NEWS
OF THENATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X **https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.99**
Volume 6, Number 334 (2020), 68 – 73

UDC 530.1

N.S. Serikbayev[1,3], G. N. Nugmanova[2,3], A.A. Meirmanova[1]

[1] L.N. Gumilyov Eurasian National University, Department of General and Theoretical Physics, Nur-Sultan, Kazakhstan;
[2]L.N. Gumilyov Eurasian National University, Department of Mathematical and Computer Modeling, Nur-Sultan, Kazakhstan;
[3]LLP "Ratbay Myrzakulov Eurasian International Centre for Theoretical Physics", Nur-Sultan, Kazakhstan.
E-mail: ns.serikbayev@gmail.com; nugmanovagn@gmail.com; akbotameirmanovaa@gmail.com

GAUGE EQUIVALENCE BETWEEN THE TWO-COMPONENT GENERALIZATION OF THE (2+1)-DIMENSIONAL DAVEY-STEWARTSON I EQUATION AND Γ - SPIN SYSTEM

Abstract. In recent years, multidimensional nonlinear evolutionary equations have been actively studied within the framework of the theory of solitons. Their relevance is confirmed by numerous scientific publications. In this work the gauge equivalence between the (2+1)-dimensional integrable two-component Davey-Stewartson I (DSI) equation and the Γ - spin system is established. Multicomponent generalizations of nonlinear integrable equations are of current interest from both physical and mathematical points of view. In the theory of integrable (soliton) equations, one of the key models is integrable nonlinear Schrodinger-type (NLS) equations. A two-component integrable generalization of the (2+1)-dimensional DSI equation, obtained on the basis of its one-component representation, and its corresponding Lax representation were proposed. A geometric connection between the two-layer spin system and the integrable two-component Manakov system is found. The nonlinear equations are integrated using the inverse scattering problem method by means of a linear system. For each integrable nonlinear equation, as is known, there is a Lax pair of two linear equations, a compatibility condition, that is, a condition of zero curvature, which this equation serves. We have obtained Lax pair whose zero curvature condition gives the Γ - spin system.

Key words: Gauge equivalence, Γ - spin systems, integrable nonlinear equations, Manakov system, Davey-Stewartson I (DSI) equation.

1. Introduction

Integrable spin systems are an important subclass of integrable nonlinear equations. Multicomponent generalizations of nonlinear integrable equations are of current interest from both physical and mathematical points of view. In the theory of integrable (soliton) equations, one of the key models is integrable nonlinear Schrodinger-type (NLS) equations [1, 2]. The DS equations of types I and II are the (1+1)-dimensional generalizations of NLS equations [3]. In the work [4, 5], a two-component integrable generalization of the (2+1)-dimensional DSI equation, obtained on the basis of its one-component representation, and its corresponding Lax representation were proposed. A geometric connection between the two-layer spin system and the integrable two-component Manakov system is established in [6-8]. The concept of gauge equivalence of two spectral problem was introduced in [5]. The main result of this work is the establishment of gauge equivalence between the (2+1)-dimensional integrable two-component DS-I equation and the Γ -spin system.

Consider the (2+1)-dimensional DSI equation [4]:

$$iq_{1t} + q_{1xx} + q_{1yy} - \upsilon_1 q_1 - \omega_1 q_2 = 0, \tag{1}$$

$$iq_{2t} + q_{2xx} + q_{2yy} - \omega_2 q_1 - \upsilon_2 q_2 = 0, \tag{2}$$

$$-ir_{1t}+r_{1xx}+r_{1yy}-\upsilon_1 r_1-\omega_1 r_2=0, \tag{3}$$

$$-ir_{2t}+r_{2xx}+r_{2yy}-\omega_2 r_1-\upsilon_2 r_2=0, \tag{4}$$

$$x_{1xx}-x_{1yy}=(2r_1q_1+r_2q_2)_{xx}+2(r_2q_2)_{xy}+(2r_1q_1+r_2q_2)_{yy} \tag{5}$$

