NEWS
OF THENATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X **https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.14**
Volume 2, Number 330 (2020), 50 – 57

UDC 517.929

T.Sh. Kalmenov[1], A.Sh. Shaldanbayev[2] , M.I. Akylbayev[3], A.N. Urmatova[4]

[1,2]Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan;
[3]International humanitarian and technical University, Shymkent, Kazakhstan;
[4]South Kazakhstan State University M.O.Auezov, Shymkent, Kazakhstan.
E-mail: kalmenov.t@mail.ru, shaldanbaev51@mail.ru, musabek_kz@mail.ru urmatova81@bk.ru

ON COMPLETENESS OF ROOT VECTORS OF THE CAUCHY PROBLEM OF THE FIRST ORDER EQUATION WITH DEVIATING ARGUMENT

Abstract. The main objective of this paper is to study the conditions under which the system of finite-dimensional invariant (root) subspaces of the operator A turns out to be complete in H or in the range of the operator.

In the case of a general completely continuous operator, completeness may not take place. The simplest example of this kind is the integration operator

$$Af = \int_a^x f(t)dt, a \le x \le b \text{ ,}$$

which acts in the Hilbert space of square-integrable functions on the interval (a, b). In what follows, we will denote this space by $L^2(\mathrm{a,b})$.

In the present work, by the method of M.V. Keldysh, the completeness of the system of root vectors of the operator corresponding to the Cauchy problem of a first-order equation with a variable coefficient and a deviating argument is proved. The Volterra operator of the ordinary differential equation corresponding to the Cauchy problem is well known, so the result is in sharp contrast with the known facts. It can be expected that the results obtained will find application in theoretical physics, the theory of signal transmission, especially in fiber optic communications. Since the coefficient of the equation is not assumed to be real, the corresponding operator is not self-adjoint; therefore, questions of basicity were not considered. The result obtained is formulated in terms of the coefficient of the equation, and is close to the necessary, which is confirmed by the constructed example. This condition is a consequence of the method used; perhaps with other methods they can take a different look.

Note that the square of the operator A generates a sheaf of operators in the space $L^2(0,1)$; therefore, the results of the paper are of interest also for the theory of sheaf.

Keywords. Spectrum, deviating argument, root subspace, completeness, Keldysh theorem, compactness, Hilbert-Schmidt theorem, Green function, resolvent, sheaf of Keldysh operators.

1. One of the central concepts of the spectral theory of linear operators is completeness of the system of its root vectors. In this paper, we consider a linear non-self-adjoint operator acting in a separable Hilbert space H and having a discrete spectrum. The latter means that all points of the spectrum of the operator A (with the possible exception of one) are isolated and the corresponding subspaces are finite-dimensional. A finite-dimensional invariant subspace of the operator A related to some point λ_s of the spectrum $\sigma(A)$ is usually called the root subspace. We will denote it by R_s. The root subspace R_s can be characterized as a set of elements f satisfying for some integer $m \ge 1$ the following equation

$$(A - \lambda_s E)^m f = 0. \tag{1}$$

Discrete spectrum, as well known, is possessed by completely continuous operators, as well as unbounded (for example, differential) operators having completely continuous inverse operators. In fact, we consider only such operators.

The main objective of this paper is to study conditions under which the system of finite-dimensional invariant (root) subspaces of the operator A turns out to be complete in H or in the range of the operator.

We explain that a system of finite-dimensional invariant subspaces of an operator is commonly called complete in a Hilbert space H if any element $h \in H$ can be approximated with a predetermined accuracy by the norm by a finite linear combination of elements, each of which belongs to one of the invariant subspaces. It is well known that if some completely continuous operator is self-adjoint, then the system of its finite-dimensional invariant subspaces is complete in the range of the operator (in this case, the root subspaces turn out to be eigenvalues, in the formula (1) $m = 1$).

