NEWS
OF THENATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X **https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.26**
Volume 2, Number 330 (2020), 142 – 148

UDC 514.182.7

G. Ivanov[1], Zh. Dzhanabaev[2], N. Umbetov[2], I. Borovikov[1]

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia;
[2]M. Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan.
E-mail: ivanov_gs@rambler.ru; djanabaev@mail.ru; nurlanumbetov@mail.ru; bif1986@mail.ru

SPATIAL TECHNICAL CURVES AS SMOOTH LINES OF THE ARCS NORMCURVES

Abstract. In solving applied problems one often encounters with the construction of spatial curves for a number of pre-set conditions. As a rule, the constructed curve is set by a set of pre-calculated or experimentally obtained conditions (points, tangents, values of curvature and torsion at these points). The horizontal and frontal projections (plan and profile) are calculated independently. As a result, the outline will consist of arcs of spatial curves no lower than the fourth order with unpredictable differential properties. The arcs of circular norm-curved spaces are devoid of this drawback.

The article discusses some theoretical questions of curve theory for a rational choice of smooth contour components. It is proposed to use arcs of cubic circles as components of a spatial smooth one-dimensional contour. A cubic circle, being a special case of a cubic ellipse, intersects an improper plane at a real point and at two cyclic points. Such curves have better differential properties from the standpoint of the monotonicity of changes in the values of the angles of inclination of the tangents, curvature, and torsion, which significantly affects the dynamic qualities of the contour being constructed.

Key words: normcurves, descriptive geometry, conical surface, method of rotating the plane, one-dimensional spatial outline, smoothness, component, intersection line, butt point.

The variety of technical problems of designing the various communications as a geometric component includes into itself the design of a spatial curve. As a rule, it is set by many pre-calculated or experimentally obtained geometric conditions (points, tangents, values of curvature and torsion at these points, etc.) [4,11,13]. At that, the horizontal and frontal projections are independently constructed, or its plan and profile are designed as one-dimensional contours. As a result, the desired curve is obtained as a line of intersection of two composite projecting cylindrical surfaces. The main advantage of this method is its simplicity, which is achieved by bringing a three-dimensional problem to the solution of two flat problems and using the normcurves of the plane as components. Normcurves are algebraic curves whose order is equal to the dimension of the space. A second-order curve as a normcurve of the plane is given by two points A and B, tangents t_A, t_B at these points, and an engineering discriminant $d=BC:NC$, where $T = t_A \cap t_B$, TC - is the median of the triangle ATB.

In modern graphic packages and computer-aided design systems, spatial curves are set parametrically, which makes calculations easy. They are represented as composite lines (Hermite curves, Beziers, splines of various types). The equations of their components have the form

$$x = f_1(p), \quad y = f_2(p), \quad z = f_3(p)$$

where cubic polynomials [2,5,7,9,10,12,14] are taken as functions f_1, f_2, f_3 . Graphs of these functions do not allow you to visually evaluate the geometric and differential properties of the curve they describe. As an example, on figure 1 shows the construction of projections $y = \varphi_1(x), z = \varphi_2(x)$ in three-dimensional space *Oxyz* of a parametrically given curve $x = f_1(p), y = f_2(p), z = f_3(p)$ of a four-dimensional space, where $f_1(p), f_2(p), f_3(p)$ – are the second-degree polynomials. Analysis of projection $y = \varphi_1(x), z = \varphi_2(x)$ of second-order parabolas shows that the original parametric given curve is a fourth-order spatial curve.

Thus, the simplicity of graphical construction of the components of the conture during manual construction and the simplicity of computational procedures in computer-aided design systems ultimately lead to the complication of the simulation result. In our case, this is expressed in an unjustified increase of the order of the components of the contour and their number from the geometric positions. This conclusion follows from the fact that the simplest spatial curves of the third order (normcurves of space) are not used as the components of the one-dimensional spatial contours.