$$x_{2xx}-x_{2yy}=(r_1q_1+2r_2q_2)_{xx}+2(r_1q_1)_{xy}+(r_1q_1+2r_2q_2)_{yy} \tag{6}$$

$$u_{1xx}-u_{1yy}=(q_1r_2)_{xx}-2(q_1r_2)_{xy}+(q_1r_2)_{yy}, \tag{7}$$

$$u_{2xx}-u_{2yy}=(q_2r_1)_{xx}-2(q_2r_1)_{xy}+(q_2r_1)_{yy}, \tag{8}$$

where $r=\pm q^*$, q^* is the complex conjugate of q, $q_i=q_1(x,y,z)$, $r_i=r_i(x,y,z)$ are complex-valued functions and $x_i=x_i(x,y,t)$, $u_i=u_i(x,y,t)$ $(i=1,2)$ are real functions.

Lax representation for this equation is given in the form

$$F_y=\Sigma F_x+QF, \tag{9}$$

$$F_t=2i\Sigma F_{xx}++2iQF_x+A_0F, \tag{10}$$

where

$$\sum=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix}0&q_1&q_2\\-r_1&0&0\\-r_2&0&0\end{pmatrix},$$

$$A_0=\begin{pmatrix}c_{11}&i(q_{1x}+q_{1y})&i(q_{2x}+q_{2y})\\-i(r_{1x}-r_{1y})&c_{22}&c_{23}\\-i(r_{2x}-r_{2y})&c_{32}&c_{33}\end{pmatrix}.$$

The one-component cases of these equations have been extensively studied in [2, 3].

2. Gauge equivalence between the Γ - spin system and two-component generalization of the (2+1)-dimensional DSI equation

The Γ - spin system reads as

$$i\Gamma_t-4i\sigma_x\Gamma+4i\sigma\Gamma_x+4i\sigma_y+\Gamma\left\{\Gamma_{xx}+\Gamma_{yy}+\left(\Gamma_x-\Gamma_y\right)^2\right\}=0, \tag{11}$$

where

$$\Gamma=g^{-1}\sum g\,,\Gamma^2=I, \tag{12}$$

are

$$\Gamma=\begin{pmatrix}\Gamma_{11}&\Gamma_{12}&\Gamma_{13}\\\Gamma_{21}&\Gamma_{22}&\Gamma_{23}\\\Gamma_{31}&\Gamma_{32}&\Gamma_{33}\end{pmatrix}\in su(3).$$

The Lax pair is given as

$$\Psi_y=\Gamma\Psi_x, \tag{13}$$

$$\Psi_t=2i\Gamma\Psi_{xx}+iV'\Psi_x, \tag{14}$$

where

$$V'=4i\sigma+\Gamma_x+\Gamma\Gamma_y. \tag{15}$$

Theorem. *The two-component generalization of the (2+1)-dimensional DSI equation (1)-(8) and Г - spin system (11) is gauge equivalent to each other.*

Proof. According to the definition, the systems (9)-(10) and (13)-(14) are gauge equivalent if eigenfunctions F and Φ can be connected as $\Phi = g^{-1}F$ or $F = g\Phi$, where g is the solution of Eq. (9) at zero spectral parameter λ.

From the transformation $F = gЦ$ we take the derivatives with respect to y and t, then equate them to the left sides of the Eqs. (13)-(14). As a result, we obtain the following equations

$$Ц_y = \left(g^{-1}\sum g_x + g^{-1}Qg - g^{-1}g_y\right)Ц + g^{-1}\sum g\, Ц_x. \tag{16}$$

$$Ц_t = 2ig^{-1}\sum gЦ_{xx} + 2ig^{-1}(2\sum g_x + Qg)Ц_x + g^{-1}(2i\sum g_{xx} + 2iQg_x + A_0gЦ - g_t)Ц. \tag{17}$$

