**REPORTS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN**
ISSN 2224-5227
Volume 1, Number 311 (2017), 79 – 85

UDC 681.513.8+51

**V.P. Malyshev, Y.S. Zubrina, A.M. Makasheva**

Zh. Abishev Chemical and Metallurgical Institute, Karaganda, Kazakhstan
eia_hmi@mail.ru

# NUMBER φ AND NATURAL SERIES OF NUMBERS

**Abstract.** If we present the number φ in generalized form as the infinite radicals and infinite fraction, the concepts such as the proportion of the golden section and the fundamental nature of the infinite natural series of numbers are interrelated. These concepts comprise in the basis of process of self-organization of complex systems as the most stable relations of structural (information) and disordered (entropy) components, expressed as the number φ, and directed in an infinite sequence of transition from level to level with the improvement of the system.

In this article the number φ is generally presented in the form of infinite radicals and infinite fractions with output to numeric sequence containing the number φ, and natural numbers.

**Keywords:** numbers, natural series, golden section, ratio, structural component, disordered component.

УДК 681.513.8+51

**В.П. Малышев, Ю.С. Зубрина, А.М. Макашева**

Химико-металлургический институт имени Ж. Абишева, Караганда, Казахстан

# ЧИСЛО φ И НАТУРАЛЬНЫЙ РЯД ЧИСЕЛ

**Аннотация.** Если число φ представить в обобщенном виде через бесконечные корни и бесконечную дробь, то такие понятия как пропорция золотого сечения и фундаментальность бесконечного натурального ряда чисел будут взаимосвязаны между собой. Эти понятия содержатся в основе процессов самоорганизации сложных систем в качестве наиболее устойчивых соотношений структурной (информационной) и неупорядоченной (энтропийной) составляющих, выражаемых числом φ, и направленного в бесконечность последовательного перехода с уровня на уровень по мере совершенствования системы.

В статье число φ обобщенно представлено в виде бесконечных корней и бесконечной дроби с выходом на числовые последовательности, содержащие как число φ, так и натуральный ряд чисел.

**Ключевые слова:** числа, натуральные ряды, золотое сечение, соотношение, структурная составляющая, неупорядоченная составляющая.

## Введение

Пропорция золотого сечения φ = 1,618… настолько широко охватывает структурное совершенство множества разнообразных объектов, что рассматривается как своеобразная формула мироздания [1]. Особенно четко это выявляется при энтропийно-информационном анализе самоорганизующихся иерархических систем на самых ранних этапах становления [2-8]. Тем важнее уделять внимание каждому аналитическому выражению числа φ с целью уточнения и расширения его места как в математическом, так и реальном пространстве.

В этом плане представляет интерес интерпретация пропорции золотого сечения в виде бесконечных корней и бесконечной дроби [1]. В первом случае имеет место формула

$$\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}\,. \tag{1}$$

Здесь решение находится путем преобразования (1) в более общий вид

$$x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}} \tag{2}$$

и возведения в квадрат обеих частей равенства

$$x^2 = 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}\,. \tag{3}$$

Так как и в этом случае корневое выражение остается бесконечным, то оно идентично формуле (2), и поэтому получается известное квадратное уравнение

$$x^2 = 1+x \tag{4}$$

с положительным корнем

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\,... = \varphi\,. \tag{5}$$

Аналогично, но с некоторым своеобразием анализируется выражение для φ в виде бесконечной дроби

$$\varphi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}\,. \tag{6}$$

Здесь преобразование к более общему виду приводит к формуле

$$x = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}\,, \tag{7}$$

в которой общий знаменатель ввиду его бесконечности оказывается идентичным всему выражению (7), поэтому справедлива замена

$$x = 1+\frac{1}{x}\,, \tag{8}$$

откуда вновь приходим к уравнению (4) с его положительным корнем (5).

В обоих случаях используются приемы обобщения, а также свойства бесконечности, и это помогает постичь число φ как «сокровищницу сюрпризов» [1], хотя и сама бесконечность полна неожиданных откровений [9-11]. А что если продолжить обобщение, заменив единицу на натуральный ряд чисел в выражениях (2) и (7) и проанализировать обе бесконечности для бесконечного множества натуральных чисел? Тем более что сам по себе вопрос «А что, если?» относится к разряду креативных [1]?