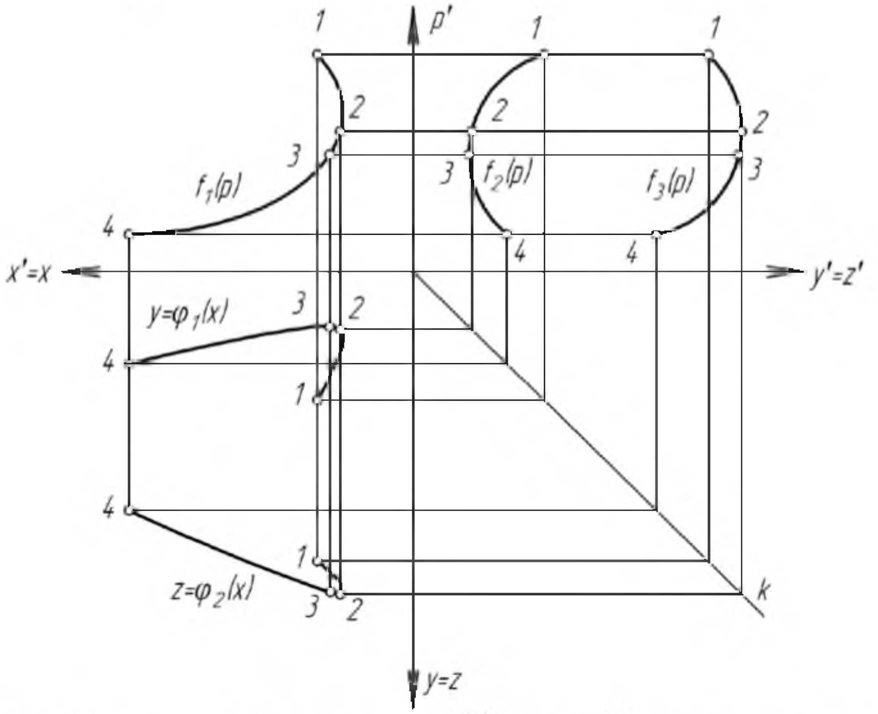

Figure 1 – The construction of projections $y = \varphi_1(x)$, $z = \varphi_2(x)$ in three-dimensional space $Oxyz$ of a parametrically defined curve of four-dimensional space $Ox'y'z'p'$

In this regard, the purpose of this publication is to present the theoretical foundations of the method proposed by the authors for modeling spatial technical curves in the form of smooth one-dimensional contours from arcs of normcurves.

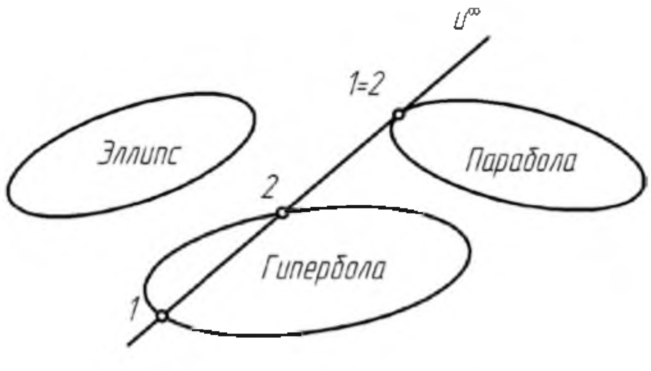

Figure 2 – The position of the second-order curves relative to the improper straight line

Since there is no information in the General technical literature about normcurves, we will first cover the questions necessary for further presentation. As the normcurves of plane (second-order curves) are classified by their position relative to the non-own straight line u^{∞} (figure 2), so and normcurves k^3 of three-dimensional space are classified by their position relative to the non-own plane λ^{∞} (figure 3) [1,6].