On the other hand, according to the definition of gauge equivalence, g satisfies Eqs. (9)-(10):

$$g_y = \sum g_x + Qg, \tag{18}$$

$$g_t = 2i\sum g_{xx} + 2iQg_x + A_0g. \tag{19}$$

Substituting these equations into (16)-(17), we obtain

$$Ц_y = g^{-1}\sum gЦ_x. \tag{20}$$

$$Ц_t = (4ig^{-1}\sum gg^{-1}g_x + 2ig^{-1}Qg)Ц_x + 2ig^{-1}\sum gЦ_{xx}. \tag{21}$$

Further, making the substitution $Г = g^{-1}\sum g$ in the last equations, one can rewrite them as

$$Ц_y = ГЦ_x, \tag{22}$$

$$Ц_t = 2iГЦ_{xx} + i(4Гg^{-1}g_x + 2g^{-1}Qg)Ц_x. \tag{23}$$

As can be seen, it is necessary to express $g^{-1}g_x$ and $g^{-1}Qg$ in terms of $Г$ - spin. To begin with, let us define $Г_x$:

$$Г_x = (g^{-1}\sum g_x)_x = [Г, g^{-1}g_x]. \tag{24}$$

Next we introduce the notation

$$g_xg^{-1} = iИ_0. \tag{25}$$

Here

$$И_0 = \begin{pmatrix} б & в & г \\ з & -б & 0 \\ с & 0 & -б \end{pmatrix}, \tag{26}$$

where $б, в, г, з$ and $с$ are real functions. Then Eq. (24) will take the following form

$$Г_x = g^{-1}[\sum, g_xg^{-1}]g = 2ig^{-1}И_1g, \tag{27}$$

and

$$ГГ_x = (g^{-1}\sum g)(2ig^{-1}И_1g) = 2ig^{-1}И_2g, \tag{28}$$

where

$$И_2 = \begin{pmatrix} 0 & в & г \\ з & 0 & 0 \\ с & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

In a similar way we find $Г_y$:

$$Г_y = ГГ_x + 2g^{-1}\begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_2 \\ r_1 & 0 & 0 \\ r_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}g. \tag{30}$$

From this equation the commutator simply is $[\Gamma,\Gamma_x] = 2\Gamma\Gamma_x$ and $\Gamma\Gamma_y + \Gamma_x = 2g^{-1}Qg$. Taking into account the above expressions and after some calculations, we get the following:

$$g^{-1}g_x = i\alpha\Gamma + \frac{1}{2}\Gamma\Gamma_x, \tag{31}$$

$$g^{-1}Qg = \frac{1}{2}\left(\Gamma\Gamma_y - \Gamma_x\right). \tag{32}$$

If the last equations are substituted into Eq. (23), then the output is Eq. (14).

That is, here we have obtained Lax pair whose zero-curvature condition gives the Γ - spin system (11). Thus, we obtained the system of Eqs. (11)-(14), which was required to prove.

2. Conclusion.

To conclude, we obtained the Lax representation of the Γ - spin system (13)-(14) that is gauge equivalent to the Lax pair of the two-component generalization DSI (9)-(10).

The work was supported by the MES RK on the GF, IRN AP08857372.

Н.С. Серикбаев[1,3], Г. Н. Нугманова[2,3], А.А. Мейрманова[1]

[1]Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан;
[2]Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан;
[3] «Рәтбай Мырзақұлов атындағы Еуразия халықаралық теориялық физика орталығы» ЖШС, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

ЕКІ КОМПОНЕНТТІ ЖАЛПЫ (2+1)-ӨЛШЕМДІ ДЭВИ-СТЮАРТСОН I ТЕҢДЕУІ МЕН *Г* - СПИНДІК ЖҮЙЕСІ АРАСЫНДАҒЫ КАЛИБРЛІК ЭКВИВАЛЕНТІЛІГІ

