NEWS
OF THENATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X **https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.22**
Volume 2, Number 330 (2020), 112 – 119

UDC 517.951, 517.957, 530.145, 539.12

S.R. Myrzakul, Zh. R. Myrzakulova

[1]L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan.
E-mail: srmyrzakul@gmail.com, zhrmyrzakulova@gmail.com

GAUGE EQUIVALENCE BETWEEN THE Γ-SPIN SYSTEM AND (2+1)-DIMENSIONAL TWO-COMPONENT NONLINEAR SCHRODINGER EQUATION

Abstract. At present, the question of studying multidimensional nonlinear evolution equations in the framework of the theory of solitons is very relevant. Their usefulness is confirmed by numerous scientific publications, articles and many international conferences. One of the results of these works is the conclusion that, each (1+1)-dimensional soliton equation corresponds to several (2+1)-dimensional integrable and nonintegrable extensions. This led to the intensive development of an important subclass of nonlinear evolution equations of the theory of integrable spin systems. The simplest example of an integrable spin system is the equation Myrzakulov-I (M-I). The M-I equation is a (2+1)-dimensional integrable generalization of the well-known Landau-Lifshitz equation and for y = x it is reduced to it. In this paper, we consider the Γ-spin system. This spin system corresponds to the 2-layer M-I equation. A matrix Lax representation for the aforementioned spin system in symmetric space is proposed. The main result of this work is the establishment of gauge equivalence between the Γ-spin system and the (2+1)-dimensional two-component non-linear Schrӧdinger equation.

Key words. Γ-spin system, 2-layer M-I equation, (2+1)-dimensional two-component nonlinear Schrodinger equation, gauge equivalence.

Introduction

Modern mathematics and physics are fluttering intensively. Domestic fundamental science is not lag behind. We can distinguish such directions as differential equations of various orders (see, for example, [1]), computational methods and Riemannian metrics [3]. No less interesting topic is mathematical modeling of problems [4]. In particular, one can note such works as [4] where the (2 + 1) -dimensional integrable Fokas-Lenels equation was considered. Also in [5] the work of A.A. Zhadyranova investigated the solutions of the Witten-Dijkgraf-E. Verlinda-G. Werlinde equations (WDVV).

The basis of research in the field of mathematical and theoretical physics is the knowledge of integrable nonlinear evolution equations (NEE). The solitons theory of integrable NEE of (1+1)-dimension is well developed. This is evidenced by the large number of works devoted to this field by well-known modern mathematicians and physicists, such as Ablovets M., Zakharov V.E., Laks P.D., Lipovsky V.D., Manakov S.V., Ishimori U., Sigur H., Shabbat A.B. and others (for example Refs.[6,7]). In recent decades, multidimensional, in particular (2+1) and (3+1)-dimensional NEE have been intensively studied. The interest in them is justified by the fact that with their help many physical processes are described in optics, radiophysics, in the dynamics of continuous media, particle physics and other fields. The more famous among (2+1)-dimensional integrable equations are the nonlinear Schrodinger equation (NLSE), the Ishimori equation, the sine-Gorden equation, the Kadomtsev-Petviashvili equation, the Zakharov-Manakov equation, the Davy-Stewartson equation, M-I etc [8-13]. Theories of solving problems for two-dimensional integrable equations are more complicated, since (2+1)-dimensional connected with systems of linear partial differential equations with variable coefficients. Spin systems are a significant section of the NEE.

(2+1)-dimensional two-component nonlinear Schrodinger equation has forms

$$iq_{1t} + q_{1yx} - v_1 q_1 - \omega_1 q_2 = 0, \tag{1}$$

$$iq_{2t} + q_{2yx} - v_2 q_2 - \omega_2 q_1 = 0, \tag{2}$$

$$ir_{1t} - r_{1yx} + v_1 r_1 + \omega_2 r_2 = 0, \tag{3}$$

$$ir_{2t} - r_{2yx} + v_2 r_2 + \omega_1 r_1 = 0, \tag{4}$$

$$v_{1x} - (2r_1 q_1 + r_2 q_2)_y = 0, \tag{5}$$

$$v_{2x} - (r_1 q_1 + 2r_2 q_2)_y = 0, \tag{6}$$

$$\omega_{1x} - (q_1 r_2)_y = 0, \tag{7}$$

$$\omega_{2x} - (r_1 q_2)_y = 0, \tag{8}$$

where $q_i = q_i(x,y,t)$, $r_i = r_i(x,y,t)$ are the complex functions and $v_i = v_i(x,y,t)$, $w_i = w_i(x,y,t)$, $(i = 1,2)$ are the real functions. It is integrated by the method of the inverse scattering method, thus, for its there is a Lax representation. Its Lax representation is given in the form

