NEWS
OF THENATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X **https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.28**
Volume 2, Number 330 (2020), 159 – 165

UDC 514.182.7

N. Umbetov[1], Zh. Dzhanabaev[1], G. Ivanov[2]

[1]M. Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan;
[2]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
E-mail: nurlanumbetov@mail.ru; djanabaev@mail.ru; ivanov_gs@rambler.ru

DESIGN OF THE THIRD-ORDER CURVES OF THE TYPE THE HYPERBOLISM OF THE HYPERBOLA

Abstract. The solution of many engineering problems requires the construction of curves with given characteristics. One way to create the curves is to obtain a new curve by some transformations of an already known curve. This method is especially important because the line of the family of lines belonging to the prototype, is definitely displayed in the relevant lines, of the family of lines of the constructed surface. And knowing the properties of the transformation and the preimage, it is easy to establish the properties of the image.

In this regard, this article proposes an algorithm (method) for constructing a third-order curve, where the initial image is a parabola. The choice of the parabola is based on the fact that among the set of curves of the third order when modeling the technical curves in CAD, the most widely used is a cubic parabola due to its' uniqueness. The essence of the method is as follows. Each focal straight line of parabola crosses the parabola at two points, through which two straight lines (parabolic beams) run parallel to the focal axis, and a set of pairs of these lines form a bundle with an improper center. The set of points of intersection of the bundle of lines with the center at the point P with a projective to thatbundle of straight lines (parabolic beams) forms a curve of the third order, namely "hyperbolism of hyperbola" according to Newton's classification.

Key words: Second order curves, curves of the third order, cubic parabola, a number of second-order, bundle of the second order, hyperbolism of conic sections, the hyperbolism of the hyperbola.

Introduction. In the design of surfaces, especially non-linear, an important condition is to obtain its model, described by the simplest algebraic equations. This allows you to produce a component a complex surface, minimal cost and high accuracy. The line, line families belonging to the prototype are uniquely mapped on corresponding lines, on line families of the surface being constructed [3]. The study of the curve features and its properties by means of differential geometry is possible only if the curve is expressed in an analytical form, i.e. by an equation. However, in many problems of theoretical and especially of practical nature, before investigating the equation of the curve, it is necessary to make it on the basis of some data that somehow determine this curve and expressed in the problem conditions [5]. Therefore, knowing the properties of the transformation and the prototype, it is not difficult to establish the properties of the image. In this regard, research in this area is considered very relevant.

This article relates to the field of formation of third-order curves. It gives a method based on the use of an auxiliary parabola of the second degree.

Of the many third-order curves, the cubic parabola is the most widely used for modeling the technical curves in CAD because of its unambiguity. The parabola equation of the 3rd degree has the form

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

When considering the projective method of curve formation, the concept of the order of a series of points and a beam of lines is introduced [15, 16]. The notion of a second-order series and a second-order sheaf makes it possible to define with projective method algebraic curves of higher orders and classes. Thus, in General, if two sheaves of first-order lines lie in the same plane and are projective with each other, then the intersection points of their respective lines form a second-order curve, and similarly, if a sheaf of first-order lines and a sheaf of second-order lines lie in the same plane and are projective with each other, then the intersection points of their respective lines form a third-order curve.

In theoretical and engineering practice it is developed and proposed, taking into account the above mentioned, many ways of making the curves of the third order, where the original images are: a bundle of conic sections and projective to it pencil of lines; the points and straight lines; triangle; circle; parabola; conic sections; conic section and triangle, etc. [8,11, 12,13,14,17].

Materials and methods. It should be noted that for construction of the third order curve, where parabola is the original image, 28 different approaches (methods) presented [14].

In the monograph of G. S. Ivanov [8, 9, 10] "Construction of technical surfaces" it is proposed to use cubics given in the form

$$y = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

and obtained by means of cremonic involutions with non-owned center.

Here the involution I_3 is given by non-owned point F^{∞}, the axis *Oy* of the reference system, and an invariant cubic decayed into a straight line d^1 and a second-order curve d^2 (hyperbola with asymptot or a parabola with a vertical axis) (figure 1).