Аннотация. Соңғы жылдары солитондар теориясы аясында көпөлшемді сызықты емес эволюциялық теңдеулер белсенді зерттелуде. Олардың өзектілігі көптеген ғылыми жарияланымдармен дәлелденеді. Интегралданатын (солитонды) теңдеулер теориясында Шредингер типіндегі интегралданатын сызықты емес теңдеулер (ШСТ) негізгі модельдердің бірі болып саналады. Бұл теңдеуді алғаш рет Э.Шредингер кванттық жүйелердің іргелі қасиеттерін талдау үшін ұсынған және бастапқыда ол атом ішіндегі бөлшектердің өзара әрекеттесу үдерісін сипаттау үшін қолданылған [1-2].

Сызықтық емес интегралданатын теңдеулердің көпкомпонентті жалпылануы физикалық және сондай-ақ математикалық тұрғыдан қазіргі уақытта қызығушылық тудырады. Жалпыланған ШСТ теңдеуі толқындық үдерістер физикасындағы құбылыстардың тұтас жиынтығын сипаттайды. Ол физиканың түрлі саласындағы толқынды сипаттауда кеңінен тараған, атап айтқанда, сызықтық емес оптика, плазмалық физика және т.б. I және II типті Дэви-Стюартсона (ДС) теңдеуі ШСТ теңдеуінің біркомпонентті (2+1)-өлшемді жалпылануы саналады [3], ал [4-5] жұмыста интегралданатын (2+1)-өлшемді ДСI теңдеуінің екі компонентті жалпылануы ұсынылған.

Сызықты емес теңдеулер интегралданады, яғни сызықтық жүйе арқылы шашыранды кері есеп әдісі арқылы шешуге болады, мәні бойынша сызықтық теория әдістерімен сызықтық емес есепті зерттеуге мүмкіндік береді. Біз білетіндей, әрбір интегралданатын сызықтық емес теңдеуге арналған екі сызықтық теңдеуден тұратын Лакс жұбы бар, үйлесімділік шарты, яғни нөлдік қисықтық шарты берілген теңдеу болып саналады. [4]-жұмыста ұсынылған екі компонентті ДСI теңдеуі оның бір компонентті ұсыну және сәйкес Лакс ұсынысы негізінде алынған. Жалпы Лакс жұбы сәйкес сызықтық емес теңдеу интегралдылығына кепілдік бермейді, бірақ бұл – қажетті шарт.

Сызықтық емес интегралданатын теңдеулерді зерттеудегі тағы бір ұғым – калибрлік эквиваленттілік маңызды рөл атқарады. Екі спектрлік есептің калибрлік эквиваленттілік ұғымы [2]-де енгізілді. Калибрлік эквиваленттік – қарастырылған теңдеулерге тән кейбір маңызды жалпы сипаттамаларды ашуға мүмкіндік беретін, сызықтық емес теңдеулерді зерттеуге арналған тәсіл. Калибрлік эквиваленттілік бірқатар жаңа интегралданатын теңдеулер құруға және Лакс жұбы арқылы дәл шешуге мүмкіндік береді.

[6-8] жұмыста екіқабатты спиндік жүйе мен интегралданатын екі компонентті Манаков жүйесі арасындағы калибрлік эквиваленттілік анықталған.

Мақалада (2+1)-өлшемді интегралданатын екі компонентті ДСI теңдеуі (1)-(8) мен Γ -спиндік жүйесі (11) қарастырылған, олардың өзара байланысы зерттелген.

