REPORTS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
ISSN 2224-5227
Volume 2, Number 312 (2017), 110 – 116

UDC 629.195+531.1

M.D. Shinibaev[1], S.S. Dairbekov[2], S.A. Zholdasov[2], G.E. Myrzakasova[2], D.R. Aliaskarov[2], A.G. Sadybek[2]

[1]National Center of Space Researches and Technologies, Almaty, Kazakhstan;
[2]University of Syr-Daria, Zhetysai, Kazakhstan
e-mail: shinibaev_maxsut@mail.ru

DELAUNAY OSCULATING ELEMENTS IN THESECOND HILL TASK

Annotation. Canonical differential equations are used to describe the perturbed motions of the heavenly bodies. Delaunay introduced new osculating elements instead Jacobi similar elements. The reason for this was the fact that the Jacobi canonical equation on the right sides was proportional to the time members.

This prevented both the theoretical and numerical studies of perturbed motions of cosmic objects [2, p. 63]. The Delaunay elements overcome this barrier. If the body does in perturbed motion of elliptic type, then the integration of differential equations can be used in Hamilton-Jacobi method. But sometimes, due to the perturbation, only some of the variables are uniformlyseparated and a pair of unshared variables isunder the integral sign.

In this article, we found a way to solve this problem. This method has the novelty and relevance in space flight theory.

Keywords: Earth satellite, test body, Delaunay elements,the second Hill task, disturbed motion, Laplace limit.

УДК 629.195+531.1

М.Д. Шинибаев[1], С.С. Даирбеков[2], С.А. Жолдасов[2], Г.Е. Мырзакасова[2], Д.Р. Алиаскаров[2], А.Ж. Садыбек[2]

[1]Национальный центр космических исследований и технологий, г. Алматы, Казахстан;
[2]Университет Сыр-Дария, г. Джетысай, Казахстан

ОСКУЛИРУЮЩИЕ ЭЛЕМЕНТЫ ДЕЛОНЕ ВО ВТОРОЙ ЗАДАЧЕ ХИЛЛА

Аннотация. Канонические дифференциальные уравнения используются для описания возмущенных движений небесных тел. Делоне ввел новые оскулирующие элементы вместо аналогичных элементов Якоби. Поводом для этого послужило то, что канонические дифференциальные уравнения Якоби.

В правых частях имеем члены пропорциональные времени. Это мешало как в теоретических, так и в численных исследованиях возмущенных движений космических аппаратов [2, с. 63]. В элементах Делоне преодолен этот барьер. Если пробное тело совершает возмущенное движение эллиптического типа, то для интегрирования канонических дифференциальных уравнений движения можно использовать метод Гамильтона-Якоби. В идеальном случае переменные разделяются. Но иногда в силу сложной структуры возмущений только часть переменных разделяются однородно и под знаком интеграла оказывается пара неразделенных переменных.

В данной статье найден способ разрешения этой проблемы. Этот способ обладает новизной и актуальностью в теории космического полета.

Ключевые слова: спутник Земли, пробное тело, элементы Делоне, вторая задача Хилла, возмущенное движение, предел Лапласа.

1. Введение

Пусть пробное тело М совершает возмущенное движение в поле тяготения центрального и внешнего тела (рис. 1).