In the case of a general completely continuous operator, completeness may not take place. The simplest example of this kind is the integration operator

$$Af = \int_a^x f(t)\, dt, a \le x \le b, \qquad (2)$$

which maps in a Hilbert space of functions having a Lebesgue integrable square on the interval (a, b). Furthermore, we denote this space by $L_2(a, b)$. It is easy to verify that the operator (2), being completely continuous, has only a single point in the spectrum – zero, and does not have any eigenvectors. Consequently, it does not have finite-dimensional invariant subspaces.

Although the question about completeness of the system of root subspaces for operators with a discrete spectrum has long been considered in a large number of works, a decisive step on this path was made only in 1951 by M. Keldysh in the fundamental paper [1], where he proved the general theorem, in which completeness in a large number of boundary value problems for various series of equations with ordinary and partial derivatives was established. In his research, M.V. Keldysh relied on the results of his previous authors [1] - [7]. After this work, a number of papers [2] - [20], devoted to this theme, appeared. After 20 years, M.V. Keldysh continued his research [21]. This paper contains a detailed exposition of the first part of the work "On eigenvalues and eigenfunctions of some classes of non-self-adjoint equations" published by the author in [1]. According to the author, content of the paper was reported in 1951 at the meeting of the Moscow Mathematical Society. Then its manuscript was made available by the author to a number of mathematicians.

Note that the second part of this work did not appear, apparently, it was lost in archives of his students. Works in this direction are published today. In development of this direction in the theory of non-self-adjoint operators, the present paper is also written.

Compact operator A in a linear topological space E is called complete, if the system $\sum_0(A)$ of root vectors, corresponding to eigenvalues, which are nonzero, is complete in JmA. In the case $\ker A = 0$, it means that for the operator $A^{-1}: JmA \to E$ system of root vectors is complete in the domain (and complete in E, if $D(A^{-1}) = JmA$ is possible). In usual concrete situations original operator is A^{-1}, for example, $A^{-1} = L$ is a differential operator, $A -$ is an integral operator, generated by the Green's function of the operator L. Any self-adjoint and compact operator A in a Hilbert space is complete. It is natural to expect that for small perturbations of such operators the completeness is preserved. This expectation is justified if eigenvalues of the unperturbed operator quickly tend to zero. As noted above, the first general result in this direction belongs to I.V. Keldysh [1].

Keldysh Theorem [1]. Suppose that operator A in a Hilbert space H has the form $A = (I + R)S$, where S, R - are compact operators, moreover $S -$ is self-adjoint and its eigenvalues $\lambda_n \neq 0$ $(n = 0,1,2, \dots)$, taking into account the multiplicities, satisfy the condition

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda_n|^p \prec \infty$$

at some $p > 0$. Then the operator A - is complete.

The aim of this paper is to study the operator of the Cauchy problem for an equation with a deviating argument for completeness.

2. Research Methods.

Let $H = L^2(0,1)$ be a Hilbert space, and $q(x)$ be a continuous function. We consider the operator

$$Ay = S\frac{d}{dx}y + Qy, D(A) = \{y \in C^1(0,1) \cap [0,1], y(0) = 0\} \qquad (2)$$

Where S, Q are also operators, given by the formulas:

$$Sy(x) = y(1-x), \quad Qy = q(x)\cdot y(x) \tag{3}$$

The question is whether the operator A^{-1} will be complete in H. To answer this question, we study the operator A^{-1} according to the scheme of the Keldysh theorem.

Let

$$A_0 = SL \tag{4}$$

Where $L = \frac{d}{dx}$, $D(L) = \{y \in C^1(0,1) \cap C[0,1], y(0) = 0\}$.

Then we get:

$$A = A_0 + Q = A_0\left[I + A_0^{-1}Q\right] = \left[I + QA_0^{-1}\right]\cdot A_0,$$

$$A^{-1} = \left[I + A_0^{-1}Q\right]^{-1}\cdot A_0^{-1}, \tag{5}$$

$$\left[I + A_0^{-1}Q\right]^{-1} = \sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\left(A_0^{-1}Q\right)^m = I + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(A_0^{-1}Q\right)^m. \tag{6}$$

These equalities are true if A_0^{-1} exists and the inequality $\|A_0^{-1}Q\| < 1$ holds, therefore we study these operators in detail.