**Ряды бесконечных корней и дробей**

Бесконечные корни в выражении (2) могут быть обобщенно представлены в виде

$$x = \sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\dots}}}}\,. \tag{9}$$

Возведение в квадрат дает результат

$$x^2 = n + x\,, \tag{10}$$

из которого следует общая формула для положительного корня

$$x = \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}\,. \tag{11}$$

На самом деле это выражение представляет собой общий член какого-то неизвестного ряда

$$a_n = \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}, \tag{12}$$

которым описывается числовая последовательность для $n$ = 1, 2, 3 … $n$ … Это расходящийся ряд ($a_n \to \infty$ при $n \to \infty$), а его численное выражение обнаруживает некоторые регулярности уже в первых трех десятках членов (табл. 1).

Таблица 1 – Числовая последовательность* ряда (12)

| $n$ | $a_n$ | $n$ | $a_n$ | $n$ | $a_n$ | $n$ | $a_n$ | $n$ | $a_n$ | $n$ | $a_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,618 | 6 | 3 | 11 | 3,854 | 16 | 4,531 | 21 | 5,109 | 26 | 5,623 |
| 2 | 2 | 7 | 3,192 | 12 | 4 | 17 | 4,653 | 22 | 5,216 | 27 | 5,720 |
| 3 | 2,302 | 8 | 3,372 | 13 | 4,140 | 18 | 4,772 | 23 | 5,321 | 28 | 5,815 |
| 4 | 2,561 | 9 | 3,541 | 14 | 4,274 | 19 | 4,887 | 24 | 5,424 | 29 | 5,908 |
| 5 | 2,791 | 10 | 3,701 | 15 | 4,405 | 20 | 5 | 25 | 5,524 | 30 | 6 |

*$a_n$ приведен по первым четырем цифрам для бесконечных десятичных дробей

В этой последовательности появление чисел натурального ряда $N$ после $a_1 = \varphi$, начиная с $a_2$, подчиняется вполне очевидной закономерности, когда каждому $N$ соответствует $n = N\,(N - 1)$, и тогда натуральный ряд чисел $a_N = N$ может быть выражен через ряд (12) как

$$a_N = \frac{1+\sqrt{1+4N(N-1)}}{2}, \tag{13}$$

Причем, этот ряд начинается с единицы, т.е. полностью охватывает натуральную последовательность.

Таким образом, равенство (13) может рассматриваться в качестве своеобразного генератора натуральных чисел. Но, по-видимому, более существенно то, что натуральный ряд является частью более общего ряда, для которого вся последовательность непременно содержит число φ в качестве первого члена. Эта последовательность содержит и еще одну регулярность, которая выражается в том, что число промежуточных членов ряда между натуральными числами увеличивается по мере возрастания $N$ на два члена. Так, после $N$ = 1 (при $n$ = 0) содержится только число φ, после $N$ = 2 промежуточных членов становится 3, после $N$ = 3 их уже 5 и т.д. Если обозначить число промежуточных членов между $N$ и $N$ + 1 как $k$, то данная закономерность может быть выражена в виде арифметической прогрессии

$$k = 2N - 1. \tag{14}$$

Более детальное представление промежутка между последовательными натуральными числами, вплоть до $k \to \infty$ при $N \to \infty$, может быть сопоставлено, например, с увеличением информационной емкости каких-либо сложных систем по мере перехода на более высокие уровни самоорганизации, тем более что переход с первого уровня на второй характеризуется пропорцией золотого сечения, впервые закрепляющей превосходство структурной (информационной) составляющей системы (0,618 : 0,382) [2,4,12,13].

Вероятно, обнаруженные закономерности при анализе представления числа φ в виде бесконечных корней являются достаточно уникальными, так как они не воспроизводятся при подобном же анализе числа φ в виде бесконечной дроби.

