NEWS
OF THENATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X **https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.91**
Volume 6, Number 334 (2020), 5 – 12

UDK 512.64
IRSTI 27.17.27

A.T. Ibrayev

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: pok_rk@mail.ru

METHOD FOR CONSTRUCTING THE COMMUTATIVE ALGEBRA OF QUATERNION AND OCTONION

Abstract. In this paper, we solve the problem of constructing a commutative algebra of quaternions and octonions. A proof of the theorem is given that the commutativity of quaternions can be ensured by specifying a set of sign coefficients of the directions of reference of the angles between the radius vectors in the coordinate planes of the vector part of the coordinate system of the quaternion space. The method proposed in the development of quaternions possessing the commutative properties of multiplication is used further to construct a commutative octonion algebra. The results obtained on improving the algebra of quaternions and octonions can be used in the development of new hypercomplex numbers with division over the field of real numbers, and can also find application for solving a number of scientific and technical problems in the areas of field theory, physical electronics, robotics, and digital processing of multidimensional signals.

Keywords: hypercomplex number, quaternion, octonion, algebra, multiplication, division, commutativity, vector.

Quaternions, as you know, were proposed by Hamilton in 1843 and gave rise to the rapid development of vector algebra and other important branches of modern mathematics, which are the main basis for constructing the fundamentals of theories in many areas of science [1-8]. Currently, many scientific works are devoted to the algebra of quaternions, octonions and other hypercomplex numbers, as well as to their application for solving various fundamental and applied scientific problems. For example, the algebras of quaternions and octonions are often used to solve a number of complex specific problems in the fields of robotics, physical electronics, and digital processing of multidimensional signals [9-20].

At the same time, it is still believed that hypercomplex numbers do not have the commutativity property. The famous theorems of Frobenius and Hurwitz are known, from which it follows that it is impossible to construct a commutative algebra of quaternions and other hypercomplex numbers. In addition, the Frobenius theorem states that the construction of hypercomplex numbers with division over the field of real numbers is restricted to the algebras of quaternions and octonions [21].

In connection with the noticeable expansion of the practice of using hypercomplex numbers in the study of a wide range of modern scientific and technical problems, let us consider in more detail the properties of the quaternion and octonion.

Quaternion can be represented as

$$q = s + ix + jy + kz\,, \tag{1}$$

where s – scalar; x, y, z – coordinates of the vector part of the quaternion; i, j, k – imaginary units satisfying the condition

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1\,. \tag{2}$$

When multiplying quaternions, the following equalities are also used

$$ij = -ji = k\,,\ jk = -kj = i\,,\ ki = -ik = j\,. \tag{3}$$

Conditions (3) practically exclude the possibility of constructing a commutative quaternion algebra.

Indeed, consider the product of two quaternions

$$q_1q_2=\left(s_1+ix_1+jy_1+kz_1\right)\left(s_2+ix_2+jy_2+kz_2\right)=s_1s_2-x_1x_2-y_1y_2-z_1z_2+$$
$$+i\left(x_1s_2+x_2s_1\right)+j\left(y_1s_2+y_2s_1\right)+k\left(z_1s_2+z_2s_1\right)+$$
$$+ij\left(x_1y_2-x_2y_1\right)+jk\left(y_1z_2-y_2z_1\right)+ki\left(z_1x_2-z_2x_1\right). \quad (4)$$

From (4) it is clear that when the places of the multiplied quaternions are changed, the product will not be the same, that is, indeed, condition (3) makes the algebra of quaternions non-commutative.

However, in spite of the above, in this paper we propose a theorem on the construction of a commutative quaternion algebra.

Theorem. The associative algebra of quaternions can be modified into the commutative algebra of quaternions by specifying a set of sign coefficients of the directions of reference of the angles between radius vectors in the coordinate planes of the vector part of the coordinate system of the quaternion space.

Evidence. Let us consider the essence of the products in (4), which are the reason for the lack of commutativity of quaternions. Let's start with the expression that characterizes the cross product in the plane xy.