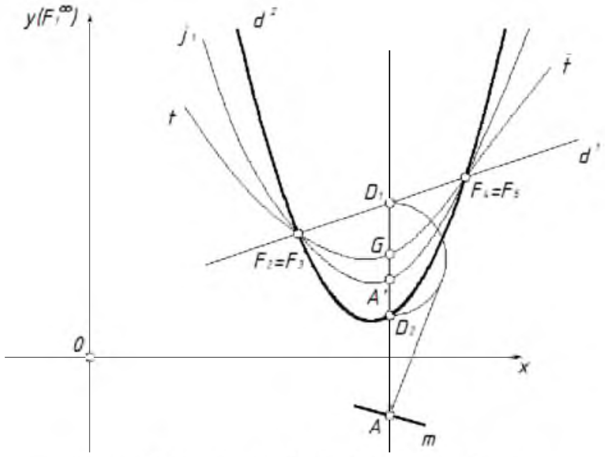

Figure 1 - Involution I_3 with non-owned point

We propose an algorithm (method) for constructing a third-order curve, where the initial image is parabola. The essence of the method is that the set of points of intersection of bundle of straight lines with the center at the point P with a projective to it bundle of straight lines (parabolic rays), forms a curve of the third order.

Let us have a parabola $y = ax^2 + bx + c$, with a vertex at the origin, c = 0, and its focal axis coincides with the ordinate axis (figure2) [4,6,7].

The straight lines of the beam P and the straight lines of the beam ***L*** form a bundle of first-order straight lines (figure 3).

The projective correspondence of the first-order beam ***P*** with the center at p and the beam ***L*** (parabolic rays) is established using the beam ***F*** of the focal lines of this parabola.

The position of the straight line of the first-order beam ***P*** with the corresponding straight line of the beam ***F*** of the focal lines can be determined by the angular displacement Δ.

If the straight line of the beam ***P*** of the first order is located at an angle α to the abscissa axis, then the corresponding straight line of the beam ***F*** of focal straight lines is located to the abscissa axis at an angle $\alpha + \Delta$ (figure 2).

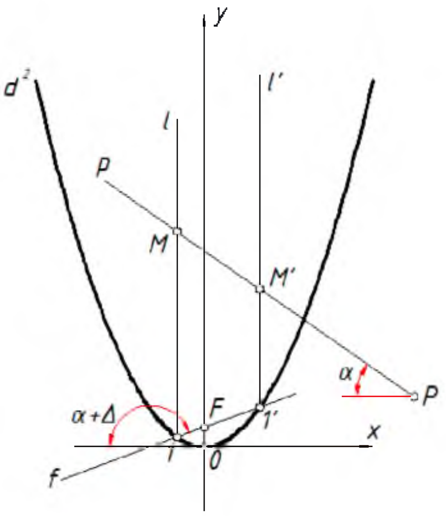

Figure 2 - Intersection points of projective lines

The focal straight line ***f*** crosses the parabola at points ***1, 1'***. Two straight lines ***l, l'*** (two parabolic rays) pass through these points. The line p intersects with these lines at points ***M, M'***.

Each pair of straight lines l_i, l_i' of the beam ***L*** is incident to the intersection points of the focal straight line f_i with a given parabola d^2.

To each straight p_i of the beam (***P***) corresponds two straight l_i of the beam (***L***) and Vice versa, to each straight l_i of the beam (L) corresponds one straight p_i of the beam (P).

Therefore, the correspondence between the straight of the beams (***P***) and (***L***) [1, 2] - valued.

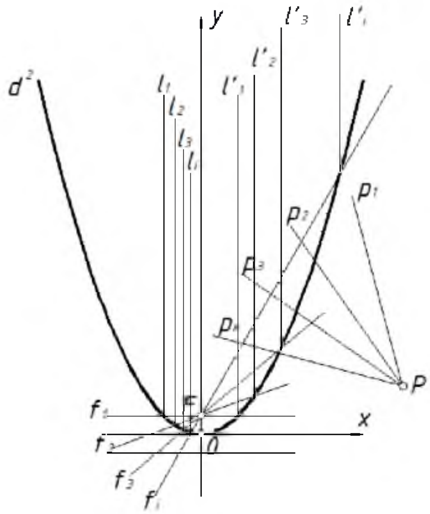

Figure 3 - Building a lot of points

The order of an algebraic curve, as a result of the intersection of the corresponding straight lines of two sheaves, is

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3$$

Thus, each straight line p_i of the beam (***P***) intersecting with two straight lines l_i of the beam (***L***), located on different sides of the axis of symmetry of the parabola, gives a set of points ***Mi***, constituting a curve of the third-order.