We consider the spectral problem

$$A_0 y = \lambda y \tag{7}$$

for them in expanded form

$$\begin{cases} -y'(1-x) = \lambda y(x) \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{8)-(9}$$

the following lemma holds.

Lemma 2.1. Spectral problem (8) +(9) has an infinite set of eigenvalues

$$\lambda_n = (-1)^n\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (n = 0,1,2,\ldots) \tag{10}$$

and the corresponding eigenfunctions

$$u_n(x) = \sqrt{2}\cdot\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x \tag{11}$$

which form an orthonormal basis in the space $L^2(0,1)$.

Lemma 2.2.

(a) Operator A_0^{-1} is self-adjoint and almost continuous;

(b) For any $p > 1$ we have

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{|\lambda_n|^p} \prec +\infty,$$

where λ_0^{-1} – are eigenvalues of the operator A_0^{-1}.

(c) $\|A_0^{-1}\| \le \frac{2}{\pi}$.

Proof.

(a) We show that if an operator A_0 is symmetric, then the operator A_0^{-1} is also symmetric; since it is defined throughout the space H, then it is self-adjoint.

(b) Due to Lemma 1, we have

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_n|^p}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^p}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\pi^p\left(n+\frac{1}{2}\right)^p}\le\left(\frac{2}{\pi}\right)^p+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^p n^p}\prec+\infty.$$

(c) Norm of the integration operator is known [3], it is equal, therefore

$$\|A_0^{-1}\|=\|L^{-1}S^{-1}\|=\|L^{-1}S\|\le\|L^{-1}\|\cdot\|S\|=\|L^{-1}\|=\frac{2}{\pi}.$$

Now we estimate norm of the operator $A_0^{-1}Q$.

$$\|A_0^{-1}Q\|\le\|A_0^{-1}\|\cdot\|Q\|\le\frac{2}{\pi}\cdot\|Q\|,$$

$$\|Qy\|^2=\int_0^1|q(t)y(t)|^2dt=\int_0^1|q|^2\cdot|y(t)|^2dt\le\left[\max_{0\le x\le1}|q|\right]^2\cdot\|y\|^2,$$

$$\|Qy\|\le\max_{0\le x\le1}|q|\cdot\|y\|,\Rightarrow\|Q\|\le\max_{0\le x\le1}|q|.$$

Thus,

$$\|A_0^{-1}Q\|\le\frac{2}{\pi}\cdot\max_{0\le x\le1}|q|. \tag{12}$$

Lemma 2.3. If

$$\max_{0\le x\le1}|q|\prec\frac{\pi}{2}, \tag{13}$$

then the operator

$$R=\sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m\left(A_0^{-1}Q\right)^m \tag{14}$$

is almost continuous.

Proof. From the conditions (12)+(13) it follows that the series (14) converges uniformly; since each term of this series is almost continuous, then the sum is also almost continuous operator. The proved Lemmas imply Theorem 3.1.

3. Research Results.

Theorem 3.1. If $\max_{0\le x\le1}|q|\prec\frac{\pi}{2}$, then the operator A

$$A=S\frac{d}{dx}+Q, D(A)=\{y\in C^1[0,1]\cap[0,1], y(0)=0\},$$

where $Sy(x)=y(1-x), Qy=q(x)-y(x)$ is complete in the space $H=L^2(0,1)$.

Our operator A is invertible, therefore its range is whole space $H=L^2(0,1)$, consequently, Theorem 3.2 also holds.

Theorem 3.2. If $q(x)$ is a complex continuous function, satisfying the condition

$$\max_{0\le x\le1}|q(x)|\prec\frac{\pi}{2},$$

then the system of root vector of the operator

$$A=S\frac{d}{dx}+Q, D(A)=\{y\in C^1(0,1)\cap[0,1], y(0)=0\},$$

where $Sy(x)=y(1-x), Qy=q(x)\cdot y(x)$ is complete in the space $H=L^2(0,1)$.