$$\Phi_x = U_1 \Phi, \tag{9}$$

$$\Phi_t = 2\lambda \Phi_y + V_1 \Phi, \tag{10}$$

λ-spectral parameter and $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$. Here the matrix operators U_1 and V_1, accordingly, have the forms

$$U_1 = -i\lambda\Sigma + Q, \tag{11}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_2 \\ r_1 & 0 & 0 \\ r_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

and

$$V_1 = i\begin{pmatrix} -\partial_x^{-1}(r_1 q_1 + r_2 q_2)_y & q_{1y} & q_{2y} \\ -r_{1y} & \partial_x^{-1}(r_1 q_1)_y & \partial_x^{-1}(r_1 q_2)_y \\ -r_{2y} & \partial_x^{-1}(q_1 r_2)_y & \partial_x^{-1}(q_2 r_2)_y \end{pmatrix}.$$

Lax representation for the Γ-spin system corresponding to the two-layer M-I equation

Γ-spin system which accord to the two-layer M-I equation is given by

$$i\Gamma_t + \frac{1}{2}[\Gamma, \Gamma_y]_x + 2i(z\Gamma)_x = 0, \tag{12}$$

$$z_x = \frac{i}{12} tr(\Gamma[\Gamma_x, \Gamma_y]) \tag{13}$$

here $[\Gamma_x, \Gamma_y] = \Gamma_x \Gamma_y - \Gamma_y \Gamma_x$ and called commutator. We introduce the following notation for Γ

$$\Gamma = g^{-1}\Sigma g, \quad \Gamma^2 = I \tag{14}$$

and

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{pmatrix} \in su(3).$$

Elements of the Γ matrix respond some restrictions

$$\Gamma_{33} = -(1+\Gamma_{11}+\Gamma_{22}),\ \Gamma_{ij} = \overline{\Gamma}_{ji}\ (i,j=1,2,3)$$

Theorem 1 The Lax representation for the Γ-spin system (12)-(13) is given in the form

$$\Psi_x = U_2\Psi, \tag{15}$$

$$\Psi_t = 2\lambda\Psi_y + V_2, \tag{16}$$

where

$$U_2 = -i\lambda\Gamma,\ V_2 = 2i\lambda z\Gamma + \frac{\lambda}{2}[\Gamma,\Gamma_y]. \tag{17}$$

Proof 1. From the compatibility condition the system (15) and (16), the matrices $U_2(x,y,t,\lambda)$ and $V_2(x,y,t,\lambda)$ satisfy the condition of zero curvature

$$U_{2t} - V_{2x} + [U_2,V_2] - 2\lambda U_{2y} = 0. \tag{18}$$

Then substituting expressions (15), (16) and (17) in the condition of zero curvature (18) obtain

$$-i\lambda\Gamma_t - 2i\lambda(z\Gamma)_x - \frac{\lambda}{2}[\Gamma,\Gamma_y]_x - i\lambda[\Gamma,V_2] + 2i\lambda^2\Gamma_y = 0,$$

$$[\Gamma,V_2] = \left[\Gamma, 2i\lambda z\Gamma + \frac{\lambda}{2}[\Gamma,\Gamma_y]\right] = \frac{\lambda}{2}[\Gamma,[\Gamma,\Gamma_y]] = 2\lambda\Gamma_y,$$

$$i\Gamma_t + \frac{1}{2}[\Gamma,\Gamma_y]_x + 2i(z\Gamma)_x = 0.$$

Finally, we derive

$$i\Gamma_t + \frac{1}{2}[\Gamma_x,\Gamma_y] + \frac{1}{2}[\Gamma,\Gamma_{xy}] + 2iz_x\Gamma + 2iz\Gamma_x = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\Gamma[\Gamma_x,\Gamma_y] + [\Gamma_x,\Gamma_y]\Gamma\right) + 4iz_x I = 0$$

$$z_x = \frac{i}{12}tr\left(\Gamma[\Gamma_x,\Gamma_y]\right).$$

So we have obtained sought-for Γ-spin system corresponding to the two-layer M-I equation

$$i\Gamma_t + \frac{1}{2}[\Gamma,\Gamma_y]_x + 2i(z\Gamma)_x = 0, \tag{19}$$

$$z_x = \frac{i}{12}tr\left(\Gamma[\Gamma_x,\Gamma_y]\right). \tag{20}$$

Thus we proved theorem 1.