Так, для равенств (7) и (8) дальнейшее обобщение приводит к формам

$$x = n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \dots}}}}, \qquad (15)$$

$$x = n + \frac{1}{x}, \qquad (16)$$

Из полученного квадратного уравнения

$$x^2 - nx - 1 = 0, \qquad (17)$$

находим положительный корень

$$x = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2} \qquad (18)$$

и соответствующее выражение для общего члена ряда

$$a_n = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}. \qquad (19)$$

Расчеты последовательности по этому ряду приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Числовая последовательность ряда (19)

| $n$ | $a_n$ | $n$ | $a_n$ | $n$ | $a_n$ | $n$ | $a_n$ | $n$ | $a_n$ | $n$ | $a_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,618 | 6 | 6,162 | 11 | 11,09 | 16 | 16,06 | 21 | 21,04 | 26 | 26,03 |
| 2 | 2,414 | 7 | 7,140 | 12 | 12,08 | 17 | 17,05 | 22 | 22,04 | 27 | 27,03 |
| 3 | 3,302 | 8 | 8,123 | 13 | 13,07 | 18 | 18,05 | 23 | 23,04 | 28 | 18,03 |
| 4 | 4,236 | 9 | 9,109 | 14 | 14,07 | 19 | 19,05 | 24 | 24,04 | 29 | 29,03 |
| 5 | 5,192 | 10 | 10,09 | 15 | 15,06 | 20 | 20,04 | 25 | 25,03 | 30 | 30,03 |

Приведенная в таблице числовая последовательность (с ограничением бесконечных числовых дробей по первым четырем цифрам) стремится к значению

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{n + \sqrt{n^2}}{2} = n \qquad (20)$$

и поэтому расходится. В этой области ввиду $a_n \cong n$ данный ряд с бесконечно малой погрешностью совпадает с натуральным рядом чисел, т.е. $a_n \cong a_N \cong N$, но без той строгой принадлежности натурального ряда (13) последовательности (12), основанной на происхождении из представления числа φ через бесконечные корни. Как и этот ряд, последовательность (19) при $n = 0$ также начинается с единицы и перехода к φ при $n = 1$. Но при экстраполяции в отрицательные значения $n$ она при $n = -1$ еще раз дает пропорцию золотого сечения $a_{-1} = 0,618\dots$!

Представление φ в виде бесконечной дроби допускает еще большее обобщение, сохраняющее сводимость его к исходному варианту только с единицами:

$$x = n + \cfrac{n}{n + \cfrac{n}{n + \cfrac{n}{n + \cfrac{n}{n + \dots}}}}, \qquad (21)$$

Здесь повторение уже использованных преобразований приводит к выражениям

$$x = n + \frac{n}{x}, \qquad (22)$$

$$x^2 - nx - n = 0, \qquad (23)$$

откуда находим положительный корень

$$x = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4n}}{2}, \qquad (24)$$

который дает возможность формирования новой последовательности

$$a_n = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4n}}{2}. \qquad (19)$$

Результаты расчетов по этой последовательности приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Числовая последовательность ряда (25)

| $n$ | $a_n$ | $n$ | $a_n$ | $n$ | $a_n$ | $n$ | $a_n$ | $n$ | $a_n$ | $n$ | $a_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,618 | 6 | 6,872 | 11 | 11,922 | 16 | 10,944 | 21 | 21,956 | 26 | 26,964 |
| 2 | 2,732 | 7 | 7,887 | 12 | 12,928 | 17 | 17,947 | 22 | 22,958 | 27 | 27,965 |
| 3 | 3,791 | 8 | 8,898 | 13 | 13,933 | 18 | 18,949 | 23 | 23,959 | 28 | 28,966 |
| 4 | 4,828 | 9 | 9,908 | 14 | 14,937 | 19 | 19,952 | 24 | 24,961 | 29 | 29,967 |
| 5 | 5,854 | 10 | 10,916 | 15 | 15,940 | 20 | 20,954 | 25 | 25,962 | 30 | 30,968 |