If $q(x)$ is a real function, then the operator Q:

$$Qy=q(x)\cdot y(x)$$

will be self-adjoint in $H = L^2(0,1)$. Then the operator

$$A = A_0 + Q$$

Is also self-adjoint. From

$$A^{-1} = \left[I + A_0^{-1}Q\right]^{-1} \cdot A_0^{-1}$$

it follows that the operator A^{-1} is almost continuous, moreover if $A^{-1}f = 0$, then $f = AA^{-1}f = 0$. Therefore $kerA^{-1} = 0$. We have proved the following Theorem 3.3.

Theorem 3.3. If $q(x)$ is a real continuous function, satisfying the condition

$$\max_{0 \le x \le 1} |q(x)| \prec \frac{\pi}{2},$$

then the system of orthonormal eigenvectors of the operator A:

$$Ay = y'(1-x) + q(x)y(x), \quad D(A) = \{y \in C^1(0,1) \cap [0,1], y(0) = 0\}$$

forms an orthonormal basis in the space $H = L^2(0,1)$.

Proof follows from the Hilbert-Schmidt theorem [36], and the above discussions.

4. Discussion.

Remark 4.1. Condition

$$\max_{0 \le x \le 1} |q(x)| \prec \frac{\pi}{2}$$

provided invertibility of the operator A, as the following example shows, it may not be invertible. Then the application of the Keldysh theorem becomes difficult.

Example 4.1. If

$$q(x) = -\frac{\pi}{2}, x \in [0,1]$$

then the equation

$$y'(1-x) + q(x)y(x) = 0$$

has a nontrivial solution. In fact, solution to this equation is the function

$$y(x) = \sin\frac{\pi x}{2},$$

which can be verified by direct calculation:

$$y'(x) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}, \quad y'(1-x) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}(1-x) = \frac{\pi}{2}\left[\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi x}{2}\right] = \frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi x}{2},$$

$$y'(1-x) + q(x)y(x) = \frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi x}{2} = 0.$$

Theorem 4.1. If symmetric operator A has a complete system of eigenvectors, then closure of this operator $\bar{A}$ is self-adjoint in H, in other words, the operator A is self-adjoint in essential.

5. Conclusion. If $q(x)$ is a real continuous function, satisfying the condition

$$\max_{0 \le x \le 1} |q(x)| \prec \frac{\pi}{2}$$

then

(***a***) system of orthonormal eigenvectors of the operator A:

$$Ay = y'(1-x) + q(x)y(x), \quad D(A) = \{y \in C^1(0,1) \cap [0,1], y(0) = 0\}$$

forms an orthonormal basis in the space $H = L^2(0,1)$.

(***b***) operator A is self-adjoint in essential.

The latter property is very important, see [21].

Т.Ш. Калменов[1], А.Ш.Шалданбаев[2], М.И.Ақылбаев[3], А.Н.Урматова[4]

[1,2]Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан;
[3]Халықаралық гуманитарлық-техникалық университет, Шымкент, Қазақстан;
[4]М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан Мемлекеттік Университеті, Шымкент, Қазақстан

АРГУМЕНТІ АУЫТҚЫҒАН, БІРІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ КОШИЛІК ЕСЕБІНІҢ ТҮПКІ ВЕКТОРЛАРЫНЫҢ ТОЛЫМДЫЛЫҒЫ ТУРАЛЫ