Derivation of the curve equation. We write the equation of the line passing through the focus F of the parabola

$$y = kx + t$$

here the value t is the deviation of the focus from the origin in the direction of the axis y. We calculate it from the parabola equation under the condition $x = 2y$ (according to the geometric definition of a parabola). Then,

$$t = \frac{1-2b}{4a}$$

Solving the equations of the parabola and the focal line together, we determine the coordinates x_1, x_2 of the points of their intersection.

Substituting the coordinates x_1, x_2 in the equation of the line passing through the point P, we calculate the coordinates y_1, y_2 of the points of intersection of this line with projectively corresponding to it the lines l_i of the bundle L.

The set of points $\{x_1, y_1\}$, $\{x_2, y_2\}$ computed with the variable α $(0 \le \alpha \le 180^\circ)$ make up a third-order curve of the type of hyperbolism of a hyperbola.

Results and discussion. The nature and shape of the obtained curves show that they belong to the fourth class of Newton's classifications- "hyperbolisms of conical sections".

Hyperbolism of conical section

$$yx^2 + ex = cy + d \quad (a = b = 0)$$

can be considered as a special case of a parabolic hyperbola in which the parabolic asymptote has split into two parallel lines: $x = \pm\sqrt{c}$. Hyperbolisms have three asymptotes: $y = 0, x = \pm\sqrt{c}$ and a double infinitely distant point

Hyperbolisms of the conic sections are divided into three kinds [14]. Studies have found that the position of the center of the bundle (P) determines belonging to a certain genus (Fig.4, 5 – hyperbolism of the hyperbola). And the value of the parameter affects the position of the asymptotes and the shape of the curves themselves.

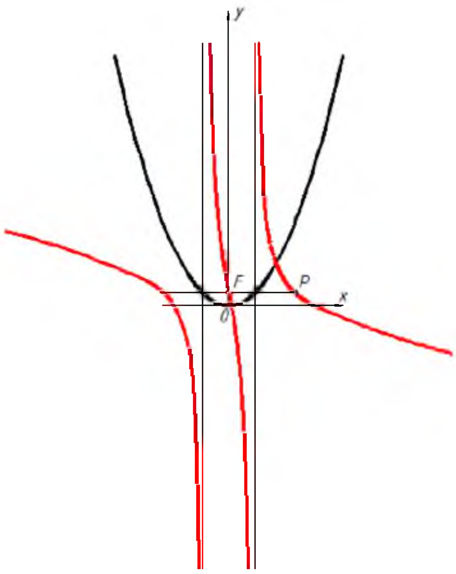

Figure 4 - The center P of the beam P is located outside the band bounded by the asymptotes

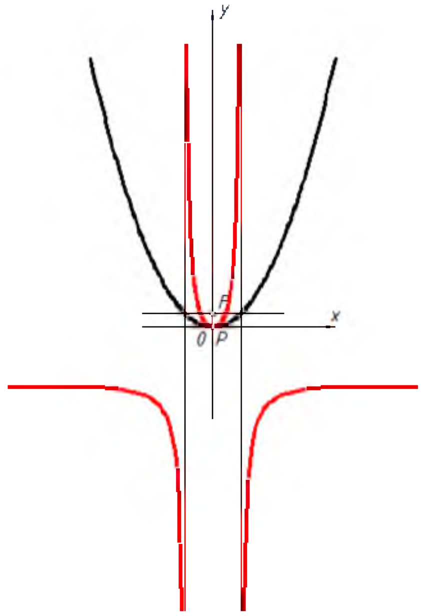

Figure 5 - The center P of the beam P is located between the asymptotes

Conclusion. We have developed an algorithm (method) for constructing a third-order curve, where the initial image is a parabola. In this case, the transformation results in a third-order curve belonging to the fourth class of Newton's classifications- "hyperbolisms of conical sections", namely hyperbolism of hyperbola. Studies have shown that changes in the parameter Δ and the position of the center P of the beam P can be controlled by the shape of the resulting curve.