By adopting

$$\rho_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2} \text{ и } \rho_2=\sqrt{x_2^2+y_2^2}, \quad (5)$$

we carry out the following transformations

$$x_1y_2-x_2y_1=\rho_1\rho_2\frac{x_1y_2-x_2y_1}{\rho_1\rho_2}=\rho_1\rho_2\left(\cos\varphi_1\sin\varphi_2-\cos\varphi_2\sin\varphi_1\right)=\rho_1\rho_2\sin\left(\varphi_2-\varphi_1\right). \quad (6)$$

Because the sine in (6) is odd, the expression considered here cannot be commutative.

However, the angle

$$\varphi_{12}=\varphi_2-\varphi_1=\left(\vec{\rho}_1\hat{,}\vec{\rho}_2\right) \quad (7)$$

In the existing theory of quaternions, the direction of this angle is not strictly specified. For the complete coordinate system, the concepts of right and left screws are noted, which only indirectly indicate that the positive direction of this angle corresponds to the positive direction of the axis *z*, however, no formula is given that strictly specifies this noted condition.

As you know, when turning (rotating) the radius vector in xy plane by one full circle, the angle φ_{xy} changes within $0\le\varphi_{xy}\le 2\pi$, but the positive value of $\sin\varphi_{xy}$ remains only within $0\le\varphi_{xy}\le\pi$. Within $\pi\le\varphi_{xy}\le 2\pi$ the function $\sin\varphi_{xy}$ already has a negative value, which does not correspond to the sign of the angle φ_{xy}. Indeed,

$$\sin\left(\pi+\varphi_{xy}\right)=-\sin\varphi_{xy}=\sin\left(-\varphi_{xy}\right).$$

In connection with this inconsistency, it is necessary to introduce a condition for the correspondence of the sign of the angle of rotation to the linear direction of its reference in the basis of the quaternion space, which for the angle φ_{xy} in the theory of quaternions is associated with the direction *z*. This condition can be written as

$$sign\left(z\right)=sign\left(\varphi_{xy}\right). \quad (8)$$

For a more detailed consideration of the need to take into account Equation (8), we represent z in the form

$$z=sign(\mathrm{z})\cdot\left|z\right|. \quad (9)$$

Now, taking into account (6), (8) and (9), we associate the angular displacement with the coordinate *z* as follows

$$z=sign(\varphi_{12})\cdot\left|\rho_1\rho_2\cdot\sin\left(\varphi_2-\varphi_1\right)\right|. \quad (10)$$

In the last equation, the modulus can be replaced by the expression

$$\left|\rho_1\rho_2\cdot\sin\left(\varphi_2-\varphi_1\right)\right| = sign\left(\rho_1\rho_2\cdot\sin\left(\varphi_2-\varphi_1\right)\right)\cdot\rho_1\rho_2\cdot\sin\left(\varphi_2-\varphi_1\right), \quad (11)$$

then, we have

$$z = sign(\varphi_{12})\cdot sign\left(\rho_1\rho_2\cdot\sin\left(\varphi_2-\varphi_1\right)\right)\cdot\rho_1\rho_2\cdot\sin\left(\varphi_2-\varphi_1\right). \quad (12)$$

Let us introduce the notation

$$\sigma_{12} = sign(\varphi_{12})\cdot sign\left(\rho_1\rho_2\cdot\sin\left(\varphi_2-\varphi_1\right)\right), \quad (13)$$

where

$$sign\left(\varphi_{12}\right) = \begin{cases} +1, sign\left(\vec{\rho}_1\hat{,}\vec{\rho}_2\right) = sign\left(\vec{i}_x\hat{,}\vec{i}_y\right) = sign\left(\varphi_{xy}\right); \\ -1, sign\left(\vec{\rho}_2\hat{,}\vec{\rho}_1\right) = -sign\left(\vec{i}_x\hat{,}\vec{i}_y\right) = -sign\left(\varphi_{xy}\right). \end{cases} \quad (14)$$

The sequence of signs in the indices hereinafter indicates the direction of the angle of rotation. The index «*xy*» means that the positive direction of reference of the angle φ_{xy} corresponds to the direction of the angle of rotation of the radius vector $\vec{\rho}_{xy}$ relative to the origin from axis x to axis *y*. From (13) and (14) it follows

$$\sigma_{12} = -\sigma_{21}. \quad (15)$$

Now, let us rewrite equation (12) for z in the form

$$z = \sigma_{12}\cdot\rho_1\rho_2\cdot\sin\left(\varphi_2-\varphi_1\right) = \sigma_{12}\left(x_1y_2 - x_2y_1\right). \quad (16)$$

In this equation, the signs of the directions z и φ_{xy} are matched using the sign coefficient σ_{12}. In general, equation (15) can be rewritten as

$$\sigma_{mn} = -\sigma_{nm}, \quad (17)$$

where m and n denote the serial numbers of factors.