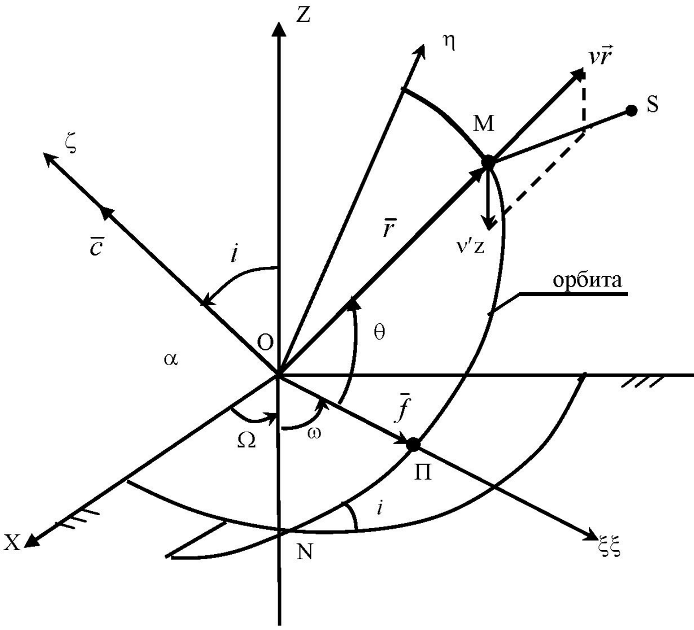

Рисунок 1 - Элементы возмущенной орбиты пробного тела

Силовая функция второй задачи Хилла имеет вид [1, с. 58]

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}\nu r^2 + \frac{1}{2}(\nu' - \nu)z^2, \ \nu' = -2\nu, \tag{1}$$

где ν и ν′ подбираются так, чтобы движения узла Nи перицентра П совпадали с наблюдаемыми движениями; $\mu = f(m + m_0)$ – произведение постоянной тяготения f на сумму масс центрального телаO и пробного тела М. Пусть $m_0 << m$, $m < m_1$, здесь m_0 – масса пробного тела, m – масса центрального тела, m_1 – масса внешнего тела S .

На рис. 1: Ω – долгота восходящего узла; N, ω – угловое расстояние от узла N до перицентра П; θ – истинная аномалия; $\bar{r}$ – радиус-вектор пробного тела; z – аппликата; i– наклон орбиты к плоскости экватора OXY ; $OXYZ$ – неподвижная (планетоцентрическая) система координат: $O\xi\eta\zeta$ – орбитальная система координат, в которой ось $O\xi$ направлена по вектору Лапласа $\bar{f}$ к перицентру П, ось $O\xi$ направлена по вектору $\bar{c}$ перпендикулярно к плоскости орбиты, ось $O\eta$ расположена в плоскости орбиты и дополняет $O\xi\zeta$ до правой система координат; $\bar{c}$ – постоянная интеграла площадей.

2. Оскулирующие элементыДелоне

Канонические элементы Якоби оказались неудобными как для аналитической теории, так и для численного интегрирования, так как правые части канонических дифференциальных уравнений содержали члены, пропорциональные времени [2, с. 63]. Для устранения этого неудобства Делоне ввел другую систему канонических оскулирующих элементов:

$$\left.\begin{array}{l} L=\sqrt{\mu a},\quad G=\sqrt{\mu p},\quad H=\sqrt{\mu p}\cos i, \\ \ell=n(t-\tau),\quad g=\pi-\Omega,\quad h=\Omega, \end{array}\right\} \tag{2}$$

где $L,G,H-$ медленные переменные; ℓ,g,h – быстрые элементы; a – большая полуось эллиптической орбиты, $p=a(1-e^2)-$ параметр орбиты; π – долгота перицентра; n – среднее движение; τ – время прохождения через перицентр.

Соответствующие канонические уравнения имеют вид:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dL}{dt}=\dfrac{\partial F}{\partial \ell},\quad \dfrac{dG}{dt}=\dfrac{\partial F}{\partial g},\quad \dfrac{dH}{dt}=\dfrac{\partial F}{\partial h}, \\ \dfrac{d\ell}{dt}=-\dfrac{\partial F}{\partial L},\quad \dfrac{dg}{dt}=-\dfrac{\partial F}{\partial G},\quad \dfrac{dh}{dt}=-\dfrac{\partial F}{\partial H}, \end{array}\right\} \tag{3}$$

где гамильтонианопределен по формуле:

$$F=\frac{\mu^2}{2L^2}+R, \tag{4}$$

здесь R – возмущающая функция.

