of the constant multivalued mapping towards thermal conductivity equation with boundary control in the presence of time delay.

A bounded region $\Omega\left(\subset R^n\right)$ will be called a piecewise-smooth boundary, if a boundary $\Gamma=\overline{\Omega}\setminus\Omega$ of the region Ω can be presented in the form $\Gamma=\sum_{j=1}^{N}\overline{A}j$, where $\Gamma_j\subset\Gamma$ - the set open towards topology, induced on Γ by the topology R^n. Each Γ_j - a connected surface of class C^1, i.e. for each point $x_0\in\Gamma_j$ it is possible to indicate ball $U_\varepsilon(x_0)$ by so small radius $\varepsilon>0$, that the set $\Gamma_j\cap U_\varepsilon(x_0)$ is defined by equation of the type $x_k=f_k(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n)$, where $f_k(\cdot)\in C^1$, $k,1\le k\le n$ is a some number.

Let Ω be the bounded region in R^n with the piecewise-smooth boundary. Through A let us denote the next differential operator [21]:

$$A\varphi=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right), \tag{1}$$

where functions $a_{ij}(x)\in L^\infty(\Omega)$ satisfy conditions: $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$ and

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\ge\gamma\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\ x\in\Omega \tag{2}$$

for any $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)\in R^n$. The inequality (2) is called a condition of uniform ellipticity of operator $A(1)$. As the domain of operator A space $\dot{C}^2(\Omega)$ is taken – the set of twice continuously differentiable functions.

Let P be operator, which is defined by the inequality

$$P\varphi=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij(x)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\cos(l,x)+k(x)\varphi,\quad x\in\partial\Omega,$$

where l - the unit vector of outer normal to $\partial\Omega$, $k(x)$ - given positive, continuous function in $\partial\Omega$.

It is known that the elliptic operator A with the boundary condition $P\varphi=0$, $x\in\partial\Omega$, has a discrete spectrum, i.e. eigenvalues λ_k such that $0<\lambda_1\le\lambda_2\le\ldots,\lambda_k\to+\infty$, and according Eigen functions $\varphi_k, x\in\Omega$, compose the complete orthonormal system in $L_2(\Omega)$ [21, 22]. As well as in [23] it is possible to introduce a scalar product and appropriate norm in the space $\dot{C}^2(\Omega)$. Let's denote completion of this space through $H_r=H_r(\Omega)$, where $r\ge0$ - parameter.

2. Methods.

Consider the next task on the control by heat exchange with time delay [24]

$$\frac{\partial z(t)}{\partial t}+Az(t)=z(t-h),\quad 0<t\le T, \tag{3}$$

with boundary

$$Pz(t)=u(t),\quad 0\le t\le T,\quad x\in\partial\Omega, \tag{4}$$

and initial

$$z(t)=z_0(t),\quad -h\le t\le 0 \tag{5}$$

conditions, where $z_0(\cdot)\in X$, $X=\{z(\cdot): z(t)\in H_r, -h\le t\le 0\}$. The controls are measurable functions $u(\cdot)\in H_r$, i. e. satisfying the condition $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^r\left(\int_{\partial\Omega}u(\tau)\varphi_k dx\right)^2<\infty$. Here $z(\cdot), u()$ are abstract functions, i.e. at each $t>0$ they are unique elements of the space H_r, h - positive fixed constant, T - positive number.

A solution of the problem (3)–(5) in H_r is defined by the Fourier method. If $f_k()$ denotes Fourier coefficients of the function $f(\cdot)$ towards the system $\{\varphi_k\}$, then solution of the problem (3)–(5) on the segment $[0,h]$ has the next view [24]

$$z(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(z_k^0 e^{-\lambda kt}+\int_0^t\left[z_{0k}(\tau-h)+\int_{\partial\Omega}u(\tau)\varphi_k dx\right]e^{-\lambda_k(t-\tau)}d\tau\right)\varphi_k, \tag{6}$$

where $z_k^0=z_{0k}(0)$, $k=1,2\ldots$. Using this solution, the solution is built on the segment $[h,2h]$:

$$z(t+h)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(z_k(h)e^{-\lambda_k t}+\int_0^t\left[z_k(\tau)+\int_{\partial\Omega}u(\tau+h)\varphi_k dx\right]e^{-\lambda_k(t-\tau)}d\tau\right)\varphi_k,$$

where $z_k(h)$ is defined from (6) at $t=h$. In the same manner, continuations of the solution are built for the next segments.