Аннотация. Сыңарлы операторлардың спектрәлді теориясы ретінде, олардың спектрәлдік қасиеттерін зерттеуге арналған кең ауқымды сұрақтар тізімі танылады, мысалы, спекрдің орналасу тәртібі мен асимтотикасы, түпкі векторлар тізімінің толымдылығы, түпкі векторлар системасының базистігі, түпкі векторлардан жасақталған қатарлардың жинақтылығын В. Б. Лидскийдің әдісі арқылы зерттеу. Кәделі мәселелерді зерттегенде, және дифференциалдық теңдеулер теориясында осыған ұқсас есептер кездеседі, біракта, бұл сәтте оператор үшін емес оператор мәнді функциялар үшін. Операторлардың спектрәлдік теориясының бұл түрін, әрине, оператор-функциялардың (о.-ф.) спектрәлді теориясы деп атаған жөн. Оператор-функциялардың (о.-ф.) спектрәлдік қасиеттерін зерттеу есептерінің қажеттілігіне математиктердің назары өткен ғасырдың басында ауғанымен, о.-ф.-лардың абстракті теориясының негізгі нәтиежелерін тек 1951 жылы М. В. Келдыш алды, бұл еңбекте түпкі векторлар системасының n-ретті толымдылығы ұғымы енгізілді,және λ-ге полиномәлді тәуелді оератор-функциялардың түпкі векторлар системасының n-ретті толымдылығы дәлелденді, кейінірек мұндай операторлар М. В. Келдыштың операторлар шоғыры делінді. Бұл теорема оператор-дифференциәлдік тенделердің Кошилік есептерін Фүре әдісімен шешуге жол ашты. Оператор-дифференциәлдік теңдеулердің басқа есептерін зерттегенде, М. В. Келдыштің n-ретті толымдылық ұғымының жеткіліксіздігі байқалды, сондықтан, еселік толымдылықты зерттеу есептері пайда болды.

Түпкі векторлар системасының толымдылығы сызықтық операторлардың спектрәлдік теориясының негізгі ұғымдарының бірі. Бұл еңбекте ғилберттің сепарабелді H кеңістігінде спектрі сирек сызықтық сыңарлы оператор қарастырылды. Бұл дегеніміз спектрдің бір нүктесінен басқа нүктелері оқшауланған, сондай ақ оларға сәйкес ішкеңістіктері сансалалы дегенді білдіреді. A операторының σ(A), спектрінің λ_s нүктесіне сәйкес сансалалы инвариантты ішкеңістігін түпкі кеңістік деп атау қабылданған. Біз оны R_s арқылы белгілейміз. Түпкі кеңістікті мына, $(A - \lambda_s E)^m f = 0$, $m \geq 1$ (1) теңдеудің шешімдер жиыны деп сипаттауға болады. Егер де m=1 болса, онда f векторы меншікті вектор болады, басқа жағдайда еншілес вектор деп аталады.

Әсіре үзіксіз операторлармен, керісі әсіре үзіксіз (мысалы, дифференциалдық) операторлардың спектрі сирек екені белгілі. Біздің операторымыз да осылардың қатарына жатады және біз тек сондай операторларды ғана карастырамыз.

Бұл еңбектің негізгі есебі түпкі кеңістіктер системасының толымдылығын қамтамасыз ететін шарттарды табу және зерттеу, ең болмағанда, олар оператордың мәндерінің жиынында толық болуы шарт. Егер ғилберттің H кеңістігінің әрбір h∈H элементін, әлгі түпкеңістіктерде жатқан элементтердің сызықтық комбинациясы арқылы, қалаған дәлдікпен, жуықтауға болса, онда әлгі сансалалы кеңістітер системасын осы H кеңістігінде толық деп санаймыз. Егер-де белгілі бір әсіре үзіксіз оператор жалқы болса, яғни оның сыңары оның өзі болса, онда оның сансалалы инвариантты ішкеңістіктер системасы, оның мендерінің жиынында толымды екені белгілі (бұл сәтте оның түпкі кеңістіктері меншікті болады, яғни (1) формулада m =1 болады).Сыңарлы операторлар үшін жағдай мүлдем басқаша мүмкін.

Толымдылық қасиеті әсіре үзіксіз операторлар үшін жалпылай емес. Оператордың әсіре үзіксіздігі оның толымды болуына жеткіліксіз. Жалпы жағдайда, толымдылық үшін оператордың әсіре үзіксіздігі жеткіліксіз. Мұның айқын мысалы ретінде, келесі,

$$Af = \int_a^x f(t)\,dt,\ a \leq x \leq b\ , \tag{2}$$

интегралдау операторын айтуға болады, бұл оператор мөділдерінің квадраттары Лебеғ бойынша $(a,\ b)$ интервалында интегралданатын функциялардың ғилберттік кеңістігінде әрекет етеді. Бұл кеңістікті біз әрі қарай, былай $L_2(a,\ b)$ белгілейміз. Бұл (2) оператордың әсіре үзіксіз болғанына қарамастан, бірде бір меншікті мәні жоқ, оның спектрі тек нөл нүктесінен тұратынын тексеру қыйын шаруа емес. Демек оператордың сансалалы инвариантты кеңістіктері жоқ.