By analogy, the same conditions for matching the signs of the directions of linear and angular displacements (coordinates) must be met for other pairs of coordinates. These conditions can be fulfilled by replacing equalities (3) by the following equalities

$$ij = -ji = \sigma_{mn}^{xy}k,\ jk = -kj = \sigma_{mn}^{yz}i,\ ki = -ik = \sigma_{mn}^{zx}j, \quad (18)$$

where σ_{mn} for the positive direction of reference of the angle of rotation in the plane xy, i.e. at

$$sign\left(\varphi_{mn}\right) = sign\left(\varphi_{xy}\right),$$

is defined by formula

$$\sigma_{mn}^{xy} = sign(\varphi_{xy})\cdot sign\left(x_my_n - x_ny_m\right) = -\sigma_{nm}^{xy}, \quad (19)$$

And for planes yz и zx, when counting the angles of rotation also in the positive direction, according to the formulas

$$\sigma_{mn}^{yz} = sign(\varphi_{yz})\cdot sign\left(y_mz_n - y_nz_m\right) = -\sigma_{nm}^{yz},$$

$$\sigma_{mn}^{zx} = sign(\varphi_{zx})\cdot sign\left(z_mx_n - z_nx_m\right) = -\sigma_{nm}^{zx}. \quad (20)$$

The sign coefficients given in (19) - (20) remove the questions about specifying the right or left screws when determining the accepted directions of the used coordinate system.

When using equations (18) - (20), the product of two quaternions instead of (4) takes the following form

$$q_1q_2=\left(s_1+ix_1+jy_1+kz_1\right)\left(s_2+ix_2+jy_2+kz_2\right)=s_1s_2-x_1x_2-y_1y_2-z_1z_2+$$
$$+i\left[x_1s_2+x_2s_1+\sigma_{mn}^{yz}\left(y_1z_2-y_2z_1\right)\right]+j\left[y_1s_2+y_2s_1+\sigma_{mn}^{zx}\left(z_1x_2-z_2x_1\right)\right]+$$
$$+k\left[z_1s_2+z_2s_1+\sigma_{mn}^{xy}\left(x_1y_2-x_2y_1\right)\right]. \quad (21)$$

From equation (21), taking into account (19) - (20), it can be seen that the product of quaternions possesses the commutativity property.

The theorem is proved.

It is easy to see that all the basic properties of the quaternion algebra stated earlier are preserved, including the possibility of the division operation. In addition, along with commutativity, the associativity property of the product of quaternions is also preserved. When checking this condition together with (18) - (20), it should be noted that

$$\sigma_{mn}^2=+1. \quad (22)$$

Let's confirm the possibility of the division operation. The conjugate four-dimensional quaternion number (1) is the quaternion

$$\overline{q}=s-ix-jy-kz. \quad (23)$$

The product $q\overline{q}$, when using conditions (18) - (20), remains unchanged

$$q\overline{q}=s^2+x^2+y^2+z^2, \quad (24)$$

which confirms the possibility of the division operation.

The proof of the above theorem on the commutativity of the quaternion algebra, modified by specifying a set of sign coefficients for the directions of angles, opens up new possibilities both in studying the properties of other hypercomplex numbers and for using hypercomplex numbers in solving various scientific and engineering problems.

Next, we will consider the possibility of solving the problem related to the construction of a commutative octonion algebra. To achieve the commutativity of the octonion product, as a basis, we use the method that was proposed above to ensure the commutativity property of the multiplication of quaternions.

We present some general conclusions that can be drawn from the results of solving the problem of constructing a commutative quaternion algebra.