Further, through U we denote the totality of controls, which is specified below by a some positive number ρ.

Definition 1. A multivalued mapping $D:[-h,T]\to 2^R$, where $R=(-\infty,\infty)$, will be called strongly invariant on the segment $[-h,T]$ towards the problem (3)–(5), if for any $\langle z_0(t)\rangle\in D(t)$, $-h\le t\le 0$, and $u(\cdot)\in U$ the inclusion $\langle z(t)\rangle\in D(t)$holds for all $0<t\le T$, where $\langle\ \rangle$ - corresponding norm, $z(\cdot)$ - corresponding solution of the problem (3)–(5) [21-23].

Definition 2. A multivalued mapping $D:[-h,T]\to 2^R$, where $R=(-\infty,\infty)$, will be called weakly invariant on the segment $[-h,T]$ towards the problem (3)–(5), if for any $\langle z_0(t)\rangle\in D(t)$, $-h\le t\le 0$ there is control $u(\cdot)\in U$ such that $\langle z(t)\rangle\in D(t)$ for all $0<t\le T$, where $\langle\ \rangle$ - corresponding norm, $z(\cdot)$ - corresponding solution of the problem (3)–(5).

Statement of the problem

This work studies the weak and strong invariance of the constant multivalued mapping of the next view

$$D(t)=[0,b],\quad -h\le t\le T,$$

where b - positive constant.

Our further objective is to find the connection between parameters T,b,ρ and λ_i so that to provide the weak or strong invariance of the multivalued mapping $D(t)$, $t\in[-h,T]$ towards the problem (3)–(5).

3. Main results.

A) Let $\langle z(t)\rangle=\|z(t)\|_{H_r}$, $0\le t\le T$ and

$$U=\left\{u(\cdot):\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^r\left(\int_{\partial\Omega}u(t)\varphi_k dx\right)^2}\le\rho,\quad t\in[0,T]\right\}.$$

Here $\|z(t)\|_{H_r}^2=\int_{\Omega}|z(t)|^2dx=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^r z_k^2(t),\quad 0\le t\le T$.

Assertion. For any function $u(\cdot)\in U$ the next inequality holds:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^r\left(\int_0^t\int_{\partial\Omega}e^{-\lambda_k(t-\tau)}u(\tau)\varphi_k dxd\tau\right)^2\le\left(\frac{1-e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1}\right)^2\rho^2.$$

The proof of the assertion follows from the next correlations:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^r\left(\int_0^t\int_{\partial\Omega}e^{-\lambda_k(t-\tau)}u(\tau)\varphi_k dxd\tau\right)^2=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^r\left(\int_0^t e^{-\frac{\lambda_k}{2}(t-\tau)}e^{-\frac{\lambda_k}{2}(t-\tau)}\int_{\partial\Omega}u(\tau)\varphi_k dxd\tau\right)^2\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^r\left(\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}d\tau\cdot\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}\left(\int_{\partial\Omega}u(\tau)\varphi_k dx\right)^2d\tau\right)\le\left(\int_0^t e^{-\lambda_1(t-\tau)}d\tau\right)^2\rho^2=\left(\frac{1-e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1}\right)^2\rho^2.$$

Theorem 1. If the follow condition is satisfied

$$\rho\le(\lambda_1-1)b,\tag{7}$$

then the multivalued mapping $D(t)=[0,b]$, $t\in[-h,T]$ is strongly invariant on the segment $[-h,T]$ towards the problem (3)-(5), for any $T>0$.