Калибрлі эквиваленттілік анықтамасына сәйкес, (9)-(10) және (13)-(14) жүйесінің F және Φ меншікті функцияларын $\Phi = g^{-1}F$, g немесе $F = g\Phi$, мұндағы g - (9) теңдеудің λ нөлдік спектрлік параметр кезіндегі

шешімі деп байланыстырсақ, калибрлік эквивалентті деп сипатталады. $F = gЦ$ түрлендіруінен y және t-ға қатысты туынды аламыз, содан кейін оларды (13)-(14) теңдеулердің сол жақ бөлігіне теңестіреміз және т.б. Осылайша осы екі теңдеудің калибрлік эквиваленттілігі сәйкесінше Лакс жұбы арқылы ДСІ теңдеуінің (9)-(10) Лакс жұбы және $Г$ - спиндік жүйесінің (13)-(14) Лакс жұбы арасында дәлелденген.

Жұмыстың негізгі нәтижесі (2+1) өлшемді интегралданатын екі компонентті ДСІ теңдеуі мен $Г$ -спиндік жүйесі арасындағы калибрлік эквивалент орнатылғандығы болып саналады.

Н.С. Серикбаев[1,3], Г. Н. Нугманова[2,3], А.А. Мейрманова[1]

[1]Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, кафедра Общей и Теоретической Физики, Нур-Султан, Казахстан;
[2]Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, кафедра Математического и Компьютерного Моделирования, Нур-Султан, Казахстан
[3]ТОО “Ratbay Myrzakulov Eurasian International Centre for Theoretical Physics”, Нур-Султан, Казахстан

КАЛИБРОВОЧНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ МЕЖДУ ДВУХКОМПОНЕНТНЫМ ОБОБЩЕНИЕМ (2+1)-МЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ДЭВИ-СТЮАРТСОНА I И $Г$ - СПИНОВОЙ СИСТЕМОЙ

Аннотация. В последние годы в рамках теории солитонов активно изучаются многомерные нелинейные эволюционные уравнения. Их актуальность подтверждается многочисленными научными публикациями. В теории интегрируемых (солитонных) уравнений одной из ключевых моделей являются интегрируемые нелинейные уравнения типа Шредингера (НУШ). Впервые это уравнение было предложено Э. Шредингером для анализа фундаментальных свойств квантовых систем, и первоначально с его помощью описывались процессы взаимодействия внутриатомных частиц [1-2].

Многокомпонентные обобщения нелинейных интегрируемых уравнений в настоящее время представляют интерес как с физической, так и с математической точки зрения. Обобщенное уравнение НУШ описывает целую совокупность явлений в физике волновых процессов. Оно широко распространено при описании волн в различных областях физики, в частности в волновых явлениях нелинейной оптики, физике плазмы и т.д. Как известно уравнения Дэви-Стюартсона (ДС) типов I и II являются однокомпонентными (2+1)-мерными обобщениями уравнений НУШ [3], а в работах [4, 5] предложено двухкомпонентное интегрируемое обобщение (2+1)-мерного уравнения ДСІ.

Нелинейные уравнения интегрируются, т.е. их можно решить с помощью метода обратной задачи рассеяния посредством линейной системы, который позволяет исследовать нелинейную задачу, по существу, методами линейной теории. Как мы знаем для каждого интегрируемого нелинейного уравнения существует пара Лакса из двух линейных уравнений, условием совместности, то есть условием нулевой кривизны которых служит данное уравнение. Предложенное в работе [4] двухкомпонентное уравнение ДСІ, получено на основе его однокомпонентного представления и соответствующего ему представления Лакса. Вообще, существование пара Лакса не гарантирует интегрируемость соответствующего нелинейного уравнения, но является необходимым условием.

Еще одно понятие – калибровочная эквивалентность – играет важную роль в исследованиях нелинейных интегрируемых уравнений. Понятие калибровочной эквивалентности двух спектральных задач было введено в [2]. Калибровочная эквивалентность – это подход к исследованию нелинейных уравнений, который позволяет открыть некоторые важные общие характеристики, присущие рассматриваемым уравнениям. Калибровочная эквивалентность позволяет генерировать ряд новых интегрируемых уравнений и решить их точно с помощью формулы Лакса.