Бұл еңбекте М.В.Келдыштың әдісімен аргументі ауытқыған коэффициенті айнымалы бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің Коши есебінің түпкі векторлар системасының толымдылығы көрсетілді. Бірінші ретті кәдімгі дифференциалдық теңдеудің Кошилік есебінің волтерлі екені көпке мәлім, сондықтан, бұл жай белгілі жайлардан ерекшеленеді. Алынған нәтиежелерді теориялық физика мен деректерді тарату теориясында, әсіресе оптикалық таралым жүйелерінде қолданыс табады деп күтуге болады.

Теңдеудің коэффициенті нақты болмағандықтан, есепке сәйкес оператор сыңарлы, сондықтан базистік туралы мәселелер назардан тыс қалды. Алынған нәтиежелер теңдеудің коеффициенті арқылы өрнектелді, және ол қажетті шартқа жақын, онысы нақты мысал арқылы дәйектелген..Бұл шарт қолданылған әдістің салдары,басқа әдіс қолданған сәтте оның түрі өзгеруі де мүмкін.

Қарастырылган оператордың квадраты $L^2(0,1)$ кеңістігінде операторлар шогырын туындатады, сондықтан алынган нәтиежелер операторлар шогырының теориясындада қызығушылық тугызуы мумкін.

Түйін сөздер. Спектр, ауытқыган аргумент, түпкі кеңістік, толымдылық, Келдыштың теоремасы,компәктілік, Гилберт-Шмидтің теоремасы, Гриннің функциясы, резәлвента.

Т.Ш. Калменов[1], А.Ш.Шалданбаев[2], М.И.Ақылбаев[3], А.Н.Урматова[4]

[1,2]Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан;
[3]Международный гуманитарно – технический университет, Шымкент, Казахстан;
[4]ЮКГУ имени М. Ауезова, г. Шымкент, Казахстан

О ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ ЗАДАЧИ КОШИ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Аннотация. Под спектральной теорией несамосопряженных операторов принято понимать широкий круг вопросов, связанных с изучением спектральных характеристик несамосопряженных операторов, например, исследование асимптотики и локализации спектра, полноты корневых векторов, базисов, составленных из корневых векторов, изучение возможности суммирования корневых векторов методом, предложенным В.Б. Лидским. Но во многих задачах, встречающихся в дифференциальных уравнениях и прикладных вопросах, возникает необходимость изучить аналогичные вопросы, но не для оператора, а для некоторой функции, принимающей значения во множестве операторов. Такое обобщение спектральной теории операторов естественно назвать спектральной теорией оператор-функций (о.-ф.). Хотя на необходимость исследования спектральных свойств о.-ф. внимание математиков было обращено еще в начале нашего века, тем не менее, первые основополагающие результаты в абстрактной теории о.-ф. были получены М. В. Келдышем. В работе, опубликованной в 1951 г., где введено важное понятие n-кратной полноты корневых векторов и доказана фундаментальная теорема об n-кратной полноте корневых векторов для полиномиально зависящих от λ о.-ф., получивших впоследствии название пучков операторов М. В. Келдыша. Эта теорема обосновывает принципиальную возможность применения метода Фурье при решении задачи Коши для широкого класса операторно-дифференциальных уравнений. Исследование же других задач для операторно-дифференциальных уравнений диктует изучение кратной полноты корневых векторов, отличное от n-кратной полноты, рассмотренной М. В. Келдышем.