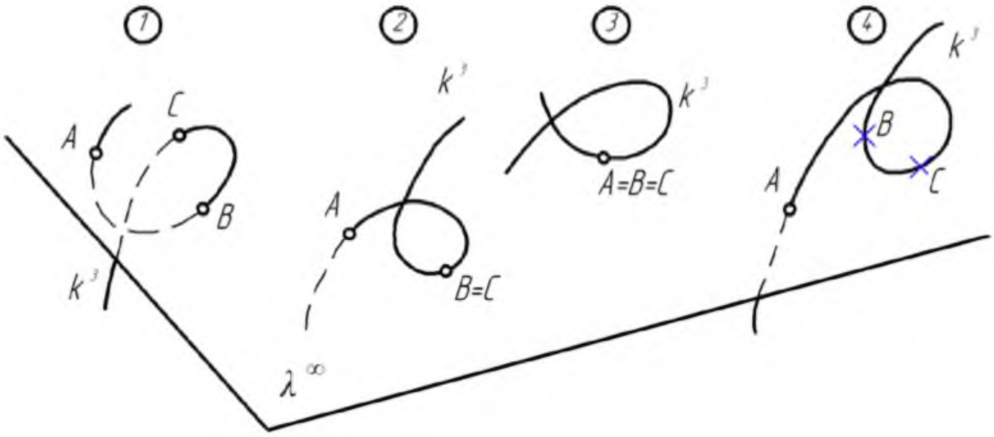

Figure 3 – The position of the norm curves of three-dimensional space relative to improper plane

1. k^3 - cubic hyperbola intersects λ^{∞} at three real different points.

2. k^3 – a hyperbolic parabola that intersects λ^{∞} at a real point A and touches λ^{∞} at two coinciding real points B=C.

3. k^3 - the cubic parabola intersects λ^{∞} at three coinciding points A=B=C (λ^{∞} is the touching plane of the curve k^3).

4. k^3 - cubic ellipse, intersects λ^{∞} at a real point A and at two imaginary-conjugate points B and C. A special case of a cubic ellipse is a cubic circle, for which the points B and C will be cyclic.

The algorithm for constructing normcurves of three-dimensional space in theoretical plan is obvious. Two second-order linear surfaces (quadrics) with one common generatrix l intersect along a fourth – order spatial curve that splits into their common generatrix l and the remainder - the desired norm curve k^3. The constructions will be simple if we take as these quadrics the conical surfaces β, δ with guide circles b and d belonging to the same plane γ (figure 4). In this case, the normcurve k^3 will be a circular curve (a cubic circle) that has the best dynamic properties among normcurves [3, 8, 9, 10].

In figure 4, conical surfaces $\beta(S_1, b)$, $\delta(S_2, d)$ with a common generatrix $l(S_1S_2)$, whose guiding circles b and d belong to the plane γ, intersect in a cubic circle k^3, where $K_0 = k^3 \cap \gamma$. The curve k^3 is constructed by the method of a rotating plane, that is, a beam of planes $l(\alpha_i)$ with an axis l: $\alpha_i \cap \beta = S_1B_i$, $\alpha_i \cap \delta = S_2D_i$, $S_1B_i \cap S_2D_i = K_i$, is used as intermediaries where $K_i \in k^3$. It passes through the vertices S_1, S_2 of the conical surfaces β and δ, since the tangent plane $\tau_d(S_2, t_d)$ of the surface δ intersects the surface β along its generator $S_1 1$, where $1 = t_d \cap b$, and the tangent plane $\tau_b(S_1, t_b)$ intersects the surface δ along the generator $S_2 2$, where $2 = t_b \cap d$.