Proof. Let $z_0(t)$ with $c\|z_0(t)\|_{H_r}\le b$, $-h\le t\le 0$, and $u(t)$ with $\|u(t)\|_{H_r}\le\rho$, $0\le t\le h$, be arbitrary functions. Substituting these functions in the equation (3), we have solution of the problem (3)–(5) on the segment $[0,h]$ in the next view (6)

$$z(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(z_k^0 e^{-\lambda_k t}+\int_0^t\left[z_{0k}(\tau-h)+\int_{\partial\Omega}u(\tau)\varphi_k dx\right]e^{-\lambda_k(t-\tau)}d\tau\right)\varphi_k.$$

If we introduce denotation $f_k(\tau)=z_{0k}(\tau-h)+\int_{\partial\Omega}u(\tau)\varphi_k dx,\ k=1,2,\ldots$, then for the function $f(\cdot)$, with the Fourier coefficients $f_k(\cdot)$, we have

$$\|f(\tau)\|_{H_r}=\|z_0(\tau-h)+u(\tau)\|_{H_r}\le\|z_0(\tau-h)\|_{H_r}+\|u(\tau)\|_{H_r}\le b+\rho.\tag{8}$$

Hence,

$$\|z(t)\|_{H_r}^2=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^r\left(e^{-\lambda_k t}z_k^0+\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}f_k(\tau)d\tau\right)^2=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^r\left(e^{-2\lambda_k t}\left|z_k^0\right|^2+\right.$$

$$\left.2e^{-\lambda_k t}z_k^0\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}f_k(\tau)d\tau+\left(\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}f_k(\tau)\right)^2\right).$$

From here, using the Cauchy– Bunyakovskii inequality, assertion and inequality (8), we have

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^r\left(e^{-2\lambda_k t}\left|z_k^0\right|^2+2e^{-\lambda_k t}z_k^0\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}f_k(\tau)d\tau+\left(\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}f_k(\tau)\right)^2\right)\le$$

$$e^{-2\lambda_1 t}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^r\left|z_k^0\right|^2+2e^{-\lambda_1 t}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{\frac{r}{2}}z_k^0\lambda_k^{\frac{r}{2}}\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}f_k(\tau)d\tau+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^r\left(\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}f_k(\tau)d\tau\right)^2\le e^{-2\lambda_1 t}b^2+2e^{-\lambda_1 t}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^r\left|z_{0k}^0\right|^2}\times$$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^r\left(\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}f_k(\tau)d\tau\right)^2}+\left(\frac{1-e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1}\right)(b+\rho)^2\le e^{-2\lambda_1 t}b^2+$$

$$2e^{-\lambda_1 t}b\frac{1-e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1}(b+\rho)+\left(\frac{1-e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1}\right)^2(b+\rho)^2=\left(e^{-\lambda_1 t}b+\frac{1-e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1}(b+\rho)\right)^2.$$

Let
$$\chi(t)=e^{-\lambda_1 t}b+\frac{1-e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1}(b+\rho),\ 0\le t\le h.$$

Then we have $\chi(0)=b$, $\chi'(t)=-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}b+e^{-\lambda_1 t}(b+\rho)=e^{-\lambda_1 t}(-\lambda_1 b+b+\rho)$. It follows that when fulfilling condition of the theorem 1, $\chi'(t)\le 0$, i.e. the function $\chi(t)$ is nonincreasing. Thus, observing $\chi(t)>0$, we have $\|z(t)\|_{H_r}\le b$, $0\le t\le h$.

Now, by similar reasoning for the time interval $[h, 2h]$ we have $\|z(t)\|_{H_r}\le b$. It is seen from here that continuing this process it is possible to reach for any number $T>0$:

$$\|z(t)\|_{H_r}\le b,\quad 0\le t\le T.$$

By this, the theorem 1 is proved.

Theorem 2. If $\lambda_1\ge 1$, then the multivalued mapping $D(t)=[0,b]$ is weakly invariant on the segment $[-h, T]$towards the problem (3)-(5), where T is any positive number.