First, in hypercomplex numbers, the results of mixed products of imaginary units with the properties of unit vectors of a vector space are pseudovectors associated with the projection of rotational displacements on the plane.

Secondly, the absence of an unambiguously established modular direction of rotational displacements leads to the duality of their reference system and is the reason for the absence of commutativity of the multiplication of hypercomplex numbers.

Conclusion: to ensure commutativity of the multiplication of hypercomplex numbers, it is necessary for each plane of the vector space of the hypercomplex number to unambiguously set the reference signs of the directions of rotational displacements.

In the general case, the octonion $q_8(x)$, which in a number of works is also called the octave or the Cayley number, is written in the form

$$q_8(x)=x_0+x_1i_1+x_2i_2+x_3i_3+x_4i_4+x_5i_5+x_6i_6+x_7i_7, \quad (25)$$

where x_0 is a scalar component, variables x_1 - x_7 constitute the vector part of the quaternion, i_1 - i_7 – imaginary units having properties of unit vectors in the corresponding vector space, the number 8 in the subscript on the left side of the equation indicates the octonion dimension.

In the existing theory of octonions, the multiplication rules for unit imaginary vectors i_1 - i_7 satisfy the conditions given in the table 1.

Table 1

1	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7
i_1	-1	i_3	$-i_2$	i_5	$-i_4$	$-i_7$	i_6
i_2	$-i_3$	-1	i_1	i_6	i_7	$-i_4$	$-i_5$
i_3	i_2	$-i_1$	-1	i_7	$-i_6$	i_5	$-i_4$
i_4	$-i_5$	$-i_6$	$-i_7$	-1	i_1	i_2	i_3
i_5	i_4	$-i_7$	i_6	$-i_1$	-1	$-i_3$	i_2
i_6	i_7	i_4	$-i_5$	$-i_2$	i_3	-1	$-i_1$
i_7	$-i_6$	i_5	i_4	$-i_3$	$-i_2$	i_1	-1

The octonion, given by equation (25) and the rules of multiplication indicated in table 1, has all the basic properties necessary to construct a normalized algebra. However, in this form, the octonion has only the property of alternative multiplication and, in contrast to complex numbers and quaternions, does not have the properties of commutativity and associativity of multiplication.

It is possible to ensure commutativity and associativity of octonion multiplication, as follows from the above conclusion, by replacing the multiplication rules in accordance with table 1 with new rules that are specified by the table 2 below.

Table 2

1	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7
i_1	-1	$\sigma_{12}i_3$	$-\sigma_{31}i_2$	$\sigma_{14}i_5$	$-\sigma_{51}i_4$	$-\sigma_{61}i_7$	$\sigma_{71}i_6$
i_2	$-\sigma_{12}i_3$	-1	$\sigma_{23}i_1$	$\sigma_{24}i_6$	$\sigma_{52}i_7$	$-\sigma_{62}i_4$	$-\sigma_{72}i_5$
i_3	$\sigma_{31}i_2$	$-\sigma_{23}i_1$	-1	$\sigma_{34}i_7$	$-\sigma_{53}i_6$	$\sigma_{63}i_5$	$-\sigma_{37}i_4$
i_4	$-\sigma_{14}i_5$	$-\sigma_{24}i_6$	$-\sigma_{34}i_7$	-1	$\sigma_{45}i_1$	$\sigma_{46}i_2$	$\sigma_{47}i_3$
i_5	$\sigma_{51}i_4$	$-\sigma_{52}i_7$	$\sigma_{53}i_6$	$-\sigma_{45}i_1$	-1	$-\sigma_{65}i_3$	$\sigma_{57}i_2$
i_6	$\sigma_{61}i_7$	$\sigma_{62}i_4$	$-\sigma_{63}i_5$	$-\sigma_{46}i_2$	$\sigma_{65}i_3$	-1	$-\sigma_{76}i_1$
i_7	$-\sigma_{71}i_6$	$\sigma_{72}i_5$	$\sigma_{37}i_4$	$-\sigma_{47}i_3$	$-\sigma_{57}i_2$	$\sigma_{76}i_1$	-1

Included in table 2, unit sign coefficients σ_{mn} ($m = 1 \div 7$, $n = 1 \div 7$) indicate the directions of rotation that are typical for mixed products $i_1 \div i_7$, that is, when performing a multiplication operation for cases where. $m \neq n$.