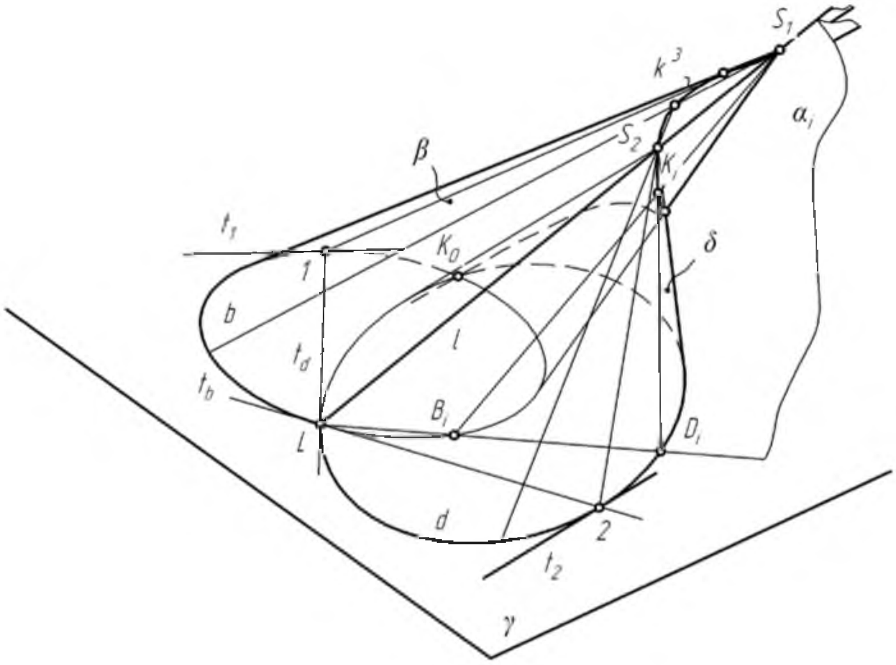

Figure 4 – Construction of a norm-curved three-dimensional space as a curve of intersection of two conical surfaces with a common generatrix

Thus, the incidence of the constructed curve k^3 to the vertices S_1, S_2 of the conical surfaces β and δ allows to use them as butt joints in the preparation of a spatial one-dimensional contour.

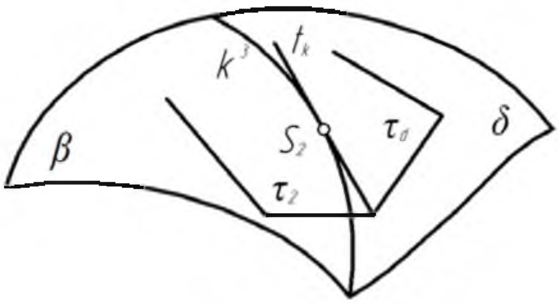

Figure 5 – Building a tangent at a butt point

To construct a smooth one-dimensional contour, it is required to specify the tangents t_{S_1} and t_{S_2} in the butt points S_1 and S_2, respectively. The tangent line t_k at any point, for example S_2, of the line k^3 of intersection of surfaces β and δ is constructed as the line of intersection of two tangent planes $\tau_d(S_2, t_d), \tau_2(S_2, t_2)$ drawn at a point S_2 to the surfaces β and δ (Fig. 4, 5). Here the point 2 - is different from the point L of intersection of the tangent t_b with the guide d of the conical surface δ.

From the foregoing, the sequence of constructing the component of a smooth one-dimensional spatial contour specified by an ordered array of points S_i with fixed tangents t_{Si}, from arcs of cubic circles k^3, follows:

1) two adjacent butt points S_1 and S_2 with the tangents $t_{S_1} \in S_1$, $t_{S_2} \in S_2$ specified in them are taken as the vertices of the auxiliary conical surfaces β and δ;

2) in a certain plane γ, which is chosen from the condition of simplicity of computational procedures (as a rule, a coordinate plane Oxy), the points $L = S_1 S_2 \cap \gamma$, $1 = t_{S_1} \cap \gamma$, $2 = t_{S_2} \cap \gamma$ and straight lines $t_b(L2)$, $t_d(L1)$ of intersections γ with planes, are built;

3) points $L, 1$ and tangent $t_1 \in 1$ define a circle b - a guide of the first conical surface β; points $L, 2$ and tangent $t_2 \in 2$ define a circle d - a guide of the second conical surface δ; the

arc $S_1 S_2$ of the normcurve k^3 of intersection of conical surfaces β and δ will be the desired component of the constructed one-dimensional contour; in points S_1 and S_2 it touches these lines $t_{S_1} \in S_1, t_{S_2} \in S_2$.

Thus, a method is proposed for constructing a spatial one-dimensional smooth contour, the components of which are the arcs of a circular normal curve - a cubic circle. As known from the theory of curves, such curves have better differential properties from the standpoint of the monotonicity of changes in the values of the angles of inclination of the tangents, curvature, and torsion, which significantly affects the dynamic qualities of the contour being constructed. This is achieved through the use as constituent arcs of curves of the smallest possible order, while in all known methods, the contour components are the arcs of non-circular curves of the forth or above order.