Proof. Let $\lambda_1\ge 1$. Let's show that the set $W=[0,b]$ is weakly invariant towards the problem (3)-(5). Assume that $z_0(\cdot)$ is arbitrary function from X, let $u(\cdot)=0$. Then from presentation of the solution (6) of the problem (3)-(5) we have

$$\|z(t)\|_{H_r}^2=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^r\left(e^{-\lambda_k t}z_k^0+\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}z_k(t-\tau)d\tau\right)^2\le e^{-2\lambda_1 t}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^r\left|z_k^0\right|^2+$$

$$2e^{-\lambda_1 t}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^r\left|z_k^0\right|\left|\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}\right|z_{0k}(t-\tau)\Big|d\tau+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^r\times\tag{9}$$

$$\left(\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}z_{0k}^0(t-\tau)d\tau\right)^2\le e^{-2\lambda_1 t}b^2+2e^{-\lambda_1 t}b\frac{1-e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1}b+\left(\frac{1-e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1}\right)^2b^2=$$

$$\left(e^{-\lambda_1 t}+\frac{1-e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1}\right)^2b^2.$$

Here, the next inequality and assertion are used:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^r\left|z_{0k}^0\right|\left|\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}|z_{0k}(t-\tau)|d\tau\right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^r\left|z_{0k}^0\right|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^r\left(\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}|z_{0k}(t-\tau)|d\tau\right)^2}$$

If we introduce notation $\chi(t)=e^{-\lambda_1 t}+\dfrac{1-e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1}$, $0\le t\le h$, then we have $\chi(0)=1,\ \chi'(t)=(1-\lambda_1)e^{-\lambda_1 t}\le 0$.

Hence, $0<\chi(t)\le 1$. From here and from (9) we obtain $\|z(t)\|_{H_r}\le b$, $0\le t\le h$. Sequentially using the same reasoning, if necessary, to the time intervals $[jh,(j+1)h]$, $j=1,2,\ldots$ we come to the fact that $\|z(t)\|_{H_r}\le b$, at $-h\le t\le T$. The theorem 2 is proved.

Let $\langle z(t)\rangle=\|z(t)\|_{H_r}, 0\le t\le T$, and

$$U=\left\{u(\cdot):\ \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^r\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}\left(\int_{\partial\Omega}u(\tau+ih)\varphi_k dx\right)^2 d\tau\le\rho^2\int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)}d\tau\right\},$$

where $0\le t\le h$ and $i=-1,0,1,\ldots$.

Theorem 3. If $\rho\le(\lambda_1-1)b$, then the multivalued mapping $D(t)=[0,b]$ is strongly invariant on the segment $[-h,T]$ towards the problem (3)-(5), where T is any positive number.

Proof. Let $z_0(\cdot)$ be any element of the set X, satisfying the condition $\|z_0(\cdot)\|_{H_r}\in D(t)$, i.e. $\|z_0(\cdot)\|_{H_r}\le b$, $-h\le t\le 0$, and $u(\cdot)$ be any permitted control, i.e. $u(\cdot)\in U$. For $0\le t\le h$ we have

$$\|z(t)\|_{H_r}^2=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^r z_k^2(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^r\left(z_{0k}^0 e^{-\lambda_k t}+\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}z_{0k}(t-\tau)d\tau+\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}\int_{\partial\Omega}u(\tau)\varphi_k dxd\tau\right)^2 \quad (10)$$

Using the Cauchy– Bunyakovskii inequality and definition of control domain U, it is possible to show that

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^r\left(\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}z_{0k}(t-\tau)d\tau+\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}\int_{\partial\Omega}u(\tau)\varphi_k dxd\tau\right)^2\le\left(\frac{1-e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1}\right)^2(b+\rho)^2$$

After simple calculations from (10) we obtain

$$\|z(t)\|_{H_r}\le be^{-\lambda_1 t}+\frac{\rho+b}{\lambda_1}\left(1-e^{-\lambda_1 t}\right). \quad (11)$$

Let's introduce the following function

$$\xi(t)=be^{-\lambda_1 t}+\frac{\rho+b}{\lambda_1}\left(1-e^{-\lambda_1 t}\right).$$

Note that $\xi(0)=b$. As $\xi'(t)=(-\lambda_1 b+\rho+b)e^{-\lambda_1 t}$, therefore under the condition $\rho\le(\lambda_1-1)b$, we have $\xi'(t)\le 0$. Thus, from (5) we obtain that for all $t\in[0,h]$ the inequality $\|z(t)\|_{H_r}\le b$ holds.