When using table 2, the product of two octonions $q_8(x) \cdot q_8(y)$ has the form

$$q_8(x) \cdot q_8(y) = (x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 + x_4 i_4 + x_5 i_5 + x_6 i_6 + x_7 i_7) \square$$

$$\square (y_0 + y_1 i_1 + y_2 i_2 + y_3 i_3 + y_4 i_4 + y_5 i_5 + y_6 i_6 + y_7 i_7) =$$

$$= x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4 - x_5 y_5 - x_6 y_6 - x_7 y_7 +$$

$$+ \left[x_0 y_1 + x_1 y_0 + (x_2 y_3 - x_3 y_2)\sigma_{23}^{xy} + (x_4 y_5 - x_5 y_4)\sigma_{45}^{xy} + (x_7 y_6 - x_6 y_7)\sigma_{76}^{xy} \right] i_1 +$$

$$+\left[x_0y_2+x_2y_0+\left(x_3y_1-x_1y_3\right)\sigma_{31}^{xy}+\left(x_4y_6-x_6y_4\right)\sigma_{46}^{xy}+\left(x_5y_7-x_7y_5\right)\sigma_{57}^{xy}\right]i_2+$$
$$+\left[x_0y_3+x_3y_0+\left(x_1y_2-x_2y_1\right)\sigma_{12}^{xy}+\left(x_6y_5-x_5y_6\right)\sigma_{65}^{xy}+\left(x_4y_7-x_7y_4\right)\sigma_{47}^{xy}\right]i_3+$$
$$+\left[x_0y_4+x_4y_0+\left(x_5y_1-x_1y_5\right)\sigma_{51}^{xy}+\left(x_6y_2-x_2y_6\right)\sigma_{62}^{xy}+\left(x_3y_7-x_7y_3\right)\sigma_{37}^{xy}\right]i_4+$$
$$+\left[x_0y_5+x_5y_0+\left(x_1y_4-x_4y_1\right)\sigma_{14}^{xy}+\left(x_6y_3-x_3y_6\right)\sigma_{63}^{xy}+\left(x_7y_2-x_2y_7\right)\sigma_{72}^{xy}\right]i_5+$$
$$+\left[x_0y_6+x_6y_0+\left(x_7y_1-x_1y_7\right)\sigma_{71}^{xy}+\left(x_2y_4-x_4y_2\right)\sigma_{24}^{xy}+\left(x_5y_3-x_3y_5\right)\sigma_{53}^{xy}\right]i_6+$$
$$+\left[x_0y_6+x_6y_0+\left(x_6y_1-x_1y_6\right)\sigma_{61}^{xy}+\left(x_5y_2-x_2y_5\right)\sigma_{52}^{xy}+\left(x_3y_4-x_4y_3\right)\sigma_{34}^{xy}\right]i_7. \qquad (26)$$

It is easy to see from equation (26) that when using the new rules of multiplication, the octonion possesses the commutative property of multiplication.

The conjugate number to octonion (25) has the form

$$\overline{q}_8\left(x\right)=x_0-x_1i_1-x_2i_2-x_3i_3-x_4i_4-x_5i_5-x_6i_6-x_7i_7. \qquad (27)$$

Multiplying the octonion (25) by its conjugate number (27), we have

$$q_8\left(x\right)\cdot\overline{q}_8\left(y\right)=\left(x_0+x_1i_1+x_2i_2+x_3i_3+x_4i_4+x_5i_5+x_6i_6+x_7i_7\right)\square$$
$$\square\left(x_0-x_1i_1-x_2i_2-x_3i_3-x_4i_4-x_5i_5-x_6i_6-x_7i_7\right)=$$
$$=x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2=\left|q_8\left(x\right)\right|^2. \qquad (28)$$

Equation (28) confirms that when using Table 2 (when performing the multiplication operation), the octonion retains the property of being able to construct on its basis a normalized division algebra over the field of real numbers.