Ғ.С. Иванов[1], Ж.Ж. Жаңабаев[2], Н.С. Үмбетов[2], И.Ф. Боровиков[1]

[1]Н. Бауман атындағы Мәскеу мемлекеттік техникалық университеті, Мәскеу, Ресей;
[2]М. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан

НОРМҚИСЫҚТАР ДОҒАСЫНАН ҚҰРАЛҒАН ЖАНАМАЛАР РЕТІНДЕГІ КЕҢІСТІКТІК ТЕХНИКАЛЫҚ ҚИСЫҚТАР

Аннотация. Геометриялық компонент ретінде коммуникациялардың барлық түрлерін жобалаудың әр түрлі техникалық мәселелері кеңістіктік қисықтардың құрылысын қамтиды. Әдетте, олар бұрын есептелген немесе тәжірибе жүзінде алынған геометриялық жағдайлардың жиынтығымен анықталады (нүктелер, танғенстер, қисықтық және бұралу мәндері және т.б.). Бұл жағдайда көлденең және фронталь проекциялар (жоспар және профиль) дербес есептеледі. Нәтижесінде қалаған қисық екі құрама проекциялаушы цилиндрлік беттердің қиылысу сызығы ретінде алынады. Бұл әдістің басты артықшылығы - оның үшөлшемді есепті екі жазықтық есепті шешуге және қалыпты қисық сызықты компоненттер ретінде қолдану арқылы қол жетімділігі. Сонымен, контур құрастырушыларын қолмен жобалаудың ғрафикалық жолмен тұрғызудың қарапайымдылығы және есептеу техникасының автоматтандырылған жүйелеріндегі есептеу процедураларының қарапайымдылығы сайып келгенде, контур құрастырушыларының және олардың дәрежелерінің геометриялық тұрғыдан негізсіз күрделенуіне әкеледі. Бұл тұжырым үшінші дәрежелі ең қарапайым кеңістіктік қисықтар (кеңістіктің норм. қисықтары) бір өлшемді кеңістіктік контурлардың құрастырушылары ретінде пайдаланылмайтынынан шығады. Нәтижесінде контур алдын-ала болжанбайтын дифференциалдық касиеттері бар кем дегенде төртінші ретті кеңістіктік қисықтардың доғаларынан тұрады. Сондықтан тегіс кеңістіктік контурларды құру әдістерін әзірлеу - кезек күттірмейтін мәселе. Осыған байланысты, мақаланың мақсаты қарапайым қисық доғаларынан тегіс бір өлшемді контурлар түрінде кеңістіктік техникалық қисықтарды модельдеу үшін авторлар ұсынған әдістің теориялық негіздерін ұсыну болып табылады.

Тегіс контур компоненттерін ұтымды таңдау үшін мақалада қисықтар теориясының кейбір теориялық сұрақтары қарастырылады. Үш өлшемді кеңістіктің норм. қисық сызықтары шексіз алыс (дұрыс емес) жазықтыққа қатысты орналасуы бойынша жіктеледі деп атап өтілген. Сонымен қатар, норм. қисық сызықтарға қатысты келесі жағдайлар да болуы мүмкін:

- меншіксіз жазықтықты үш нақты нүктеде кесіп өтетін үшінші дәрежелі ғипербола;
- меншіксіз жазықтықты нақты нүктеде кесіп өтіп, түйіндескен екі нақты нүктеде жанап өтетін ғиперболалық парабола;
- меншіксіз жазықтықты түйіндескен үш нүкте арқылы қиып алатын үшінші дәрежелі парабола (меншіксіз жазықтық - қисыққа жанасатын жазықтық);

- меншіксіз жазықтықты нақты нүктеде және екі нақсыз түйісу нүктесінде қиып өтетін үшінші дәрежелі эллипс.

Үшінші дәрежелі шеңбер доғаларын кеңістіктік тегіс бір өлшемді контурдың компоненттері ретінде пайдалану ұсынылады. Кубтық эллипстің ерекше жағдайы бола отырып, куб шеңбері меншіксіз жазықтықты нақты нүкте мен екі циклдық нүктеде қиып өтеді. Мұндай қисық сызықтар контурдың динамикалық қасиеттеріне едәуір әсер ететін жанаманың көлбеулік бұрышы, қисықтық және бұралу мәндерінің өзгеруінің монотондылығы тұрғысынан жақсырақ дифференциалды қасиеттерге ие.

