NEWS
OF THENATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X **https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.92**
Volume 6, Number 334 (2020), 13 – 18

УДК 517.956
МРНТИ 27.31.15

С. А. Алдашев, З. Н. Канапьянова

[1]Институт математики, физики и информатики, КазНПУ им. Абая, Алматы, Казахстан.
E-mail: kanapyanova81@bk.ru

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ ТИПА И ПОРЯДКА

Аннотация. Известно, что в пространстве при математическом моделировании электромагнитных полей в пространстве характер электромагнитного процесса определяется свойствами среды. Если среда непроводящая, то получаем вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения. Следовательно, анализ электромагнитных полей в сложных средах (например, если проводимость среды меняется) сводятся к вырождающимся многомерным гиперболическим уравнениям. Известно также, что колебания упругих мембран в пространстве по принципу Гамильтона можно моделировать вырождающимися многомерными гиперболическими уравнениями. Следовательно, исследуя математическое моделирование процесса распространения тепла в колеблющихся упругих мембранах, также приходим к вырождающимся многомерным гиперболическим уравнениям. При изучении этих приложений возникает необходимость получения явного представления решений исследуемых задач. Смешанная задача для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений в обобщенных пространствах хорошо исследована. Эта задача также изучена в работах С.А.Алдашева, где показано, что ее корректность существенно зависит от высоты рассматриваемой цилиндрической области. На важность исследований многомерных гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка обратил внимания А.В. Бицадзе. Смешанные задачи для этих уравнений ранее не были изучены. В данной работе показана разрешимость смешанной задачи и получен явный вид классического решения для трехмерных гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка.

Ключевые слова: Евклидово пространство, тригонометрические функции, полярные координаты, ортогональность, функция Бесселя.

п.1. Введение. Смешанная задача для вырождающихся линейных гиперболических уравнений в обобщенных пространствах изучена в [1]. В [2,3] установлены корректность смешанной задачи для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений.

В данной работе показана разрешимость и получен явный вид классического решения смешанной задачи для трехмерных гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка

п.2. Постановка задачи и результат. Пусть D_β – цилиндрическая область евклидова пространства E_3 точек (x_1, x_2, t), ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \beta > 0$ и $t = 0$, где $|x|$ – длина вектора $x = (x_1, x_2)$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_β области D_β, обозначим через Γ_β, S_β, S_0 ответственно.

В области D_β, рассмотрим трехмерные гиперболические уравнения

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{2} k_i(t) u_{x_i x_i} - k_3(t) u_{tt} + \sum_{i=1}^{2} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = 0, \tag{1}$$

где $k_i(t) > 0$ при $t > 0$ и могут обращаться в нуль при $t = 0$, $k_i(t) \in C([0,\beta]) \cap C^2((0,\beta))$, $i = 1,2,3$.

Уравнение (1) гиперболично при t >0, а вдоль плоскости t = 0 имеет место вы-рождение его типа и порядка.

В дальнейшем нам понадобится связь декартовых координат x_1, x_2, t с полярными $r, \theta, t : x_1 = r\cos\theta,\ x_2 = r\sin\theta,\ r \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi.$

В качестве смешанной задачи рассмотрим задачу:

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области D_β, из класса $C(\overline{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{S_0} = \tau(r,\theta),\ \ u_t\Big|_{S_0} = \nu(r,\theta),\ \ u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi(t,\theta), \tag{2}$$

при этом $\tau(1,\theta) = \psi(0,\theta), \nu(1,\theta) = \psi_t(0,\theta)$.

Пусть $\dfrac{a_i(r,\theta,t)}{k_3(t)}, \dfrac{b_i(r,\theta,t)}{k_3(t)}, \dfrac{c_i(r,\theta,t)}{k_3(t)}, \in C^1(\overline{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta), i = 1,2.$

Тогда справедлива

Теорема. Если $\varphi(r,\theta) \in C^1(\overline{S}_\beta) \cap C^3(S_\beta),\ \psi(t,\theta) \in C^1(\overline{\Gamma}_\beta) \cap C^3(\Gamma_\beta),\ \tau(r,\theta), \nu(r,\theta) \in$ $C^1(\overline{S}_0) \cap C^3(S_0)$ и выполняется условие

$$\cos \mu_{s,n} \beta' \neq 0,\ s = 1,2,..., \tag{3}$$

то задача 1 имеет решение, где $\mu_{s,n}$ – положительные нули функций Бесселя первого рода $J_n(z)$, $\beta' = \int\limits_0^\beta \sqrt{\dfrac{[k_1(\xi) + k_2(\xi)]}{2k_3(\xi)}} d\xi,\ n = 0,1,...\ .$