Accepting $z(h)$ as a new initial position of the considered system for the time interval, $[h,2h]$ we have

$$\|z(t+h)\|_{H_r}^2=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^r z_k^2(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^r\left(z_k^0(h)e^{-\lambda_k t}+\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}z_k(\tau)d\tau+\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}\int_{\partial\Omega}u(\tau+h)dxd\tau\right)^2,$$

where $0\le t\le h$.

Similarly, to the previous step it is possible to obtain the next evaluation

$$\|z(t+h)\|_{H_r} \le b,\ 0 \le t \le h .$$

Repeating the same reasoning we obtain that $\|z(t)\|_{H_r} \le b$, $-h \le t \le T$.

The theorem 3 is proved.

4. Conclusions. Many scientists have studied the conditions of strong and weak invariance of sets with respect to differential inclusion. This work continues these studies for systems with distributed parameters. The question of the strong and weak invariance of a multivalued mapping with respect to the heat equation with boundary control is considered. The results obtained are useful for specialists in control theory and differential games described by equations with distributed parameters.

О.М. Ибрагимов[1], Ж.С. Құрақбаев[2], И.Оразов[3] , Е.А.Нысанов[4]

[1,2,4] М.Әуезов атындағы Онтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан;
[3] Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ - түрік университеті, Түркістан, Қазақстан

КІДІРУЛЕР ОРЫН АЛАТЫН ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ЕСЕБІНДЕ ИНВАРИАНТТЫ КӨПМӘНДІ БЕЙНЕЛЕУ ТУРАЛЫ

Аннотация. Қазіргі таңдағы күрделі, өту ағыны жылдам және энерғосыйымдылықты үрдістерді басқару теориясының заманауи жетістіктері мен ғылыми-техникалық ілғерілеусіз іске асыру мүмкін емес. Көптеген нақты басқару нысандарын таралған параметрлі жүйелер ретінде қарастыруға болындығы белғілі, бұл ретте басқару параметрлері теңдеудің оң жағында немесе шекаралық шарт түрінде орналасуы мүмкін. Соцғы уақытта өндірістік және технолоғиялық үрдістерді автоматтандыруға барынша маңызды мән беріліп отыр, ал таралған параметрлі теңдеулер жүйесі – бұл үрдістердің математикалық модельдері болып табылады.

Басқару есептерін зерттеудің жаңа әдістерін құруда төмендегі сапалық сипаттағы сұрақтарға жауап беру қажет болады:

а) берілген G жиыны күшсіз (немесе күшті) инвариантты ма, яғни қаралып жатқан басқарылатын жүйенің G жиындағы кез келген бастапқы нүктесі үшін, еш болмағанда бір траектория табыла ма? Бұл траектория берілген нүктеден шығып G жиында толық жата ма?

б) қаралып жатқан басқарылатын жүйеге күшсіз инвариантты G жиынның бос емес ішкі жиыны бар ма?

Сонымен қатар мынадай есеп туындайды: G жиынның тіршілік ядросын құру есебі, немесе қауінсіз аймақ құру, яғни қаралып жатқан басқару жиынына қатысты күшсіз инвариантты G жиынның ең үлкен ішкі жиынын табу. Айта кетейік, осы мәселе бойынша көптеген зерттеулер негізінен жинақталған параметрлі басқару жүйелеріне арналған. Ұынылып отырған жұмыста үдерістің үлгісін сипаттауда, нақты жағдайларда ақпараттың кешігіп келуі арнайы қосынды арқылы есепке алынады. Әдетте басқару параметрлері еркін болмайды, сондықтан оларға әртүрлі ғеометриялық және интегралдық шектеулер қойылады. Осы шектеулерден басқа басқару функциясы анықталған функционалдық кеңістіктен алынады.