Түйін сөздер: нормқисық, сызба геометрия, конустық бет, айналмалы жазықтық әдісі, бір өлшемді кеңістіктік жанама қисық, тегістік, қиылысу сызығы, түйіндесу нүктесі..

Г.С. Иванов[1], Ж.Ж. Джанабаев[2], Н.С. Умбетов[2], И.Ф. Боровиков[1]

[1]Московский государственный технический университет им. Н. Баумана, Россия;
[2]Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ТЕХНИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ КАК ГЛАДКИЕ ОБВОДЫ ИЗ ДУГ НОРМКРИВЫХ

Аннотация. Многообразие технических задач проектирования всевозможных коммуникаций в качестве геометрической составляющей включает в себя конструирование пространственных кривых. Как правило, они задаются множеством предварительно рассчитанных или экспериментально полученных геометрических условий (точек, касательных, значений кривизны и кручений в данных точках и т.д.). При этом горизонтальная и фронтальная проекции (план и профиль) рассчитываются независимо. В результате искомая кривая получается как линия пресечения двух составных проецирующих цилиндрических поверхностей. Главным достоинством такого способа является его простота, которая достигается приведением трехмерной задачи к решению двух плоских задач и использованием в качестве составляющих нормкривых плоскости. Таким образом, простота графического построения составляющих обвода при ручном его конструировании и простота вычислительных процедур в системах автоматизированного проектирования в конечном итоге ведут к усложнению результата моделирования, что выражается в необоснованном с геометрических позиций повышении порядков составляющих обвода и их количества. Этот вывод следует из того факта, что в качестве составляющих одномерных пространственных обводов не используются самые простые пространственные кривые третьего порядка (нормкривые пространства). В результате обвод состоит из дуг пространственных кривых не ниже четвертого порядка с непрогнозируемыми дифференциальными свойствами. Поэтому разработка способов конструирования гладких пространственных обводов является актуальной задачей. В связи с этим целью настоящей публикации является изложение теоретических основ предлагаемого авторами способа моделирования пространственных технических кривых в виде гладких одномерных обводов из дуг нормкривых.

Для рационального выбора составляющих гладкого обвода в статье рассматриваются некоторые теоретические вопросы теории кривых. Отмечается, что нормкривые трехмерного пространства классифицируются по их положению относительно бесконечно удаленной (несобственной) плоскости. При этом возможны случаи, когда нормкривая является

- кубической гиперболой, пересекающей несобственную плоскость в трех действительных различных точках;
- гиперболической параболой, пересекающей несобственную плоскость в действительной точке и касающееся в двух совпавших действительных точках;
- кубической параболой, которая пересекает несобственную плоскость в трех совпавших точках (несобственная плоскость является соприкасающейся плоскостью кривой);
- кубическим эллипсом, пересекающим несобственную плоскость в действительной точке и в двух мнимо-сопряженных точках.

В качестве составляющих пространственного гладкого одномерного обвода предлагается использовать дуги кубических окружностей. Кубическая окружность, являясь частным случаем кубического эллипса, пересекает несобственную плоскость в действительной точке и в двух циклических точках. Такие кривые обладают лучшими дифференциальными свойствами с позиций монотонности изменения значений углов наклона касательных, кривизны и кручения, что существенно влияет на динамические качества конструируемого обвода.

Ключевые слова. нормкривая, начертательная геометрия, коническая поверхность, способ вращающееся плоскости, одномерный пространственный обвод, гладкость, составляющая, линия пересечения, стыковая точка.

Information about authors:

Umbetov Nurlan Sagynbekovich, M.Auezov South Kazakhstan State University, doctorate of technical Sciences, nurlanumbetov@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-1540-9410;

Dzhanabaev Zhaksylyk Zhumadilovich, M.Auezov South Kazakhstan State University, Professor, doctor of pedagogy, djanabaev@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-0150-9963;

Ivanov Gennadii Sergeevich, Bauman Moscow State Technical University, Professor, doctor of engineering, Honored Scientist of the Russian Federation, ivanov_gs@rambler.ru, https://orcid.org/0000-0002-8935-9495;

Borovikov Ivan Fuodorovich, Bauman Moscow State Technical University, bif1986@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-5237-080X

REFERENCES

[1] Andreev K.A. On geometric correspondences as applied to the question of constructing curve lines. Moscow, MGU, 1979. 166 p. (in Russ.).