В работах [6-8] найдена калибровочная эквивалентность между двухслойной спиновой системой и интегрируемой двухкомпонентной системой Манакова.

В этой статье рассмотрено (2+1)-мерное интегрируемое двухкомпонентное уравнение ДСІ (1)-(8) и $Г$ - спиновая система (11), исследована их взаимосвязь. Согласно определению калибровочной эквивалентности, системы (9)-(10) и (13)-(14) калибровочно эквивалентны, если собственные функции F и Φ могут быть связаны следующим образом: $\Phi = g^{-1}F$ или $F = g\Phi$, где g – решение уравнения (9) при нулевом спектральном параметре λ. Из преобразования $F = gЦ$ берем производные по y и t, а затем приравниваем их к левым частям уравнений. (13)-(14) и т.д. Таким образом, доказана калибровочная эквивалентность этих двух уравнений с помощью соответствующих пар Лакса, т.е. парой Лакса уравнения ДСІ (9)-(10) и парой Лакса $Г$ - спиновой системы (13)-(14).

Основным результатом данной работы является установление калибровочной эквивалентности между (2+1)-мерным интегрируемым двухкомпонентным уравнением ДСІ и $Г$ - спиновой системой.

Information about authors:

Serikbayev Nurzhan Sagindikovich, PhD, Assoc. Professor, L. N. Gumilyov Eurasian National University, department of General and Theoretical Physics, Kazakhstan, Researcher LLP "Ratbay Myrzakulov Eurasian International Centre for Theoretical Physics" Kazakhstan ns.serikbayev@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-1259-637X;

Nugmanova Gulgassyl Nukarbaevna, Candidate of physical and mathematical sciences, Assoc. Professor. L. N. Gumilyov Eurasian National University, Mathematical and Computer modeling, Kazakhstan, Researcher LLP "Ratbay Myrzakulov Eurasian International Centre for Theoretical Physics". Kazakhstan nugmanovagn@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-4492-2459;

Meirmanova Akbota Assylbekovna - PhD student, L. N. Gumilyov Eurasian National University, department of General and Theoretical Physics, Kazakhstan. akbotameirmanovaa@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-4050-322X

REFERENCES

[1] Ablowitz M., Clarkson P.. Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering, London Mathematical Society Lecture Note Series Book, 2003. 149, p. 516

[2] Zakharov V., Takhtadjan L. Equivalence of the nonlinear Schrodinger equation and the equation of a Heisenberg ferromagnet, Theor. Math. Phys. 1979. 38, pp. 17-23.

[3] Davey A., Stewartson K. On three-dimensional packets of surface waves, Proc. of the Royal Society of London Series A, 1974. 338, pp. 101-110.

[4] Serikbayev N., Nugmanova G., Myrzakulov R. On the two-component generalization of the (2+1)-dimensional Davey-Stewartson I equation, Journal of Physics: Conference Series 1391 (2019) 012160, [doi:10.1088/1742-6596/1391/1/012160]

[5] Serikbayev N., Shaikhova G., Yesmakhanova K., Myrzakulov R. Traveling wave solutions for the (3+1)-dimensional Davey-Stewartson equations, Journal of Physics: Conference Series 1391 (2019) 012166, [doi:10.1088/1742-6596/1391/1/012166]

[6] Myrzakul A., Myrzakulov R. Darboux transformations exact soliton solutions of integrable coupled spin systems related with the Manakov system, [arXiv:1607.08151]

[7] Myrzakul A., Myrzakulov R. Integrable geometric flows of interacting curves/surfaces, multilayer spin systems and the vector nonlinear Schrodinger equation, [arXiv:1608.08553]

[8] Nugmanova G., Myrzakul A. Integrability of the two-layer spin system, Proc. of Twentieth Int. Conf. ”Geometry, Integrability and Quantization”, June 2-7, 2018. Varna, Bulgaria. 2019. pp. 208-214 [doi: 10.7546/giq-20-2019-208-214]