п.3. Доказательство теоремы. Решение задачи 1 в полярных координатах будем искать в виде ряда

$$u(\tau,\theta,t) = u_{10}(r,t) + \sum_{n=1}^{\infty} (u_{1n}(r,t)\cos n\theta + u_{2n}(r,t)\sin n\theta), \tag{4}$$

где $u_{10}(r,t),\ u_{1n}(r,t),\ u_{2n}(r,t)$ -функции, которые будут определены ниже.

Подставив (4) в (1), в полярных координатах будем иметь

$$\begin{gathered}
Lu \equiv k_1(t)\left(\cos^2\theta u_{10rr} + \frac{\sin^2\theta}{r} u_{10r}\right) + k_2(t)\left(\sin^2\theta u_{10rr} + \frac{\cos^2\theta}{r} u_{10r}\right) - u_{10tt} + \\
+ a_1(r,\theta,t)\cos\theta u_{10r} + a_2(r,\theta,t)\sin\theta u_{10r} + b(r,\theta,t)u_{10t} + c(r,\theta,t)u_{10} + \\
+ \sum_{n=1}^{\infty}\left\{k_1(t)\left[\cos^2\theta(\cos n\theta u_{1nrr} + \sin n\theta u_{2nrr}) + \frac{\sin^2\theta}{r}(\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \right.\right. \\
+ \frac{n\sin 2\theta}{r}(\sin n\theta u_{1nr} - \cos n\theta u_{2nr}) + \frac{n\sin 2\theta}{2r^2}(\cos n\theta u_{2n} - \sin n\theta u_{1n}) - \\
\left. - \frac{n^2\sin^2\theta}{r^2}(\cos n\theta u_{1n} + \sin n\theta u_{2n})\right] + k_2(t)\left[\sin^2\theta(\cos n\theta u_{1nrr} + \sin n\theta u_{2nrr}) + \right. \\
+ \frac{n\sin 2\theta}{r}(\cos n\theta u_{2nr} - \sin n\theta u_{1nr}) + \frac{\cos^2\theta}{r}(\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \\
\left. + \frac{n\sin 2\theta}{2r^2}(\sin n\theta u_{1n} - \cos n\theta u_{2n}) - \frac{n^2}{r^2}\cos^2\theta(\cos n\theta u_{1n} + \sin n\theta u_{2n})\right] -
\end{gathered} \tag{5}$$

$$-u_{1ntt}\cos n\theta - u_{2ntt}\sin n\theta + a_1\left[\cos\theta(\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \frac{n\sin\theta}{r}(\sin n\theta u_{1n} - \cos n\theta u_{2n})\right] +$$
$$+a_2\left[\sin\theta(\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \frac{n\cos\theta}{r}(\cos n\theta u_{2n} - \sin n\theta u_{1n})\right] +$$
$$+b(\cos n\theta u_{1nt} + \sin n\theta u_{2nt}) + c(\cos n\theta u_{1n} + \sin n\theta u_{2n})\} = 0.$$

Теперь полученное выражение (5) сначала умножим на $\rho(\theta) \neq 0$, а затем проинтегрируем от 0 до 2π. После несложных преобразований получим ряд

$$\frac{(k_1+k_2)}{2}\rho_{10}\left(u_{10rr} + \frac{1}{r}u_{10r}\right) - \rho_{10}u_{10tt} + \frac{(k_1-k_2)}{2}d_{10}\left(u_{10rr} - \frac{1}{r}u_{10r}\right)$$
$$+a_{10}(r,t)u_{10r} + b_{10}(r,t)u_{10t} + c_{10}(r,t)u_{10} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{(k_1+k_2)}{2}\rho_{jn}(u_{jnrr} +\right.\right.$$
$$+\frac{1}{r}u_{jnr} - \frac{n^2}{r^2}u_{jn}) - \rho_{jn}u_{jntt} + + \frac{(k_1-k_2)}{2}d_{jn}\left(u_{jnrr} - \frac{1}{r}u_{jnr} + \frac{n^2}{r^2}u_{jn}\right) + \tag{6}$$
$$+\frac{(k_2-k_1)}{2}e_{jn}\left(u_{jnr} - \frac{u_{jn}}{r}\right) + a_{jn}(r,t)u_{jnr} + b_{jn}(r,t)u_{jnt} + c_{jn}(r,t) + u_{jn}\Big]\Big\} = 0,$$