Gauge equivalence between the Γ-spin system and (2+1)-dimensional two-component NLSE

In this section, will estabilish the gauge equivalence between the (2+1)-dimensional two component NLSE (1)-(8) and the Γ-spin system (12)-(13).

Theorem 2. The (2+1)-dimensional two component NLSE (1)-(8) and the Γ-spin system (12)-(13) are gauge equivalent to each other.

To prove this theorem, we introduce some concepts from the classical theory of gauge equivalence.

Definition 1. Equations admitting the Lax representation

$$\Psi_x = U_j\Psi,\ \Psi_t = V_j\Psi,\ j=1,2$$

or satisfying the condition of zero curvature

$$U_{jt} - V_{jx} + [U_j,V_j] = 0,\ j=1,2$$

are called integrable equations.

Definition 2. Integrable equations are called gauge equivalents if they are related by a transformation $\Phi_1 = g^{-1}\Phi_2$, $U_1 = gU_2g^{-1} + g_xg^{-1}$, $V_1 = gV_2g^{-1} + g_tg^{-1}$ with the matrix function g not conditional on pseudo-differential symbols by other independent variables of operators included in U and V.

Proof 2. Let pass to the immediate proof of the theorem. First, consider the following gauge transformation

$$\Psi = g^{-1}\Phi, \; g = \Phi_{\lambda=0},$$

where Φ is the solution to the system of the corresponding NLSE (1)-(8), and Ψ is the solution to the system corresponding to the Γ-spin system (14)-(15), and also $g(x,y,t)$ is an arbitrary 3×3 matrix function that is a solution to system (9)-(10) at $\lambda = 0$. The derivative of the function Ψ with respect to x is

$$\Psi_x = \left(g^{-1}\Phi\right)_x = g^{-1}\Phi_x - g^{-1}g_xg^{-1}\Phi \tag{21}$$

then using then substituting the expressions (9), (10) and (11) in (20) we get

$$\Psi_x = g^{-1}\left(-i\lambda\Sigma\Phi + Q\Phi\right) - g^{-1}Qgg^{-1}\Phi = -i\lambda g^{-1}\Sigma\Phi = -i\lambda g^{-1}\Sigma g\Psi = -i\lambda\Gamma\Psi = U_2\Psi$$

Next we take the derivative of Ψ by t

$$\Psi_t = -g^{-1}V_1gg^{-1}\Phi + g^{-1}\left(2\lambda\Phi_y + V_1\Phi\right) = 2\lambda g^{-1}\Phi_y = 2\lambda g^{-1}\left(g\Psi\right)_y = 2\lambda g^{-1}g_y\Psi + 2\lambda\Psi_y.$$

in total

$$\Psi_x = U_2\Psi, \Psi_t = 2\lambda\Psi_y + 2\lambda g^{-1}g_y\Psi.$$

The last formula depends on Ψ, we need to express Ψ in terms of Γ. From the expression (14) follows

$$\Gamma_y = \left(g^{-1}\Sigma g\right)_y = \left[\Gamma, g^{-1}g_y\right]$$

on the other hand

$$\Gamma_y = \left(g^{-1}\Sigma g\right)_y = g^{-1}\left[\Sigma, g_yg^{-1}\right]g.$$

Next we introduce notational convention

$$g_yg^{-1} = i\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \tag{22}$$

then from the equation (22) follows

$$\Gamma_y = 2ig^{-1}\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ -c_{21} & 0 & 0 \\ -c_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}g. \tag{23}$$

We also have that

$$\Gamma\Gamma_y = 2ig^{-1}\Sigma gg^{-1}\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ -c_{21} & 0 & 0 \\ -c_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}g = 2ig^{-1}\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & 0 & 0 \\ c_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}g \tag{24}$$

$$\Gamma_y\Gamma = 2ig^{-1}\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ -c_{21} & 0 & 0 \\ -c_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}gg^{-1}\Sigma g = -2ig^{-1}\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & 0 & 0 \\ c_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}g. \tag{25}$$