[2] Bozhko A.N. Computer graphics.Moscow, MGU, 2007. 396 p. (in Russ.).

[3] Borovikov I.F. On the application of transformations in solving descriptive geometry problems.Geometriya i grafika – Geometry and Graphics, 2018, vol. 6, no. 2, pp. 78–84. (in Russ.).

[4] Vereshhaga V.M. Discrete-parametric method of geometric modeling of curved lines and surfaces. Abstract of Dr. Tech. Sci. Diss. Kiev, KISI Publ., 1996. 32 p. (in Russ.).

[5] Golovanov N.N. Geometric modeling.Moscow, Fizmatlit, 2002. 472 p. (in Russ.).

[6] Glagolev N.A. Projective geometry. Moscow, Vy'sshaya shkola, 1963. 344 p. (in Russ.).

[7] Guznenkov V.N., Zhurbenko P.A., Vinculina E.V. Autodesk Inventor 2016. Three-dimensional modeling of parts and the implementation of electronic drawings. Moscow, DMK Press, 2017. 124 p. (in Russ.).

[8] Ivanov G.S. Design of technical surfaces (mathematical modeling based on nonlinear transformations). Moscow, Engineering, 1987. 192 p. (in Russ.).

[9] Ivanov G.S. Constructive methods for studying parametrically defined curves. Geometry and Graphics, 2014, vol. 2, no. 3, pp. 3–6. (in Russ.).

[10] Ivanov G.S. Designing one-dimensional contours belonging to surfaces by displaying them on a plane. Geometry and Graphics, 2018, vol. 6, no. 1, pp. 3–9. (in Russ.).

[11] Konopackij E.V. Computational algorithms for modeling one-dimensional contours through predetermined points. Geometriya i grafika – Geometry and Graphics, 2018, vol. 6, no. 3, pp. 20–32. (in Russ.).

[12] Sal'kov N.A. Parametric geometry in geometric modeling. Geometry and Graphics, 2014, vol. 2, no. 3, pp. 7–13. (in Russ.).

[13] Osipov V.A. Machine methods for designing continuous-framework surfaces. Moscow, Mashinostroenie, 1979. 248 p. (in Russ.).

[14] Foks A., Pratt M. Computational Geometry.Moscow, Mir, 1982. 304 p. (in Russ.).

[15] Chetveruxin N.F. Projective geometry. Moscow, Prosveshhenie, 1969. 368 p. (in Russ.).

[16] Ivanov G.S. Theoretical Foundations of Descriptive Geometry: Textbook. Moscow, Engineering, 1998. 158 p. (in Russ.)

[17] Gallier J. Curves and Surfaces in Geometric Modeling: Theory And Algorithms. Philadelphia, University of Pennsylvania, 2015. 492 p.

[18] N. S. Umbetov, Zh. Zh. Dzhanabaev, G.S. Ivanov. Geometric modeling of laying geodetic lines on ruled surfaces. News of the national academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of geology and technical sciences. ISSN 2224-5278, Volume 1, Number 433 (2019), p. 163–169. http://www.geolog-technical.kz/index, php/en/archive, https://doi.org/10.32014/2019.2518-170X.20

[19] Sinchev B., Sinchev A.B., Akzhanova J., Mukhanova A.M. New methods of information search. News of the national academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of geology and technical sciences. ISSN 2224-5278, Volume 3, Number 435 (2019), p. 240 – 246. http://www.geolog-technical.kz/ index.php/ en/archive https://doi.org/10.32014/2019.2518-170X.91

[20] Kabylbekov K.A., Abdrakhmanova Kh.K., Omashova G.Sh., Kedelbaev B., Abekova J.A. Calculation and visualization of the electric field of a space-charged. News of the national academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of geology and technical sciences. ISSN 2224-5278, Volume 5, Number 431 (2018), p. 201–209. http://www.geolog-technical.kz/ index.php/ en/archive https://doi.org/10.32014/2018.2518-170X.26