$$\rho_{1n} = \int_0^{2\pi}\rho(\theta)\cos n\theta d\theta,\ \ \rho_{2n} = \int_0^{2\pi}\rho\sin n\theta d\theta,\ \ d_{1n} = \int_0^{2\pi}\rho\cos 2\theta\cos n\theta d\theta,$$

$$d_{2n} = \int_0^{2\pi}\rho\cos 2\theta\sin n\theta d\theta,\ e_{1n} = -\int_0^{2\pi}\rho\sin 2\theta\sin n\theta d\theta,\ e_{2n} = \int_0^{2\pi}\rho\sin 2\theta\cos n\theta d\theta,$$

$$a_{1n} = \int_0^{2\pi}\rho(a_1\cos\theta + a_2\sin\theta)\cos n\theta d\theta,\ \ a_{2n} = \int_0^{2\pi}\rho(a_1\cos\theta + a_2\sin\theta)\sin n\theta d\theta,$$

$$b_{1n} = \int_0^{2\pi}\rho b\cos\theta d\theta,\ \ b_{2n} = \int_0^{2\pi}\rho b\sin n\theta d\theta,\ \ c_{1n} = \int_0^{2\pi}\rho\left[(a_1\sin\theta - a_2\cos\theta)\frac{n\sin n\theta}{r} + c\cos n\theta\right]d\theta,$$

$$c_{2n} = \int_0^{2\pi}\rho\left[(a_2\cos\theta - a_1\sin\theta)\frac{n\cos n\theta}{r} + c\sin n\theta\right]d\theta,\ \ n = 0,1,\dots .$$

Далее рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$k(t)\rho_{10}\left(u_{10rr} + \frac{1}{r}u_{10r}\right) - \rho_{10}u_{10tt} = 0,\ \ k(t) = \frac{k_1(t)+k_2(t)}{2}. \tag{7}$$

$$k(t)\rho_{j1}\left(u_{j1rr} + \frac{1}{r}u_{j1r} - \frac{u_{j1}}{r^2}\right) - \rho_{j1}u_{j1tt} = \frac{(k_2-k_1)d_{10}}{2}\left(u_{10rr} - \frac{u_{10r}}{r}\right) - a_{10}u_{10r} - b_{10}u_{10t} - c_{10}u_{10}, \tag{8}$$

$$k(t)\rho_{j1}\left(u_{jnrr} + \frac{1}{r}u_{jnr} - \frac{n^2}{r^2}u_{jn}\right) - \rho_{jn}u_{jntt} = -\frac{(k_1-k_2)}{2}d_{jn-1}\left(u_{jn-1rr} - \frac{1}{r}u_{jn-1r} + \frac{(n-1)^2}{r^2}u_{jn-1}\right) -$$
$$-\frac{(k_2-k_1)}{r}e_{jn-1}\left(u_{jn-1rr} - \frac{u_{jn-1}}{r}\right) - a_{jn-1}u_{jn-1r} - b_{jn-1t}u_{jn-1t} - c_{jn-1}u_{jn-1},\ \ j = 1,2, n = 2,3,\dots . \tag{9}$$

Нетрудно показать, что если $\{u_{10}, u_{jn}\}$ $j = 1,2, n = 1,2,...$ решение системы (7)-(9), то оно является и решением уравнения (6).

Далее, учитывая ортогональность ([4]) систем тригонометрических функций $\{1, \cos n\theta, \sin n\theta, n = 1,2,...\}$ на отрезке $[0; 2\pi.]$,из краевого условия (2) в силу (4) будем иметь

$$u_{10}(r,0) = \tau_{10}(r),\ u_{10t}(r,0) = \nu_{10}(r),\ u_{10}(1,t) = \psi_{10}(t), \quad (10)$$

$$u_{jn}(r,0) = \tau_{jn}(r), \quad u_{jnt}(r,0) = \nu_{jn}(r),\ u_{jn}(1,t) = \psi_{jn}(t),\ j = 1,2,\ n = 1,2,..., \tag{11}$$