Из (2) находим кеплеровы элементычерез элементы Делоне:

$$\left.\begin{array}{l} a=\dfrac{L^2}{\mu},\quad e=\sqrt{1-(G/L)^2},\ \cos i=\dfrac{H}{G},\quad \Omega=h,\quad \pi=g+h, \\ \tau=t-\dfrac{\ell}{n},\quad p=\dfrac{G^2}{\mu},\quad \omega=g,\quad \varepsilon=\pi+\ell_0. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Используя (5), найдем

$$r=\frac{G^2/\mu}{1+\sqrt{1-(G/L)^2}\cos\theta}, \tag{6}$$

$$z=r\sqrt{1-(H/G)^2}\sin(\theta+g). \tag{7}$$

3. Интегрирование методом Гамильтона-Якоби канонических уравнений (3) во второй задаче Хилла

Возмущающая функция в соответствии с (1) имеет вид:

$$R=\frac{1}{2}\nu r^2-\frac{3}{2}\nu z^2. \tag{8}$$

Подставим (6) и (7) в (8)

$$R=\frac{1}{2}\nu\left[\frac{G^2/\mu}{1+\sqrt{1-(G/L)^2}\cos\theta}\right]^2\cdot\left[1-3\sin^2(\theta+g)\left(1-\frac{H^2}{G^2}\right)\right],$$

следовательно, из (4) имеем:

$$F=\frac{\mu^2}{2L^2}+\frac{1}{2}\nu\left[\frac{G^2/\mu}{1+\sqrt{1-(G/L)^2}\cos\theta}\right]^2\cdot\left[1-3\sin^2(\theta+g)\left(1-\frac{H^2}{G^2}\right)\right]. \tag{9}$$

Здесь

$$F = F\left(t, L, G, H, \frac{\partial V}{\partial L}, \frac{\partial V}{\partial G}, \frac{\partial V}{\partial H}\right),\ \ell = \frac{\partial V}{\partial L},\ g = \frac{\partial V}{\partial G},\ h = \frac{\partial V}{\partial H}.$$

Из (9) видно, что

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0,\ F = \alpha_1 - \mathrm{const}. \tag{10}$$

Запишем уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial V}{\partial t} + F\left(t, L, G, H, \frac{\partial V}{\partial L}, \frac{\partial V}{\partial G}, \frac{\partial V}{\partial H}\right) = 0. \tag{11}$$

Пусть полный интеграл (11) имеет вид

$$V = -\alpha_1 t + W(L, G, H, \alpha_2, \alpha_3), \tag{12}$$

тогда решение (11) примет вид

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial W}{\partial \alpha_1} = t + \beta_1,\ \dfrac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2,\ \dfrac{\partial W}{\partial \alpha_3} = \beta_3, \\ \dfrac{\partial W}{\partial L} = \ell,\ \dfrac{\partial W}{\partial G} = g,\ \dfrac{\partial W}{\partial H} = h, \end{array}\right\} \tag{13}$$

где β_1, β_2, β_3 – постоянные.

Пусть

$$W = W_1(L) + W_2(G) + W_3(H), \tag{14}$$

тогда (10) имеет вид

$$\left(\frac{dW_1}{dL}\right)^2 + \left(\frac{dW_2}{dG}\right)^2 + \left(\frac{dW_3}{dH}\right)^2 - \frac{\mu^2}{L^2} + \frac{\nu}{2}\left(\frac{G^2/\mu}{1+\sqrt{1-(G/L)^2}\cos\theta}\right)^2 [1 - 3\cos 2(\theta + g)] -$$

$$-\frac{3\nu}{2}\left(\frac{G^2/\mu}{1+\sqrt{1-(G/L)^2}\cos\theta}\right)^2 [1 - \cos 2(\theta + g)]\frac{H^2}{G^2} = 2h_*. \tag{15}$$

Следуя Делоне, введем

$$\alpha_2 = G,\ \alpha_3 = H,\ \beta_2 = g,\ \beta_3 = h. \tag{16}$$

Это избавит нас от интегрирования по времени. Сгруппируем члены в (15) следующим образом:

$$\left[\left(\frac{dW_1}{dL}\right)^2 - \frac{\mu^2}{L^2} + 2h_*\right] + \left[\left(\frac{dW_2}{dG}\right)^2 + \frac{\nu}{2}\left(\frac{G^2/\mu}{1+\sqrt{1-(G/L)^2}\cos\theta}\right)^2 [1 - 3\cos 2(\theta + g)]\right] +$$

$$+\left[\left(\frac{dW_3}{dH}\right)^2 - \frac{3\nu}{2}\left(\frac{G^2/\mu}{1+\sqrt{1-(G/L)^2}\cos\theta}\right)^2 [1 - \cos 2(\theta + g)]\frac{H^2}{G^2}\right] = 0;$$