Бұл жұмыста кідірулер орын алатын шекаралық басқарумен берілген жылуөткізгіштік теңдеуіне сәйкес тұрақты көпмәнді бейнелеулердің әлді және әлсіз инварианттылығы туралы мәселе қаралған. Кідірулер орын алатын аргументті шекаралық және бастапқы шарттарда жылу алмасуды басқару есебі үшін осы көпмәнді бейнелеулердің әлді және әлсіз инвариантты болуына жеткілікті шарттар алынған. Таралған көрсеткіштері бар жүйеғе қатысты «инвариантты жиын» ұғымынан пайдаланылған. Оның физикалық мағынасы объектіні басқару арқылы ниет еткен жай-күйде мүмкіндігінше ұзақ «ұстап тұру». Бұл ретте, объектіні ұстап тұру ғеометриялық тұрғыдан емес, объектінің көлеміне қарай орташа мәнді ұстап тұру деген ұғыммен түсіндіріледі. Объектіні ниет еткен жай-күйде ұстап тұру үшін кейбір жағдайларда жеткілікті шарттар ұсынылады. Теңдеулерді шешу үшін алдымен эллиптикалық оператордың мен оператордың өзіне-өзі түйіндеске дейін анықтау аймағы кеңейтіледі, содан кейін осы оператордың энерғетикалық кеңістігіне жататын шешімнің болуы қарастырылады. Бұл ретте, кеңейтілген оператордың толық жүйені және оператордың энерғетикалық кеңістігінде және әрбір кеңістікте құрайтын жалпыланған меншікті сандары мен жалпыланған меншікті функциялары бар факт пайдаланылады. Бұл жағдайда шешім жалпылама деп қарастырылады, яғни шешім коэффициенттері шексіз жай дифференциалдық теңдеулерді қанағаттандыратын Фурье қатары түрінде беріледі. Тап осы дифференциалдық теңдеулер жүйесінде басқару параметрлері кездеседі. Сондықтан, шешімді алу үшін Фурье әдісі, ал бастапқы есепті басқаруда Фурье коэффициенттері қолданылады.

Бұл мәселені қарастырудағы маңызды сәт, басқару элементтері аймақтың шекарасында орналасқан. Бұл ретте басқару аймағы дөңес ықшам көп қырлы, ал шектеу аймағы мен терминалдық көп - жартылай кеңістіктер болып табылады. Бұл белгілі бір жағдайларда алынған нәтижелерді практикалық есептерді шешуде қолдануға мүмкіндік береді.

Түйін сөздер: инвариантты жиындар, басқару, көпмәнді бейнелеу, таралған параметрлі жүйелерді басқару, кідіру.

О.М. Ибрагимов[1], Ж.С. Куракбаев[2], И. Оразов[3] , Е.А. Нысанов[4]

[1,2,4] Южно-Казахстанский университет им.М.Ауезова, Шымкент, Казахстан;
[3] Международный казахско-турецкий университет им.Х.А.Ясави, Туркестан, Казахстан

ОБ ОДНОМ ИНВАРИАНТНОМ МНОГОЗНАЧНОМ ОТОБРАЖЕНИИ В ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Аннотация. Современные сложные, быстро протекающие и энергоемкие процессы невозможно реализовать без дополнения их современными достижениями теории управления и научно-технического прогресса. Как известно, многие реальные управляемые объекты можно рассматривать как объекты с распределенными параметрами, в которых управляющие параметры могут находиться как в правой части уравнения, так и в граничных условиях. В последнее время всевозрастающее значение придается автоматизации производственных и технологических процессов, математическими моделями которых являются системы уравнений с распределенными параметрами. При разработке новых методов исследования задач управления следует ответить на следующие вопросы качественного характера:

а) является ли множество G сильно (или слабо) инвариантным, т.е. для любой начальной точки из G существует ли хотя бы одна траектория (все траектории) рассматриваемой управляемой системы, выходящая из данной точки, определенная на бесконечном интервале времени и целиком лежащая в G?

б) существует ли хотя бы одно непустое подмножество множества G, слабо инвариантное относительно данной управляемой системы?