In conclusion, we note that the construction of the commutative algebra of quaternions, octonions, and other hypercomplex numbers opens up new possibilities for their application for solving many problems in a number of fields of science and technology, including in the areas of field theory, robotics, digital processing of multidimensional signals, and physical electronics.

А.Т. Ибраев

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

КВАТЕРНИОНДАР МЕН ОКТОНИОНДАРДЫҢ КОММУТАТИВТІ АЛГЕБРАСЫН ЖАСАУДЫҢ ТӘСІЛІ

Аннотация. Кватерниондарды Гамильтон 1843 жылы ұсынғаны белгілі және кватерниондар ғылымның көптеген салаларындағы теориялардың іргелерін құрудың бастапқы негізі болып табылатын векторлық алгебраның қалыптсуына және қазіргі заманауи математиканың басқа да маңызды салаларының тез дамуына себеп болды. Қазіргі кезде кватерниондар, октониондар және басқа гиперкомплексті сандарының алгебрасына, сонымен қатар, оларды әртүрлі іргелі және қолданбалы ғылыми есептерді шешуге қолдануға арналған көптеген ғылыми еңбектер бар. Мәселен, кватерниондар мен октониондардың алгебралары робототехника, физикалық электроника және көп өлшемді сигналдарды цифрлық өңдеу саласындағы бірқатар күрделі нақты мәселелерді шешу үшін жиі қолданылады.

Сонымен бірге, әлі де гиперкомплексті сандардың көбейту амалында коммутациялық қасиеті жоқ деп есептеледі. Фробениус пен Гурвицтің атақты теоремалары белгілі, олардан кватерниондар мен басқа гиперкомплексті сандардың коммутативті алгебрасын құру мүмкіндігі жоқ екендігін байқауға болды. Сонымен қатар, Фробениус теоремасы гиперкомплексті сандардың нақты сандар өрісі бойынша бөлу амалы бар алгебралардың құрылуы кватерниондар мен октониондардың алгебраларымен шектелетінін айтады.

Бұл жұмыста коммутативті төрт өлшемді алгебраны құру шарасын іске асыру тәсілі туралы төменде келтірілген теорема ұсынылған.

Теорема. Кватерниондар кеңістігінің координаталар жүйесінің векторлық бөлігінің координаталық жазықтықтарындағы радиус-векторлары арасындағы бұрыштардың бағыттарының белгілейтін коэффициенттерінің жиынтығын көрсету арқылы кватерниондардың ассоциативті алгебрасының орнына кватерниондардың коммутативті алгебрасын құруға болады.

Әрі қарай алынған нәтижелерден кватерниондар алгебрасының барлық негізгі қасиеттері, оның ішінде бөлу амалын орындау мүмкіндігі сақталғанын көруге болады. Сонымен қатар, коммутативтілікпен бірге кватерниондар алгебрасында көбейтудің ассоциативтілік қасиеті де сақталады.

Бұрыштар бағыттарының белгілер коэффициенттерінің жиынтығын көрсете отырып қайта құрған кватерниондар алгебраның коммутативтілігі туралы теореманың жоғарыда келтірілген дәлелі басқа да гиперкомплекс сандарының қасиеттерін зерттеуде, әртүрлі ғылыми және инженерлік есептерді шешуде гиперкомплекс сандарды қолдану үшін де жаңа мүмкіндіктер ашады.

Әрі қарай бұл жұмыста октониондардың коммутативтік алгебрасын құру мүмкіндігіне байланысты мәселелер қарастырылған. Октонион көбейтіндісінің коммутативтігіне қол жеткізу үшін негіздеме ретінде осы жұмыста ұсынылған кватерниондар көбейтіндісінің коммутативтік қасиетін қамтамасыз ететін әдіс қолданылды.

Кватерниондардың коммутативті алгебрасын құру мәселесін шешудің нәтижелерінен кейбір қорытындылар жасауға болады.

Біріншіден, гиперкомплексті сандардың векторлық кеңістіктігінде болжамды бірліктердің қасиеттері бар бірлік векторларының аралас көбейтінділерінің нәтижелері жазықтықта айналмалы ығысулардың проекциясымен байланысты псевдовекторлар болып табылады.