$$\tau_{10}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tau(r,\theta)d\theta,\ \nu_{10}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\nu(r,\theta)d\theta,\ \psi_{10}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(t,\theta)d\theta,$$

$$\tau_{1n}(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\tau(r,\theta)\cos n\theta d\theta,\ \nu_{1n}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\nu(r,\theta)\cos n\theta d\theta,\ \psi_{1n}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(t,\theta)\cos n\theta d\theta,$$

$$\tau_{2n}(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\tau(r,\theta)\sin n\theta d\theta,\ \nu_{2n}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\nu(r,\theta)\sin n\theta d\theta,\ \psi_{2n}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(t,\theta)\sin n\theta d\theta,$$

$n = 1,2,....$

Таким образом, задача 1 сведена к системе смешанных задач для уравнений (7) -(9). Теперь найдем решения этих задач.

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (7)-(9) можно представить в виде

$$k(t)\left(u_{jnrr} + \frac{1}{r}u_{jnr} - \frac{n^2}{r^2}u_{jn}\right) - u_{ntt} = f_{jn}(r,t),\ n = 0,1,,.... \tag{12}$$

где $\bar{k}(t) = \frac{k(t)}{k_3(t)}$, $f_n(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0(r,t) \equiv 0$.

В [3] показано, что задачи (12),(10) и (12),(11) однозначно разрешимы, если выполняется условие (3).

Далее, сначала решив задачи (7), (10) $(j = 1,2,\ n = 0)$, а затем (8), (11)

$(j = 1,2,\ n = 1)$ и т.д. найдем последовательно все $u_{10}(r,t),\ u_{jn}(r,t),\ j = 1,2,\ n = 1,2,...$.

Следовательно, задачи (6), (10) и (6), (11) также однозначны разрешимы. Итак, показано, что

$$\int_0^{2\pi}\rho(\theta)Lud\theta = 0. \tag{13}$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0, V_0 -$ плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta) \in C^\infty((0,2\pi)) -$ плотна в $L_2((0,2\pi))$, а $R(t) \in V_1, V_1 -$ плотна в $L_2((0,\beta))$. Тогда $f(r,\theta,t) \in V, V = V_0 \otimes (0,2\pi) \otimes V_1 -$ плотна в $L_2(D_\beta)$ ([4]).

Отсюда и из (13), следует, что

$$\int_{D_\beta} f(r,\theta,t)LudD_\beta = 0$$

и

$$Lu = 0,\ \forall(r,\theta,t) \in D_\beta.$$

Таким образом, решением задач 1 является функция (4), где $u_{10}(r,t)$, $u_{jn}(r,t)$, $j=1,2$, $n=1,2,...$ определяются из предыдущих двумерных задач.

Учитывая ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции $\varphi(r,\theta)$, $\psi(r,\theta)$, $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, аналогично как в [2, 3], можно показать, что полученное решение (4) принадлежит классу $C(\overline{D}_\beta)\cap C^2(D_\beta)$.

Следовательно, теорема доказано.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда науки КазНПУ (договор №8 от 05.01.2020г.)

С.А. Алдашев, З.Н. Канапьянова

Математика, физика және информатика институты,
Абай атындағы ҚазҰПУ, Алматы, Қазақстан