Considering (24) and (25) we get

$$\left[\Gamma, \Gamma_y\right] = 4ig^{-1}\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & 0 & 0 \\ c_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}g.$$

Now we need to express $g^{-1}g_y$ in terms of the matrix Γ. For this, we represent the matrix g_y in the following form

$$g_y = i\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} g = Wg$$

and $b_{11} = z$, $b_{22} = b_{33} = -z$. Here $z = z(x,y,t)$ is unknown function. Consequently $g^{-1}g_y = g^{-1}Wg$.

$$\Gamma_y = \left[\Gamma, g^{-1}g_y\right] = \left[g^{-1}\Sigma g, g^{-1}Wg\right] = g^{-1}[\Sigma, W]g = 2g^{-1}\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{21} & 0 & 0 \\ -b_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} g,$$

$$\left[\Gamma, \Gamma_y\right] = 4ig^{-1}\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & 0 & 0 \\ b_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} g,$$

$$g^{-1}\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & 0 & 0 \\ b_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} g = \frac{1}{4i}\left[\Gamma, \Gamma_y\right],$$

$$g^{-1}g_y = ig^{-1}Wg = izg^{-1}\Sigma + ig^{-1}\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & 0 & 0 \\ b_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} g = iz\Gamma + \frac{1}{4}\left[\Gamma, \Gamma_y\right].$$

Substituting the resulting expression in (14) we obtain

$$\Phi_t = 2\lambda\Psi_y + 2\lambda g^{-1}g_y\Psi = 2\lambda\Psi_y + 2\lambda\left(iz\Gamma + \frac{1}{4}\left[\Gamma, \Gamma_y\right]\right) = 2\lambda\Psi_y + V_2\Psi.$$

Finally, the Lax representation for the Γ-spin system has the form

$$\Psi_x = U_2\Psi, \tag{26}$$

$$\Psi_t = 2\lambda\Psi_y + V_2\Phi, \tag{27}$$

where

$$U_2 = -i\lambda\Gamma, \tag{28}$$

$$V_2 = 2i\lambda z\Gamma + \frac{\lambda}{2}\left[\Gamma, \Gamma_y\right]. \tag{29}$$

So, we derived the Lax representation for the spin system (14) - (15). The system compatibility condition (26) - (29) $\left(\Psi_{xt} = \Psi_{tx}\right)$ gives

$$U_{2t} - V_{2x} + \left[U_2, V_2\right] - 2\lambda U_{2y} = 0$$

or

$$i\Gamma_t + \frac{1}{2}\left[\Gamma, \Gamma_y\right]_x + 2i(z\Gamma)_x = 0,$$

$$z_x = \frac{i}{12}tr\left(\Gamma\left[\Gamma_x, \Gamma_y\right]\right).$$

Theorem 2 is proved.

Conclusions

In this paper, we considered the Γ-spin system corresponding to the 2-layer equation Myrzakulov-I. Farther a matrix form of the Lax representation was proposed for the equation under consideration in the symmetric space $su(n+1)/s(u(1)\oplus u(n))$ for the case $n=3$. This kind of Lax representation expands the possibilities of studying the Γ-spin system. In particular, using the matrix form of the Lax representation for the Γ-spin system, we established the gauge equivalence of this equation to a (2+1)-dimensional two-component NLSE. The obtained result is used for further research of spin systems when finding different soliton solutions.

Acknowledgements

This work was supported by the Ministry of Education and Science of Kazakhstan under the grant (Agreement №132 of 03/12/18).

Ш.Р. Мырзақұл, Ж. Р. Мырзакулова

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Г-СПИН ЖҮЙЕСІ МЕН (2+1)-ӨЛШЕМДІ ЕКІ КОМПОНЕНТТІ СЫЗЫКТЫ ЕМЕС ШРЕДИНГЕР ТЕҢДЕУІНІҢ АРАСЫНДАГЫ КАЛИБРОВТІ ЭКВИВАЛЕНТТІЛІК