Екіншіден, айналмалы ығысулардың анық белгіленген модульдік бағытының болмауы олардың бағыттық жүйесінің қосарлануына әкеледі және гиперкомплексті сандарының көбейтуінің коммутативтілігінің болмауына себеп болады.

Жоғарыда айтылғандардан негізгі қорытынды: гиперкомплексті сандардың көбейтуінің өзара байланысын қамтамасыз ету үшін, гиперкомплексті санның векторлық кеңістігінің әр жазықтығына айналмалы қозғалыстар бағыттарының анықтамалық белгілерін біркелкі қою қажет.

Кватерниондар мен октониондардың алгебрасын жетілдіру бойынша алынған нәтижелер нақты сандар көлемінде бөлу қасиеттеріне ие гиперкомплексті жаңа сандарды жасау үшін пайдалануға болады, сонымен қатар, өрістер теориясы, физикалық электроника, робототехника және көп өлшемді сигналдарды цифрлық өңдеу салаларындағы бірқатар ғылыми және техникалық мәселелерді шешуге қолдануға болады.

Түйін сөздер: гиперкомплекстік сан, кватернион, октонион, алгебра, көбейту, бөлу, коммутативтік, вектор.

А.Т. Ибраев

Казахский национальный университет имени Аль-Фараби, Алматы, Казахстан

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ КОММУТАТИВНОЙ АЛГЕБРЫ КВАТЕРНИОНОВ И ОКТОНИОНОВ

Аннотация. Кватернионы, как известно, были предложены Гамильтоном в 1843 году и дали начало бурному развитию векторной алгебры и других важных разделов современной математики, которые являются основной базой построения фундаментальных основ теорий во многих направлениях науки. В настоящее время алгебре кватернионов, октонионов и других гиперкомплексных чисел, а также их применению для решения различных фундаментальных и прикладных научных задач посвящены много научных работ. Например, алгебры кватернионов и октонионов нередко используется для решения ряда сложных специфических задач в областях робототехники, физической электроники и цифровой обработки многомерных сигналов.

Вместе с тем, до сих пор считается, что гиперкомплексные числа не обладают свойством коммутативности. Известны знаменитые теоремы Фробениуса, Гурвица, из которых следует вывод о невозможности построения коммутативной алгебры кватернионов и других гиперкомплексных чисел. Кроме того, в теореме Фробениуса утверждается, что построение гиперкомплексных чисел с делением над полем действительных чисел ограничивается алгебрами кватернионов и октонионов.

В настоящей работе предлагается теорема о построении коммутативной алгебры кватернионов, которая сформулирована следующим образом.

Теорема. Ассоциативная алгебра кватернионов может быть модифицирована в коммутативную алгебру кватернионов путем задания набора знаковых коэффициентов направлений отсчета углов между радиус-векторами в координатных плоскостях векторной части системы координат пространства кватернионов.

Из полученных дальше результатов можно видеть, что все изложенные раньше основные свойства алгебры кватернионов сохраняются, в том числе, возможность операции деления. Кроме того, наряду с коммутативностью сохраняется также и свойство ассоциативности произведения кватернионов.

Доказательство приведенной выше теоремы о коммутативности алгебры кватернионов, модифицированной путем задания набора знаковых коэффициентов направлений отсчета углов, открывает новые

возможности как при исследовании свойств других гиперкомплексных чисел, так и для применения гиперкомплексных чисел при решении различных научных и инженерных задач.

Дальше в работе рассмотрена возможность решения задачи, связанной с построением коммутативной алгебры октонионов. Для достижения коммутативности произведения октонионов в качестве основы используется метод, который был предложен в данной работе для обеспечения свойства коммутативности умножения кватернионов.

Приведены некоторые общие выводы, которые можно сделать по результатам решения задачи по построению коммутативной алгебры кватернионов.

В-первых, в гиперкомплексных числах результатами смешанных произведений мнимых единиц со свойствами единичных векторов векторного пространства являются псевдовекторы, связанные с проекцией вращательных перемещений на плоскости.

Во-вторых, отсутствие однозначно установленного модульного направления вращательных перемещений приводит к двойственности системы их отсчета и является причиной отсутствия коммутативности умножения гиперкомплексных чисел.