Н.С. Үмбетов[1], Ж.Ж. Жаңабаев[1], Г.С. Иванов[2]

[1]М. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан;
[2]Н. Бауман атындағы Мәскеу мемлекеттік техникалық университеті, Мәскеу, Ресей

ГИПЕРБОЛАНЫҢ ГИПЕРБОЛИЗМІ ҮЛГІЛІ ҮШІНШІ ДӘРЕЖЕЛІ ҚИСЫҚТАРДЫ ҚҰРАСТЫРУ

Аннотация. Көптеген инженерлік мәселелерді шешу белгілі сипаттамалары бар қисық сызықтарды салуды қажет етеді. Қисық сызықтарды тұрғызудың бір әдісі – алдын-ала белгілі қисықты көптеген белгілі геометриялық түрлендіру әдістерінің бірі арқылы жаңа қисық сызықты алу. Қисықты құрастырудың бұл әдісі ең тиімді болып табылады. Ол жаңа қисықтарды анықтауға арналған сарқылмайтын құралдарды беріп қана қоймайды, сонымен қатар жаңа қисықтың қасиеттерін түрлендірілетін қисықтың кескіні ретінде анықтауға мүмкіндік береді. Сонымен қатар, бұл әдістің ерекше маңыздығы - түрлендірілетін кескінге жататын сызықтар тобы сәйкес сызықтарға, құрастырылатын бет сызықтарының тобына бір қалыпты кескінделеді. Ал түрлендіру әдісінің және бастапқы қисықтың қасиеттерін біле отырып, алынатын сызықтың қасиеттерін анықтау қиын емес. Беттерді, әсіресе қисық сызықты беттерді салу кезінде қарапайым алгебралық теңдеулермен сипатталған оның үлгісін алу маңызды шарт болып табылады. Бұл күрделі бетті бөлшекті құны кем де кем, және жоғары дәлдігімен жасауға мүмкіндік береді. Осыған байланысты, осы саладағы зерттеулер өте өзекті болып саналады.

Бұл мақала үшінші дәрежелі қисықтарды тұрғызу әдістеріне қатысты. Осыған байланысты, бұл мақалада екінші дәрежелі көмекші параболаны қолдануға негізделген үшінші дәрежелі қисық сызықты тұрғызу алгоритмі (әдіс) ұсынылған. Параболаны таңдаудың негізгі себебі - техникалық қисықтарды автоматтандырылған есептеу жүйелерінде модельдеуде екінші және үшінші дәрежелі көп сызықтардың арасында бірегейлік қасиетінің арқасында кеңінен қолданылатын парабола болып табылады. Бұл жерде, түрлендіру нәтижесінде Ньютонның классификациясы бойынша төртінші класқа жататын «конустық қималардың ғиперболизмдері» типті үшінші дәрежелі қисық сызық пайда болады - атап айтқанда ғиперболаның ғиперболизмы.

Ұсынылып отырған әдістің мәні келесідей. Бізге екінші дәрежелі d^2 параболасы және Р нүктесінде шоғырланған p сызықтар шоғы берілген делік. d^2 параболаның әрбір фокалдық сызығы осы параболаны екі нүкте арқылы қиып өтеді, ол нүктелер арқылы фокалдық оське параллель екі түзу (параболалық сәулелер) l, l' өтеді, және осы сызықтардың көптеген жұптары өзіндік емес центрмен шоқ құрайды. Центрі Р, p сызықтар шоғының оған проективті түзулер шоғымен (параболалық сәулелер) l, l' қиылысу нүктелерінің жиынтығы d^3 үшінші дәрежелі қисық сызықты құрайды, және ол «гиперболаның гиперболизмы» болып табылады. Центрі Р нүктесінде орналасқан бірінші дәрежелі p түзулер шоғының қосарланған түзулер (параболалық сәулелер) l, l' шоғымен проективті сәйкестігі осы параболаның фокустық сызықтарының f шоғы арқылы тағайындалады. Бірінші дәрежелі p шоғы түзу сызығының оған проективті сәйкес келетін f фокалдық шоғы сызығының өз-ара орналасу жағдайы олардың бұрыштық жылжуы Δ арқылы анықталуы мүмкін. Зерттеулер нәтижесінде p шоғының Р центрінің орнын және Δ параметрін өзгерту арқылы пайда болған қисық сызықтың пішіні басқарылатындығы анықталды. Ұсынылған әдістің аса ерекшелігі - түрлендіру нәтижесінде пайда болған сызық тек қана «гиперболаның гиперболизмы» болып табылады, және басқа қисық сызық болмайды, сондай-ақ, есептеу қисынды алгоритмдердің қарапайымдылығы автоматтандырылған есептеу жүйелерінде мұндай қисықтарды модельдеу кезінде маңызды.

Түйін сөздер: Екінші дәрежелі қисық сызықтар, үшінші дәрежелі қисықтар, текшелік парабола, екінші дәрежелі қатарлар, екінші дәрежелі сызықтар шқғы, конус қимасы гиперболизмдері, гиперболаның гиперболизмі.