Этот ряд, в отличие от (12) и (19), при $n = 0$ дает значение $a_0 = 0$, далее сводясь при $a_1$ к φ. При экстраполяции в сторону $n \to \infty$ предел последовательности (25)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{n + \sqrt{n(n+4)}}{2} = \frac{n + \sqrt{n^2}}{2} = n \qquad (26)$$

также, как для (19), оказывается в области бесконечно близкого равенства $n \cong N$. Этим оба ряда, полученные на основе бесконечной дроби, отличаются от ряда на основе бесконечных корней (12), который имеет предел значений общего члена

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\sqrt{4n}}{2} = \sqrt{n} \qquad (27)$$

остающихся в зависимости от квадратного корня $n$. Но более строгая генерация натуральных чисел присуща только последовательности, образованной от представления числа φ в виде бесконечных корней.

**Выводы**

Уникальность пропорции золотого сечения (числа φ) и фундаментальность бесконечного натурального ряда чисел $N$ оказываются соединенными при представлении числа φ в обобщенном виде через бесконечные корни и бесконечную дробь.

В первом случае натуральный ряд воспроизводится абсолютно по условию

$$a_N = \frac{1 + \sqrt{1 + 4N(N-1)}}{2}$$

в пределах общей последовательности

$$a_n = \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2},$$

в которой содержится число φ в виде $a_1$.

Во втором случае (через бесконечную дробь) общая последовательность выражается как

$$a_n = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$$

с пределом, лишь приближенно при далекой экстраполяции совпадающим с натуральным рядом чисел

$$\lim_{n \to \infty} a_n = n \cong N.$$

Здесь пропорция золотого сечения получается дважды: при $a_1 = 1{,}618\ldots$ и при $a_{-1} = 0{,}618\ldots$

Более обобщенный вариант непрерывной дроби с общим членом

$$a_n = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4n}}{2}$$

сохраняет генерацию числа φ при $n = 1$ и стремление к натуральному ряду чисел при экстраполяции в бесконечность

$$\lim_{n \to \infty} a_n = n \cong N.$$

Эта особенность отсутствует в последовательности, образованной при обобщении выражения φ в виде непрерывных корней, поскольку

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \sqrt{n},$$

но компенсируется полным воспроизведением натурального ряда чисел.

**ЛИТЕРАТУРА**

[1] Ливио М. φ – Число Бога. Золотое сечение - формула мироздания. – М.: АСТ, 2015. – 268 с.

[2] Сороко Э.М. Структурная гармония систем. – Минск: Наука и техніка, 1984. – 264 с.

[3] Сороко Э.М. Управление развитием социально-экономических структур. – Минск: Наука и техника, 1985. – 144 с.

[4] Малышев В.П. Вероятностно-детерминированное отображение. – Алматы: Ғылым, 1994. – 376 с.

[5] Малышев В.П., Седов Е.А. Общие информационные свойства самоорганизующихся иерархических систем // Вестник АН Каз ССР. – 1984. - №7. – с. 62-71.

[6] Малышев В. П., Турдукожаева (Макашева) А.М., Кажикенова С.Ш. Обоснование информационной оценки качества технологических переделов и продуктов // Доклады НАН РК. – 2008. – № 6. – С. 62-65.

[7] Malyshev V.P., Kazhikenova S.Sh., Turdukozhaeva A.M. A Qualitative and Quantitative Evaluation of the Technological processes in the metallurgy of non-ferrous metals // Russian Journal of Non-Ferrous Metals. – 2009. – Vol. 50. – № 4. – P. 335-337.

[8] Kazhikenova S.Sh. A new interpretation of information analysis of quality of technological process and products // Nauka I Studia (Poland). – 2009. – Vol. 18. – № 6. – P. 6-13.

[9] Дойч Д. Начало бесконечности: Объяснения, которые меняют мир. Пер. с англ. – М.: Альпина нон-фикшн, 2014. – 581 с.