Аннотация. Қазіргі уақытта көпөлшемді емес сызықты эволюция теңдеулерін солитондар теориясы шеңберіндегі зерттеу өте өзекті болып табылады. Олардың пайдалылыгы көптеген гылыми жарияланым-дармен, мақалалармен және көптеген халықаралық конференциялармен расталады. Осы жұмыстардың нәтижелерінің бірі-әрбір (1+1)-мөлшемді солитондық теңдеу бірнеше (2+1)-мөлшемді интегралданатын және интегралданбайтын кеңейтімдерге сәйкес келеді. Бұл сызықтық емес эволюциялық теңдеулер теориясының маңызды тобын интегралданатын спиндік жүйелер теориясының қарқынды дамуына әкелді. Спиндік жүйелер немесе Ландау-Лифшиц теңдеуілері математика мен физикадагы маңызды ұғымдардың бірі. Мысалы, геометрияда олар ортогональ түрінде Гаусс-Вайнардин теңдеуімен анықталады. Физикада спиндік жүйелер магнитиктердегі сызықтық емес процестерді зерттеуде кеңінен қолданылады. Интегралданатын және интегралданбайтын спиндік жүйелердің жаңа класстарының құрылулары мен зерттеулері (әсіресе көп өлшемділік жағдайында) жаратылыстану гылымдарының қажеттілігі мәселесінің өзектілігінен туындады. Интегралды спиндік жүйелер теориясын дамытуда маңызды рөлді М.Лакшмананның, В.Е. Захарова, Р.Мырзакулов, Л. А. Тахтаджян және басқалары атқарды. Интегралданатын спин жүйесінің қарапайым мысалы - Мырзакулов-I (M-I) теңдеуі. M-I теңдеуі - бұл танымал Ландау-Лифшиц теңдеуінің (2+1)-мөлшемді интегралданатын жалпылауы, ал y = x үшін өзі шыгады. Бұл теңдеудің интегралдылыгы кері шашырау есебі әдісіне дәлелденеді. Кері шашырау есебі әдісін әдетте сызықтық есептерді шешу үшін қолданылатын Фурье түрлендіру әдісін жалпылау деп қарастыруга болады. Бұл мақалада Г-спиндік жүйені қарастырамыз. Бұл спин жүйесі екі қабатты M-I теңдеуіне сәйкес келеді. Жогарыда аталган спиндік жүйеге симметриялы кеңістіктегі Лакс ұсынысының (ЛҰ) матрицалық түрі алынды. Бұл жұмыстың негізгі нәтижесі - Г-спиндік жүйе мен (2+1) -өлшемді екі компонентті сызықты емес Шредингер теңдеуі (СЕШТ) арасындағы калибровтық эквиваленттілікті құру. Солитондар теориясында калибровтық эквиваленттілік маңызды рөл атқарады. Интегралданатын (1+1) -өлшемді сызықтық емес теңдеулер үшін калибровтық эквиваленттілік ұгымын Захаров В.Е., Михайлов А.В., Тахтаджаана Л.А. енгізді. Калибровтық эквиваленттілік ұгымы сызықтық емес эволюцияның теңдеулердің (СЕЭТ) ЛҰ-ның бар болуымен тығыз байланысты. ЛҰ болуы СЕЭТ-дің интегралдануы үшін қажетті шарт екені белгілі. Демек, калибровтық эквиваленттілік интегралданбайтын, бірақ ЛҰ бар СЕЭТ арасында орын алады. Захаров В.Е., Тахтаджяна Л.А. жұмысында. Ландау-Лифшиц теңдеуі мен СЕШТ (1+1)-өлшемді тартымдылыгы бар жағдай үшін калибровтық эквиваленттілік анықталды. Липовский В.Д., Широкова А.В., Михалева В.Г. еңбектерінде. (2+1)-өлшемді солитондық теңдеулердің белгілі өкілдері - Ишимори теңдеуі және Дэви-Стюартсон теңдеуі арасында дәлелденді. Сондай-ақ, Р.Мырзакулов пен оның тобының жұмыстарында кейбір спин жүйелері мен СЕШТ арасында эквиваленттік орнатылғанын атап өтеміз. Мысалы, СЕШТ изотроптық теңдеуге M-III, Захаров теңдеуі M-IX, екі компонентті Камас-Холм теңдеуі Гейзенберг ферромагниттік теңдеуіне эквивалент екендігін көрсеткен. Осы жұмыс жогарыда аталган жұмыстарга ұқсас орындалган.

Түйін сөздер. Спин жүйесі, M-I 2-қабатты M-I теңдеу, (2+1)-өлшемді екі компонентті сызықты емес Шредингер теңдеуі, калибровті эквиваленттілік.