Кроме того, возникают задачи: задача построения ядра живучести G, или то же самое безопасной зоны, т.е. максимального подмножества множества G, слабо (или сильно) инвариантного относительно рассматриваемой управляемой системы. Отметим, что почти все исследования по этой проблеме посвящены управляемым системам со сосредоточенными параметрами. В предлагаемой работе в описании модели процесса с помощью специального слагаемого учитывается то, что в реальных ситуациях все информация поступает с запаздыванием. Так как управляющие параметры не бывают произвольными, поэтому на них налагаются различные ограничения в виде геометрических и интегральных. Кроме этих ограничений, управляющие функции берутся из определенного функционального пространства.

В данной работе рассмотрен вопрос о сильной и слабой инвариантности постоянного многозначного отображения относительно уравнения теплопроводности с граничным управлением при наличии запаздывания. Для задачи управления теплообмена с запаздывающим аргументом с граничными и начальными условиями получены достаточные условия для сильной и слабой инвариантности данного многозначного отображения. Применено понятие – «инвариантные множества» относительно системы с распределенными параметрами, физический смысл которых заключается в том, что бы по возможности дольше «удержать» объект в желаемом состоянии с помощью управления им. При этом, здесь под удержанием объекта понимается не в геометрическом смысле, а в смысле удержания усредненного значения относительно объема объекта. Предложены необходимые условия для удержания объекта в желаемых состояниях. Для решения уравнений сначала расширяется область определения эллиптического оператора и самого оператора до самосопряженного, и затем рассматривается существования решения, принадлежащего энергетическому пространству данного оператора. При этом используется тот факт, что расширенный оператор имеет обобщенные собственные числа и обобщенные собственные функции, составляющие полную систему и в энергетическом пространстве оператора, и в каждом пространстве. В данном случае в качестве решения понимается обобщенное, потому что оно представляется в виде ряда Фурье, коэффициенты которого удовлетворяют бесконечным обыкновенным дифференциальным уравнениям. Как раз в этой системе дифференциальных уравнений присутствует управляющий параметр. Так что для получения решения применяется метод Фурье, а управление исходной задачи осуществляется через коэффициенты Фурье.

Существенным моментом рассмотрения данной задачи является то, что управления находятся на границе области. При этом область управления является выпуклым компактным многогранником, а область ограничения и терминальное множество - полупространствами. Это, в определенных условиях, позволяет

использовать возможность применения полученных результатов при решении практических задач.

Ключевые слова: инвариантное множество, управление, многозначное отображение, управление системами с распределенными параметрами, запаздывание.

Information about authors:

Ibragimov U.M. - candidate of physiko-mathematical Sciences, associate Professor, M.Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan, https://orcid.org/0000-0003-2047-6711

Kurakbayev D.S, candidate of physiko-mathematical Sciences, associate Professor, M.Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan, https://orcid.org/0000-0001-8424-830X

Orazov I., candidate of physical and mathematical Sciences, Professor, International Kazakh-Turkish University. H. A. Yasawi, Turkestan, Kazakhstan, https://orcid.org/0000-0002-4467-5726

Nyssanov E.A., doctor of physiko-mathematical Sciences, professor, M.Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan, https://orcid.org/0000-0002-6053-8262

REFERENCES

[1] Feuer A., Heymann M. $\Omega-$invariance in control systems with bounded controls. J. Math.Anal.And Appl.53,no.2(**1976**),266-276.

[2] Kurjanskiy A.B., Filippova T.F. Ob opisanii puchka vyjivayushih traektoriy upravlyaemoy sistemy. Differan.uravn. 23, 8(**1987**), 1303-1315.

[3] Guseynov KH.G., Ushakov V.N. Sil'no i slabo invariantnyye mnozhestva otnositel'no differentsial'nogo vklyucheniya. DAN SSSR. 303, 4(**1988**), 794-796.

[4] Rettiyev N.S. Invariantnyye mnozhestva sistem upravleniya. Kand.diss. Leningrad. **1979**.

[5] Fazylov A.Z. “O sushchestvovanii yadra vypuklogo mnozhestva v lineynykh diskretnykh upravlyayemykh sistemakh”, Matem. zametki, 58:1 (**1995**), 119–126; Math. Notes, 58:1, 757–761

[6] Fazylov A.Z. Dostatochnyye usloviya optimal'nogo dlya zadachi vyzhivaniya. PMM. 61, 3 (**1997**), 186-188.