Н.С. Умбетов[1], Ж.Ж. Джанабаев[1], Г.С. Иванов[2]

[1]Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан;
[2]Московский государственный технический университет им. Н. Баумана, Москва, Россия

КОНСТРУИРОВАНИЕ КРИВЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ТИПА ГИПЕРБОЛИЗМ ГИПЕРБОЛЫ

Аннотация. Решение многих инженерных задач требует построения кривых линий с заданными характеристиками. Одним из способов образования кривых является получение новой кривой путем того или иного геометрического преобразования уже известной кривой. Этот способ образования кривых является наиболее эффективным. Он не только даёт неиссякаемые средства для определения новых кривых, но и позволяет определять свойства новой кривой как отражение свойств преобразуемой кривой. Также, этот способ особенно важен потому, что линия, семейства линий, принадлежащих прообразу, однозначно отображаются в соответствующие линии, семейства линий конструируемой поверхности. А зная свойства преобразования и прообраза, нетрудно установить свойства образа. При конструировании поверхностей, особенно нелинейчатых, важным условием является получение ее модели, описываемой простейшими алгебраическими уравнениями. Это позволяет изготовить деталь со сложной поверхностью с минимальными затратами и высокой точностью. В связи с этим, исследования в данной области считаются весьма актуальными.

Данная статья относится к области образования кривых третьего порядка. В связи с этим в данной статье предлагается алгоритм (способ) построения кривой третьего порядка, основанный на использовании вспомогательной параболы второй степени. Выбор параболы основан на том, что из множества кривых второго и третьего порядка при моделировании технических кривых в САПР наиболее широко применяется парабола из-за ее однозначности. При этом в результате преобразования получается кривая третьего порядка, относящаяся к четвертому классу по классификаций Ньютона – «Гиперболизмы конических сечений», а именно гиперболизм гиперболы.

Суть способа заключается в следующем. Пусть мы имеем параболу второго порядка d^2 и пучёк прямых p с центром в точке Р. Каждая фокальная прямая f параболы d^2 пересекает эту параболу в двух точках, через которые проходят две прямые (параболических лучи) l, l' параллельно фокальной оси, а множество пар этих прямых образуют пучок с несобственным центром. Множество точек пересечения пучка прямых p с центром в точке P с проективным ему пучком прямых (параболических лучей) l, l', образует кривую третьего порядка d^3, а именно «гиперболизм гиперболы». Проективное соответствие пучка p первого порядка с центром в точке **Р** и пучка (параболических лучей) l, l' устанавливается с помощью пучка f фокальных прямых данной параболы. Положение прямой пучка p первого порядка с проективно соответствующей прямой пучка f фокальных прямых может определяться угловым смещением Δ. Исследованиями установлено, что изменениями параметра Δ и положением центра P пучка p можно управлять формой получаемой кривой. Отличительной особенностью предлагаемого способа является то, что результате преобразования получается

именно «гиперболизм гиперболы», и никакая другая кривая, а так же, простота вычислительных алгоритмов, что важно при моделировании таких кривых в САПР.

Ключевые слова. Кривые второго порядка, кривые третьего порядка, кубическая парабола, ряда второго порядка, пучок второго порядка, гиперболизмы конических сечений, гиперболизм гиперболы.

Information about authors:

Umbetov Nurlan Sagynbekovich, doctorate of technical sciences, M. Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan; nurlanumbetov@mail.ru; https://orcid.org/0000-0002-1540-9410;

Dzhanabaev Zhaksylyk Zhumadilovich, Professor, doctor of pedagogy, M. Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan; djanabaev@mail.ru;https://orcid.org/0000-0002-0150-9963;

Ivanov Gennadii Sergeevich, Professor, doctor of engineering, Honored Scientist of the Russian Federation, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia; ivanov_gs@rambler.ru; https://orcid.org/0000-0002- 8935-9495

REFERENCES

[1] Akopyan A.V. Geometric properties of second-order curves. Moscow, MCNMO, 2007. 136 p. (in Russ.).

[2] Aleksandrov P. S. Lectures on analytic geometry. Moscow, Nauka, 1968. 912 p. (in Russ.).

[3] Voloshinov D.V. On solving the problem of intersection points of second-order curves. Problems of Graphic Preparation quality: Traditions and Innovations. Conference proceeding KGP-2016. Perm', 2016, pp. 121-124 (in Russ.).