[10]Малышев В.П. Основы термодинамики вещества при бесконечно высокой температуре. – Алма-Ата: Наука, 1986. – 64 с.
[11]Malyshev V. P., Turdukozhaeva A. New physical and chemical constant and prospect of its use for the explicit expression of thermodynamics functions // Journal of Chemistry and chemical Engineering. 2013. – V.7. - №5. – P. 468-482.
[12]Малышев В.П., Зубрина Ю.С., Макашева А.М. Роль энтропии Больцмана-Шеннона в понимании процессов самоорганизации // Доклады НАН РК. – 2016. - №… - с. …
[13]Бак Пер. Как работает природа: теория самоорганизованной критичности. Пер. с англ. Изд. стереотип. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2015. – 276 с.

## REFERENCES

[1] Livio M. φ – the Number of God. Golden Section - the formula of the universe. M.: AST, 2015. 268 p. (in Russ.).
[2] Soroko Je. M. Structural harmony of systems. Minsk: Nauka i tehnika, 1984. 264 p. (in Russ.).
[3] Soroko Je. M. Management of development of socio-economic structures. Minsk: Nauka i tehnika, 1985. 144 p. (in Russ.).
[4] Malyshev V.P. Probabilistic and deterministic mapping. Almaty: Fylym, 1994, 376 p. (in Russ.).
[5] Malyshev V.P., Sedov E.A. *Vestnik AN Kaz SSR*, **1984**, 7, 62-71 (in Russ.).
[6] Malyshev V. P., Turdukozhaeva (Makasheva) A.M., Kazhikenova S.Sh. *Doklady NAN RK*, **2008**, 6, 62-65 (in Russ.).
[7] Malyshev V.P., Kazhikenova S.Sh., Turdukozhaeva A.M. *Russian Journal of Non-Ferrous Metals*, **2009**, 50, 4, 335-337 (in Eng.).
[8] Kazhikenova S.Sh. *Nauka I Studia (Poland)*, **2009**, 18, 6, 6-13 (in Eng.).
[9] Dojch D. Start of Infinity: Explanations that are changing the world. Trans. from English. M.: Al'pina non-fikshn, 2014. 581 p. (in Russ.).
[10] Malyshev V.P. Fundamentals of thermodynamics of matter at an infinitely high temperature. Alma-Ata: Nauka, 1986. 64 p. (in Russ.).
[11] Malyshev V. P., Turdukozhaeva A. Journal *of Chemistry and chemical Engineering*, **2013**, 7, 5, 468-482 (in Eng.).
[12] Malyshev V.P., Zubrina Ju.S., Makasheva A.M. *Doklady NAN RK*, 2016, …, … (in Russ.).
[13] Bak Per. How does the nature: the theory of self-organized criticality. Trans. from English. Ed. Stereotype. M.: Knizhnyj dom «LIBROKOM», 2015. 276 p. (in Russ.).

**В.П. Малышев, Ю.С. Зубрина, А.М. Макашева**

Ж.Әбішев атындағы Химия-металлургия институты, Қарағанды қ., Қазақстан Республикасы

## φ САНЫ ЖӘНЕ САНДАРДЫҢ ДАҒДЫЛЫ ҚАТАРЫ

**Аннотация.** Егер φ санын шексіз бөлшек және шексіз түбір арқылы жалпыланған түрде елестетсек, онда кесіндінің тепе-тең етіп екіге бөліну пропорциясы және шексіз сандардың дағдылы қатарының түбегей-лігі сияқты түсініктер өзара байланысты болады.

Жүйені жетілдіруіне қарай деңгейден деңгейге шексіз бірізді ауысуына бағытталған, реттелмеген (энтропийнді) құрамдас бөлікте φ санымен өрнектелетін және тұрақты құрылымдық (ақпараттық) ара қатынас ретінде қиын жүйелердің өзін өзі ұйымдастыру процесстерінің негізінде осы түсініктер болады.

Мақалада φ саны сандық реттілікке шығумен сандардың дағдылы қатары ретіндеде, φ саны ретінде де шексіз бөлшек және шексіз түбір түрінде жалпылай көрсетілген.

**Түйін сөздер:** сандар, дағдылы қатар, кесіндінің тепе-тең етіп екіге бөлінуі, ара қатынас, құрылымдық ара қатынас, реттелмеген құрамдас бөлік.