[7] Alimov Sh. On the null-controllability of the heat exchange process, Eurasian Math. J., 2:3 (**2011**), 5-19

[8] Bellman R., Kuk K.L. Differentsial'no-raznostnyye uravneniya. M.: Mir, **1967**. 548 s.

[9] El'sgol'ts L.E., Norkin S.B. Vvedeniye v teoriyu differentsial'nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom. M.: Nauka, **1971**. 296 s.

[10] Shaldanbayev A.Sh., Shalenova S.M., Ivanova M.B., Shaldanbayeva A.A. // ON SPECTRAL PROPERTIES OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE FIRST ORDER EQUATION WITH DEVIATING ARGUMENT // /News of NAS RK. Physical-mathematical series. Volume 5, Number 327 (**2019**), 19–38. https://doi.org/10.32014/2019.2518-1726.56

[11] Shaldanbaev A.Sh. Criteria for Volterra property of differential operator of the first order with deviating argument, Bulletin of Karaganda University, “Mathematics” series, №3 (47) / **2007**, p.39-43.

[12] Akylbayev M.I., Beysebayeva A., Shaldanbayev A. Sh. On the periodic solution of the Coursat problem for a wave equation of a special form with variable coefficients., N e w s of the national academy of sciences of the republic of Kazakhstan physico-mathematical series Volume 1, Number 317 (2018), 34 – 50.

[13] Ibragimov U.M., Nysanov Ye.A., Kozhabekova P.A., Nysanov R.Ye. Dostatochnyye usloviya v upravlyayemykh sistemakh s raspredelennymi parametrami pri ogranicheniyakh na upravleniya // Vestnik KazNTU im. K.Satpayeva, -Almaty, №4 (110), **2015**. s.355-361.

[14] Ibragimov U.M. Neobkhodimyye usloviya invariantnosti otnositel'no sistemy s raspredelennymi parametrami // Vestnik YENU im.L.N.Gumilova, Astana, №2 (81), **2011**. s.57-62.

[15] Ibragimov U. Invariant sets of control systems with distributed parameters with time delay, Eurasian Math. J., 5:4 (**2014**), 70–78.

[16] Tukhtasinov M., Mustapokulov KH.YA. Ob invariantnykh mnozhestvakh pri geometricheskom i integral'nom ogranicheniyakh // Uzbekskiy matematicheskiy zhurnal, **2011**. № 3. S. 161-168.

[17] Tukhtasinov M., Mamadaliyev N.O., Mustapokulov KH.YA. Ob invariantnom postoyannom mnogoznachnom otobrazhenii v zadache teploprovodnosti s zapazdyvaniyem. // Uzbekskiy matematicheskiy zhurnal, **2017**. № 3. S. 129-142

[18] Tukhtasinov M., Ibragimov G.I., Mamadaliev N.O. On an Invariant Set in the Heat Conductivity Problem with Time Lag. Abstract and Applied Analysis. Hindawi Publishing Corporation, **2013**. PP.5-19.

[19] Tukhtasinov M., Mustapokulov K., Ibragimov G. Invariant Constant Multi-Valued Mapping for the Heat Conductivity Problem // Malaysian Journal of Mathematical Sciences 13(1): 61–74 (**2019**)

[20] Assanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. Numerically approximate method for solving of a control problem for integro-differential equations of parabolic type // News of NAS RK. Physical-mathematical series. Volume 6, Number 328 (**2019**), 13–24, https://doi.org/10.32014/2019.2518-1726.69

[21] Yegorov A.I. Optimal'noye upravleniye teplovymi i diffuzionnymi protsessami. -M.: Nauka, **1978**.

[21] Ladyzhenskaya O.A. Krayevyye zadachi matematicheskoy fiziki. -M., **1973**.

[23] Avdonin S.A., Ivanov S.A. Upravlyayemost' sistem s raspredelennymi parametrami i semeystva eksponent.UMKVO, Kiyev, **1989.**

[24] Tukhtasinov M., Ibragimov U. “Sets invariant under an integral constraint on controls”,Russian Math. (Iz. VUZ), 55:8 (**2011**), 59–65.