[4] Girsh A.G. Foci of Algebraic Curves. Geometry and Graphics, 2015, vol. 3, no. 3, pp. 4–17. DOI: 10.12737/14415. (in Russ.).

[5] Grafskii O.A. Establishing the interconnection of a row and a second-order bundle. Geometry and Graphics, 2016, vol. 4, No. 2, pp. 8–18. DOI:10.12737/19828. (in Russ.).

[6] Grafskii O.A., Ponomarchuk Yu.V., Surik V.V. Features of the properties of a parabola in its modeling. Geometry and Graphics, 2018, vol. 6, no. 2, pp. 63–77. DOI: 10.12737/article_ 5b55a16b547678.01517798. (in Russ.).

[7] Efimov N.V. Short course in analytic geometry, 13 ed. Moscow, Fizmatlit, 2005. 240 p. (in Russ.).

[8] Ivanov G.S. Design of technical surfaces (mathematical modeling based on nonlinear transformations). Moscow, Engineering, 1987. 192 p. (in Russ.).

[9] Ivanov G.S. Theoretical Foundations of Descriptive Geometry: Textbook. Moscow, Engineering, 1998. 158 p. (in Russ.).

[10] Korotkii V.A. Forming of lines and surfaces based on second-order curves in computer geometric modeling. Abstract of Dr. Tech. Sci. Diss. Nizhnii Novgorod, NNSUAE Publ., 2018. 38 p. (in Russ.).

[11] Savyolov A.A. Flat curves. Systematics, Properties, Applications (Reference Guide). Moscow, Fizmatlit, 1960. 294 p. (in Russ.).

[12] V.I. Seryogin, G.S. Ivanov, L.S. Senchenkova, I.F. Borovilov. Geometric Transformations in Descriptive Geometry & Engineering Graphics. Geometry and Graphics, 2015, vol. 3, no. 2, pp. 23–28. DOI: 10.12737/12165. (in Russ.).

[13] Seryogin V.I., Ivanov G.S., Dmitrieva I.M., Murav'yov K.A. Interdisciplinary communication of descriptive geometry and related sections of higher mathematics. Geometry and Graphics, 2014, vol. 2, no. 3, pp. 8–13. DOI: 10.12737/2124. (in Russ.)

[14] A.S. Smogorzhevskii i E.S. Stolova. Handbook of the theory of plane curves of the third order. Moscow, Fizmatlit, 1961. 264 p. (in Russ.).

[15] Chetveruxin N.F. Projective geometry. Moscow, Prosveshhenie, 1969. 368 p. (in Russ.).

[16] Gallier J. Curves and Surfaces in Geometric Modeling: Theory And Algorithms. Philadelphia, University of Pennsylvania, 2015. 492 p.

[17] N. S. Umbetov, Zh. Zh. Dzhanabaev, G.S. Ivanov. Geometric modeling of laying geodetic lines on ruled surfaces. News of the national academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of geology and technical sciences. ISSN 2224-5278, Volume 1, Number 427 (2018), p. 111–117. http://www.geolog-technical.kz/index. php /en/archive https://doi.org/10.32014/2019.2518-170X.20

[18] Sinchev B., Sinchev A.B., Akzhanova J., Mukhanova A.M. New methods of information search. News of the national academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of geology and technical sciences. ISSN 2224-5278, Volume 3, Number 435 (2019), p. 240–246. http://www.geolog-technical.kz/ index.php/ en/archive https://doi.org/10.32014/2018.2519-170X.91

[19] Kabylbekov K.A., Abdrakhmanova Kh.K., Omashova G.Sh., Kedelbaev B., Abekova J.A. Calculation and visualization of the electric field of a space-charged. News of the national academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of geology and technical sciences. ISSN 2224-5278, Volume 5, Number 431 (2018), p. 201–209. http://www.geolog-technical.kz/ index.php/ en/archive https://doi.org/10.32014/2018.2518-170X.26

[20] A. Seitmuratov, A. Dauitbayeva, K. M. Berkimbaev, K. N. Turlugulova, E. Tulegenova. Constructed two-parameter structurally stable maps. News of the national academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of geology and technical sciences. ISSN 2224-5278, Volume 6, Number 438 (2019), p. 302–307. http://www.geolog-technical.kz/ index.php/ en/archive https://doi.org/10.32014/2019.2518-170X.182