Из изложенного выше следует основной вывод: для обеспечения коммутативности умножения гиперкомплексных чисел необходимо для каждой плоскости векторного пространства гиперкомплексного числа однозначно задавать знаки отсчета направлений вращательных перемещений.

Полученные результаты по совершенствованию алгебры кватернионов и октонионов могут быть использованы при разработке новых гиперкомплексных чисел с делением над полем действительных чисел, а также могут найти применение для решения ряда научно-технических задач в областях теории поля, физической электроники, робототехники и цифровой обработки многомерных сигналов.

Ключевые слова: гиперкомплексное число, кватернион, октонион, алгебра, умножение, деление, коммутативность, вектор.

Information about author:

Ibrayev Alpamys, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, pok_rk@mail.ru; ORCID iD 0000-0002-5263-0384

REFERENCES

[1] Hamilton, William Rowan. (1844) On quaternions or on a new system of imaginaries in algebra // Philosophical Magazine. N 25 (3), P. 489–495.

[2] Finkelstein, David; Jauch, Josef M., Schiminovich, Samuel; Speiser, David. (1962) Foundations of quaternion quantum mechanics // J. Math. Phys. N 3, P. 207–220. doi:10.1063/1.1703794.

[3] Kochin N. E. (1965) Vector calculus and beginnings of tensor calculus. M. Nauka. 426 p.

[4] Landau L. D., Lifshits E. M. (1968) Theoretical Physics: Textbook in 10 volumes. V. 1. Mechanics. M., Nauka. 216 p.

[5] Landau L. D., Lifshits E. M. (1968) Theoretical Physics: Textbook in 10 volumes. V. 2. Field theory. M., Nauka,. 512 p.

[6] Laptev G.F. (1975) Elements of vector calculus. M.: Nauka,. 336 p.

[7] Sedov L.I. (1983) Continuum mechanics, v. 1. M.: Nauka,. 528 p.

[8] Ibrayev A.T. (2015) Theory of Cathode Lens with Multipole Components of Electrostatic Field and the Space Charge // Microscopy and Microanalysis. V. 21, N6, P. 270-275. doi:10.1017/S1431927615013495.

[9] Zhang, Fuzhen. (1997) Quaternions and Matrices of Quaternions // Linear Algebra and its Applications, 251, P. 21–57. doi:10.1016/0024-3795(95)00543-9.

[10] Ron Goldman. (2010) Rethinking Quaternions: Theory and Computation // Morgan & Claypool. ISBN 978-1-60845-420-4.

[11] Vince, John A. (2008) Geometric Algebra for Computer Graphics. Springer. ISBN 978-1-84628-996-5.

[12] Hanson, Andrew J. (2006) Visualizing Quaternions. Elsevier. ISBN 0-12-088400-3.

[13] Kuipers, Jack. (2002) Quaternions and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace, and Virtual Reality. Princeton University Press. ISBN 0-691-10298-8.

[14] Trifonov, V. A (1995) Linear Solution of the Four-Dimensionality Problem // Europhysics Letters. 32 (8), P. 621–626. doi:10.1209/0295-5075/32/8/001.

[15] Trifonov V. (2007) Natural Geometry of Nonzero Quaternions // International Journal of Theoretical Physics. 46 (2), P. 251–257. doi:10.1007/s10773-006-9234-9.

[16] Branets V.N., Shmyglevsky I.P. (1973) Applying Quaternions to Rigid Body Orientation Problems. M. 320 p.

[17] Dajion D., Mercero R. (1988) Digital processing of multidimensional signals: Transl. from Engl. M. Mir. 488 p.

[18] Berezin A.V., Kurochkin Yu.A., Tolkachev E.A. (2003) Quaternions in relativistic physics. M. 200 p.

[19] Ibrayev A.T. (2009) Multidimensional hypercomplex and modified complex numbers // Vestnik of Kazakh National Technical University named after K.I.Satpayev. № 6 (76), P. 153-159.

[20] Di Gennaro S. (2003) Passive Attitude Control of Flexible Spacecraft from Quaternion Measurements // Journal of Optimization Theory and Applications N1. P 41-60.

[21] Kantor I.L., Solodovnikov A.S. (1973) Hypercomplex numbers. M. 144 p.