Одним из центральных понятий спектральной теории линейных операторов является полнота системы его корневых векторов. В настоящей работе рассматривается линейный несамосопряженный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, и обладающий дискретным спектром. Последнее означает, что все точки спектра оператора A (за исключением, быть может, одной) являются изолированными и соответствующие им подпространства конечномерны. Конечномерное инвариантное подпространство оператора A, относящееся к некоторой точке λ_s спектра σ(A), принято называть корневым подпространством. Мы будем его обозначать через R_s. Корневое подпространство R_s может быть охарактеризовано как совокупность элементов f , удовлетворяющих при некотором целом m≥ 1 уравнению (A —$\lambda_s E)^m$f = 0, m$\geq$ **1.** (1)

Дискретным спектром, как известно, обладают вполне непрерывные операторы, а также неограниченные (например, дифференциальные) операторы, имеющие вполне непрерывные обратные. По существу, только такие операторы мы и рассматриваем.

Основной задачей настоящей работы является исследование условий, при которых система конечномерных инвариантных (корневых) подпространств оператора A оказывается полной в H или в области значений оператора. Известно, что если некоторый вполне непрерывный оператор является самосопряженным, то система его конечномерных инвариантных подпространств полна в области значений оператора (при этом корневые подпространства оказываются собственными, в формуле (1) m =1).

В случае же общего вполне непрерывного оператора полнота может и не иметь места.

Простейшим примером такого рода служит оператор интегрирования

$$Af = \int_a^x f(t)dt, a \leq x \leq b\ , \tag{2}$$

который действует в гильбертовом пространстве функций, обладающих интегрируемым по Лебегу квадратом на интервале $(a,\ b)$. Это пространство мы будем в дальнейшем обозначать через $L_2(a,\ b)$. Нетрудно проверить, что оператор (2), будучи вполне непрерывным, обладает лишь единственной точкой спектра – нулем и не имеет ни одного собственного вектора. Следовательно, конечномерные инвариантные подпространства у него вообще отсутствуют.

В настоящей работе, методом М.В.Келдыша доказана полнота системы корневых векторов оператора, соответствующего задаче Коши уравнения первого порядка, с переменным коэффициентом, и отклоняю-щимся аргументом. Вольтерровость оператора соответствующего задаче Коши обыкновенного дифферен-циального уравнения общеизвестно, поэтому результат резко контрастирует с известными фактами. Можно ожидать, что полученные результаты найдут приложение в теоретической физике, теории передачи сигналов, особенно в оптико-волоконной связи. Поскольку, коэффициент уравнения не предполагается вещественной, то соответствующий оператор не самосопряжен, поэтому вопросы базисности не рассматри-вались. Полученный результат сформулирован в терминах коэффициента уравнения, и близко к необходи-мому, что подтверждается построенным примером. Это условие является следствием использованного метода, возможно при других методах они могут принимать другой вид.

Отметим, что квадрат оператора А порождает пучок операторов в пространстве $L^2(0,1)$, поэтому результаты работы представляет интерес и для теории пучков.

Ключевые слова. Спектр, отклоняющийся аргумент, корневое подпространство, полнота, теорема Келдыша, компактность, теорема Гилберта-Шмидта, функция Грина, резольвента.

Information about authors:

Kalmenov T.Sh. - doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, academician of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, https://orcid.org/0000-0002-1821-2015;

Shaldanbayev A.Sh. – doctor of physical and mathematical Sciences, associate Professor, SKSU named After M. Auezov, Shymkent; employees of the Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty; http://orcid.org/0000-0002-7577-8402;

Akylbayev M. I. - candidate of technical Sciences, associate Professor, Vice-rector for research of the International humanitarian and technical University, Shymkent, Kazakhstan, https://orcid.org/0000-0003-1383-4592;

Urmatova A.N. - SKSU named After M. Auezov, senior lecturer of the Department of mathematics, https://orcid.org/0000-0002-1323-1639

REFERENCES

[1] Keldysh M.V. On eigenvalues and eigenfunctions of certain classes of non-self-adjoint equations, DAN77 (**1951**), 11-14.

[2] Cato T., Perturbation theory of Semi-Bounded Operators, Math. Ann. 125. (**1953**), 435–447.