ТҮРІ МЕН ДӘРЕЖЕСІ ӨЗГЕРТІЛГЕН ҮШӨЛШЕМДІ ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРГЕ АРАНАЛҒАН АРАЛАС ЕСЕП

Аннотация. Кеңістіктегі электромагниттік өрісті математикалық модельдеу кезінде электромагниттік процес сипаты ортаның қасиеттері негізінде анықталатыны белгілі. Егер орта өткізгіш болмаса, онда көпөлшемді гиперболалық теңдеулерді аламыз. Сондықтан күрделі ортадағы электромагниттік өрістерді талдағанда (мысалы, егер қоршаған ортаның өткізгіштігі өзгерсе) көпөлшемді өзгертілген гиперболалық теңдеулерге келеміз. Сондай-ақ, Гамильтон принципі бойынша кеңістіктегі серпімді мембраналардың тербелістерін зерттегенде көпөлшемді өзгертілген гиперболалық теңдеулермен модельдеуге болатындығы белгілі. Сондықтан тербелмелі серпімді мембраналарда жылудың таралу үдерісін математикалық модельдеуді зерттей отырып, көпөлшемді өзгертілген гиперболалық теңдеулерге келеміз. Осы мәселелерді зерттеу кезінде нақты шешімдерді келтіру қажет. Жалпыланған кеңістікте көпөлшемді өзгертілген гиперболалық теңдеулерге аралас есептер жақсы зерттелген. Бұл есеп С.А. Алдашевтің еңбектерінде де зерттелген, онда есептің дұрыстығы қарастырылып отырған цилиндрлік аймақ биіктігіне байланысты екендігі көрсетілген. А.В. Бицадзе түрі мен дәрежесі өзгертілген көпөлшемді гиперболалық теңдеулерді зерттеудің маңыздылығына назар аударды. Бұл теңдеулер бойынша аралас есептер бұрын қарастырылмаған. Жұмыста түрі мен дәрежесі өзгертілген үшөлшемді гиперболалық теңдеулерге араналған аралас есеп шешімінің барлығы дәлелденген және оның нақты түрі келтірілген.

Түйін сөздер: Евклидті кеңістік, тригонометриялық функциялар, полярлық координаттар, ортогоналдылық, Бессель функциясы.

C. A. Aldashev, Z. N. Kanapyanova

Institute of Mathematics, Physics and Informatics,
KazNPU named after Abay, Almaty, Kazakhstan

IXED PROBLEM FOR THREE-DIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATIONS WITH DEGENERATION OF TYPE AND ORDER

Abstract. It is known that in space during mathematical modeling of electromagnetic fields in space, the nature of the electromagnetic process is determined by the properties of the medium. If the medium is non-conductive, then we get degenerating multidimensional hyperbolic equations. Therefore, the analysis of electromagnetic fields in complex environments (for example, if the conductivity of the medium changes) is reduced to degenerating multidimensional hyperbolic equations. It is also known that oscillations of elastic membranes in space according to the Hamilton principle can be modeled by degenerating multidimensional hyperbolic equations. Therefore, by studying mathematical modeling of the process of heat propagation in oscillating elastic membranes, we also come to degenerating multidimensional hyperbolic equations. When studying these applications, it becomes necessary to obtain a clear representation of the solutions to the investigated problems. The mixed problem for degenerating multidimensional hyperbolic equations in generalized spaces is well researched. This task is also studied in the works of S. A. Aldashev, where it is shown that its correctness significantly depends on the height of the cylindrical region under consideration. A.V. Bitsadze drew attention to the importance of studies of multidimensional hyperbolic equations with degeneration of type and order. Mixed problems for these equations have not previously been studied. In this work, the solvability of a mixed problem is shown and a clear form of a classical solution for three-dimensional hyperbolic equations with degeneration of type and order is obtained.

Keyword: Euclidean spaces, trigonometric functions, polar coordinates, orthogonality, Bessel function.

Information about authors:

Aldashev C.A., Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor, Institute of Mathematics, Physics and Informatics, KazNPU named after Abay, Almaty, Kazakhstan; aldash51@mail.ru; https://orcid.org/0000-0002-8223-6900;

Kanapyanova Z.N., 6D060100-Mathematics 3-year, Institute of Mathematics, Physics and Informatics, KazNPU named after Abay, Almaty, Kazakhstan; kanapyanova81@bk.ru; https://orcid.org/0000-0002-4214-4569

REFERENCES

[1] Krasnov M. L. Mixed boundary value problems for degenerate linear hyperbolic second-order differential equations // Mod. sat., 1959, vol. 49(91). 29–84 p.

[2] Aldashev S. A. Correctness of the mixed problem for a class of degenerate multidimensional hyperbolic equations // Journal of "Computational and applied mathematics", Kiev: KNU them.T.G. Shevchenko, 2019, No. 2 (131). 5-14 p. DOI: 10.17721/1728-2721

[3] Aldashev S. A. the Well Posedness of The Mixed Problem for Degenerate Multidimensional Hyperbolic Equations// proceedings of conference "Modern Problems of Mathematical Modeling, Computational methods and information", Kiev, KNU. Shevchenko, 2018, 14-15 p. DOI: 10.17721/1728-2721

[4] Kolmogorov A. N., Fomin S. V. elements of the theory of functions and functional analysis, Moscow: Nauka, 1976, 543 p.