Ш.Р. Мырзақұл, Ж.Р. Мырзакулова

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

КАЛИБРОВОЧНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ МЕЖДУ Г-СПИН СИСТЕМОЙ И (2 + 1)-МЕРНЫМ ДВУХКОМПОНЕНТНЫМ НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ ШРЕДИНГЕРА

Аннотация. В настоящее время вопрос изучения многомерных нелинейных эволюционных уравнений в рамках теории солитонов является весьма актуальным. Их полезность подтверждается многочисленными научными публикациями, статьями и многими международными конференциями. Одним из результатов этих работ является вывод о том, что каждое (1+1)-мерное солитонное уравнение соответствует нескольким (2+1)-мерным интегрируемым и неинтегрируемым расширениям. Это привело к интенсивному развитию важного подкласса нелинейных эволюционных уравнений теории интегрируемых спиновых систем. Важные значения в математике и физике имеют спиновые системы. К примеру, в геометрии они отожествляются с уравнением Гаусса - Вейнгардена в его ортогональной форме. В физике спиновые системы успешно применяются в изучении нелинейных процессов в магнетиках. Построения и исследования новых классов интегрируемых и неинтегрируемых спиновых систем (особенно в многомерии) были вызваны актуальностью проблемы потребности естественных наук. Важную роль в становлении теории интегрируемых спиновых систем сыграли работы М. Лакшманана, В.Е. Захарова, Р. Мырзакулова, Л. А. Тахтаджяна и др. Простейшим примером интегрируемой спиновой системы является уравнение Мырзакулов-I (M-I). Уравнение M-I представляет собой (2+1) -мерное интегрируемое обобщение известного уравнения Ландау-Лифшица, и для y = x оно сводится к нему. Интегрируемость этого уравнение сводится к методу обратной задачи рассеяния. Метод обратной задачи рассеяния можно рассматривать как обобщение метода преобразования Фурье, который обычно применяется для решения линейных задач. В этой статье мы рассмотрим Г-спин систему. Эта спиновая система соответствует двухслойному уравнению M-I. Предложено матричное представление Лакса (ПЛ) $\Phi_x = U(x, y, t, \lambda)\Phi$, $\Phi_t = V(x, y, t, \lambda)\Phi$ для вышеупомянутой спиновой системы в симметричном пространстве. Основным результатом этой работы является установление калибровочной эквивалентности между Г-спиновой системой и (2+1)-мерным двухкомпонентным нелинейным уравнением Шредингера (НУШ). Калибровочная эквивалентность играет важную роль в теории солитонов. Захаровым В.Е., Михайловым А. В., Тахтаджяна Л.А. было введено понятие калибровочной эквивалентности для вполне интегрируемых (1+1)-мерных нелинейных уравнений. Понимание калибровочной эквивалентности тесно сязана со существованием ПЛ для нелинейных эволюционных уравнении (НЭУ). Хорошо известно, что существование представления Лакса является необходимым условием интегрируемости НЭУ. Следовательно, калибровочная эквивалентность также существует между неинтегрируемыми, но обладающими ПЛ НЭУ. В работе Захарова В.Е., Тахтаджяна Л.А. было установлена калибровочная эквивалентность уравнения Ландау-Лифщица и НУШ с притяжением для (1+1)-мерного случая. В работах Липовского В.Д., Широкова А.В., Михалева В.Г. были доказаны эквивалентность между наиболее известными представителями (2+1)-мерных солитонных уравнения - уравнение Ишимори и уравнение Дэви-Стьюартсона. Отметим также, что в работах Мырзакулова Р. и его группы были установлены эквивалентности между некоторыми спиновыми системами и НУШ. К примеру, НУШ калибровочно эквивалентное к изотропному уравнению M-III, уравнение Захарова к M-IX, двухкомпонентное уравнения Камассы-Холма к обобщенному уравнению ферромагнетика Гейзенберга, и так далее. Данная работа выполнена аналогично вышеупомянутым работам.

Ключевые слова: Спин система, 2-слойное уравнение M-I, (2+1)-мерное двухкомпонентное нелинейное уравнение Шредингера, калибровочная эквивалентность.