[3] Car1eman, "Uber die asymptotische Vereilung der Eigenwerte partiller Differentialgleichungen Ber. Sachs. Akad. Wiss zu Leipzig, Math. Phys. Klass 88 (**1936**)r 119–134.

[4] Braud e r F., Strongly elliptic systems of differential equations, Contributions to the theory of partial differential equations, An. of Math. 33 (**1954**), 15–51.

[5] Livshits M.S., On spectral decomposition of linear non-self-adjoint operators, Mat. Sb 34 (76): 1 (**1954**), 145-199.

[6] Mukminov B.R., Expansion by eigenfunctions of dissipative kernel, DAN 99, No. 4 (**1954**), 499-502.

[7] Naimark M. A., On some criteria for completeness of a system of eigenvectors and associated vectors of a linear operator in a Hilbert space, DAN 98, No. 5 (**1954**), 727–730.

[8] Lidskii V. B. On completeness of the system of eigenvalues and associated functions of a non-self-adjoint differential operator, DAN 110, No. 2 (**1956**), 172-175.

[9] Lidsky V. B. On completeness of a system of eigenvalues and associated elements of a completely continuous operator, Dokl. USSR Academy of Sciences, **1957**, Volume 115, Number 2, 234–236.

[10] Naimark B. M., Completeness of the system of eigenvalues and associated functions of strongly elliptic systems of differential equations, DAN 112, No. 2 (**1957**), 198-201.

[11] Gokhberg I. Ts. and Krein M.G., Fundamentals of defective numbers, root numbers and indices of linear operators, Uspekhi Mat. XII, no. 2 (74) (**1957**).

[12] Allahverdiev D. E., On completeness of a system of eigenvalues and associated elements of non-self-adjoint operators close to normal, Dokl. USSR Academy of Sciences**,** **1957**, Volume 115, Number 2, 207–210.

[13] Lidsky V. B. Conditions for completeness of a system of root subspaces for non-self-adjoint operators with a discrete spectrum, Trudy MMO, **1959**, Volume 8, 83–120.

[14] Matsaev V.I. On a class of almost continuous operators, Dokl. USSR Academy of Sciences, **1961**, Volume 139, Number 3, 548–551.

[15] Keldysh M. V., Lidsky V.B. Issues of spectral theory of non-self-adjoint operators., Proceedings of the IVth Congress of Mathematicians, **1963**, vol. 1, pp. 101-120.

[16] Dikiy L. A. On twofold completeness of the system of eigenfunctions arising in a problem of mathematical physics, Funct. Analysis and its adj., **1967**, Volume 1, Issue 3, 24–32.

[17] Bitsadze A. V., Samarsky A. A. “On some simple generalizations of linear elliptic boundary value problems”, Dokl. USSR AS, 185: 4 (**1969**), 739–740.

[18] Akylbayev M.I., Beysebayeva A., Shaldanbayev A. Sh. On the periodic solution of the Goursat problem for a wave equation of a special form with variable coefficients (in English). N e w s of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan Physico-mathematical Series, Issn 1991-346, Volume 1, (**2018**), 34-50.

[19] Shaldanbaeva A. A., Akylbayev M.I., Shaldanbaev A. Sh., Beisebaeva A.Zh. The spectral decomposition of cauchy problem’s solution for laplace equation, N e w s of the NationaL Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan Physico - mathematical Series,Issn 1991-346X https://doi.org/10.32014/2018.2518-1726.10,Volume 5, Number 321 (2018), 75 – 87.

[20] Shaldanbayev A.Sh., Shaldanbayeva A.A., Shaldanbay B.A. On projectional orthogonal basis of a linear non-self -adjoint operator, N e w s of the national academy of sciences of the republic of Kazakhstan physic -mathematical series7,Issn 1991-346X , https://doi.org/10.32014/2019.2518-1726.15, Volume 2, Number 324 (2019), 79 – 89.

[21] Keldysh M. V., On completeness of eigenfunctions of certain classes of non-self-adjoint operators. Advances in Mathematical Sciences, **1971**, vol. XXVI, issue 4 (160), pp. 15-41.