Information about authors:

Myrzakul Shynaray Ratbaykizi, associate professor of the department "General and theoretical physics" Eurasian National University named after LN. Gumilyov, PhD, candidate of phys.-math. science of the Republic of Kazakhstan; srmyrzakul@gmail.com; https://orcid.org/0000-0003-0044-7323;

Myrzakulova Zhaidary Ratbaykizi, PhD student of the Department of “Fundamental mathematics” Eurasian National University named after L.N. Gumilyov; zhrmyrzakulova@gmail.com; https://orcid.org/0000-0002-4047-4484

REFERENCES

[1] Bekbolat B., Kanguzhin B., Tokmagambetov N. To the question of a multipoint mixed boundary value problem for a wave equation / / Bulletin of national academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. Vol. 4, 2019. P. 76-82. (In Eng) https://doi.org/10.32014/2019.2518-1726.46

[2] Assanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. Numerical implementation of solving a boundary value problem for a system of loaded differential equations with parameter/ / Bulletin of national academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. Vol. 3, -2019. P. 77-84. (In Eng) https://doi.org/10.32014/2019.2518-1726.27

[3] Kalimoldayev M.N., Abdildayeva A.A., Akhmetzhanov M.A., Galiyeva F.M. Mathematical modeling of the problem of optimal control of electric power systems/ / Bulletin of national academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. Vol. 5, 2018. P. 62-67. (In Eng) https://doi.org/10.32014/2018.2518-1726.8

[4] Zhassybayeva M.B., Yesmakhanova K.R. Soliton Solutions for the (2+1)-dimensional Integrable Fokos-Lennells Equation Bulletin of national academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. Vol.4, №326. 2019. P. 14-21. ISSN 1991-346X (in Eng.) https://doi.org/10.32014/2019.2518-1726.80

[5] Zhadyranova A.A. Hierarcy of WDVV associativity equations for n = 3 and N = 2 case when $V_0 = 0$ with new system a_t, b_t, c_t // Bulletin of national academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. Vol. 5, №327. 2019. P. 70-77. ISSN 1991-346X (in Eng.) https://doi.org/:10.32014/2019.2518-1726.60

[6] Zaharov V.E., Tahtadzhyan L.A. Ekvivalentnost' nelinejnogo uravneniya SHredingera i uravneniya ferromagnetika Gejzenberga / /Teor.Mat.Fiz. Vol. 38, 1979. P. 26-34. (In Russ).

[7] Zaharov V.E., Manakov S.V. Mnogomernye nelinejnye integriruemye sistemy i metody ih reshenij// Zap. nauch. sem. LOMI. Vol.133. 1984. P. 77-91. (In Russ).

[8] Myrzakulov R., Lakshmanan M., Vijayalakshmi S., Danlybaeva A. Motion of curves and surface and nonlinear evolution in (2+1)-dimensions //Journal of Mathematical Physics. Vol. 39. 1998. P. 3765-3771. (in Eng.) https://doi.org/10.1063/1.532466

[9] Myrzakulov R., Nugmanova G.N.(2013) Integriruemye obobshcheniya uravneniya Landau-Lifshica // Master PO, Kazahstan. ISBN 978-601-301-063-2 (In Russian).

[10] Myrzakul A., Myrzakulov R. Integrable motion of two interacting curves, spin systems and the Manakov system// International Journal of Geometric Methods in Modern Physics C. Vol.14, 2017. P. 1750115. https://doi.org/ 10.1142/S0219887817501158 (in Eng.).

[11] Nugmanova G., Myrzakul A. (2019) Integrability of the Two-layer Spin System // Geom., Integr. and Quant. Proc. Of XXth Int. Conf., Sofia. P.208-214 (in Eng.).

[12] Myrzakulov R., Nugmanova G., Syzdykova R. Gauge equivalence Between (2+1)-Dimensional Continuous Heisenberg Ferromagnetic Models and Nonlinear Schrodinger-Type Equations // J. Phys.A: Math and Gen. Vol.31, 1998. P. 9535-9545 https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0305-4470/31/47/013 (in Eng.).

[13] Myrzakulov R., Vijayalakshmi S., Nugmanova G., Lakshmanan M. A (2+1)-Dimensional Integrable Spin Model: Geometrical and Gauge Equivalent Counterpart, Soliton and Localized Coherent Structures // Phys.Lett. A. Vol.233, №22. 1997 P. 391-396. (in Eng.) https://doi.org/10.1016/S0375-9601(97)00457-X