$\left(\dfrac{dW_1}{dL}\right)^2 - \dfrac{\mu^2}{L^2} + 2h_* = \alpha_1$, в случае эллиптического движения $h_* < 0$;

$$\left(\frac{dW_2}{dG}\right)^2+\frac{v}{2}\left(\frac{G^2/\mu}{1+\sqrt{1-(G/L)^2}\cos\theta}\right)^2[1-3\cos 2(\theta+g)]=\alpha_2;$$

$$\left(\frac{dW_3}{dH}\right)^2-\frac{3v}{2}\left(\frac{G^2/\mu}{1+\sqrt{1-(G/L)^2}\cos\theta}\right)^2[1-\cos 2(\theta+g)]\frac{H^2}{G^2}=\alpha_3,$$

где $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$, отсюда найдем W_1,W_2,W_3.

$$W_1=\int\sqrt{\frac{\mu^2}{L^2}-2h_*-\alpha_1}dL=\int\frac{LdL}{\sqrt{\mu^2-L^2\Lambda}}=-\frac{1}{\Lambda}\sqrt{\mu^2-L^2\Lambda},\ \Lambda=2h_*+\alpha_1; \tag{17}$$

$$W_2=\int\sqrt{\alpha_2-\frac{v}{2}\left(\frac{\alpha_2^2/\mu}{1+\sqrt{1-(\alpha_2/L)^2}\cos\theta}\right)^2[1-3\cos 2(\theta+\beta_2)]}d\alpha_2; \tag{18}$$

$$W_3=\int\sqrt{\alpha_3+\frac{3v}{2\alpha_2^2}\left(\frac{\alpha_2^2/\mu}{1+\sqrt{1-(\alpha_2/L)^2}\cos\theta}\right)^2[1-\cos 2(\theta+\beta_2)]\alpha_3^2}\ d\alpha_3; \tag{19}$$

$$W=-\frac{1}{\Lambda}\sqrt{\mu^2-L^2\Lambda}+\int\sqrt{\alpha_2-\frac{v}{2}\left(\frac{\alpha_2^2/\mu}{1+\sqrt{1-(\alpha_2/L)^2}\cos\theta}\right)^2[1-3\cos 2(\theta+\beta_2)]}d\alpha_2+$$
$$+\int\sqrt{\alpha_3+\frac{3v}{2\alpha_2^2}\left(\frac{\alpha_2^2/\mu}{1+\sqrt{1-(\alpha_2/L)^2}\cos\theta}\right)^2[1-\cos 2(\theta+\beta_2)]\alpha_3^2}\ d\alpha_3. \tag{20}$$

Первое уравнение из (13) дает

$$\sqrt{\mu^2-\Lambda L^2}=\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\cdot\frac{1}{(t+\beta_1)}. \tag{21}$$

Выполнив (13), найдем ℓ,g,h:

$$\ell=-\frac{1}{\Lambda}\sqrt{\mu^2-L^2\Lambda}+\frac{v}{e}\cdot\frac{1}{9\mu L^3}\left[1+2e^2+\left(-e+\frac{3}{2}e^2\right)\cos\theta+\left(-e+\frac{1}{2}e^2\cos 2\theta\right)+\frac{1}{2}e^2\cos 3\theta+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}e^2\cos 4\theta\right]\alpha_3^2\sqrt{\alpha_2}-\frac{v}{e}\cdot\frac{3}{5\mu}\alpha_2^2[1-\cos 2(\theta+\beta_2)]\cos\theta\cdot\left(1+\frac{15}{16}e^2+\frac{15}{16}e^2\cos 2\theta-2e\cos\theta\right)\times$$
$$\times\alpha_3^2\sqrt{\alpha_3}; \tag{22}$$

$$g=\frac{\sqrt{\alpha_2}}{eL^2\mu^2}\left\{1-3e\cos\theta-v[1-3\cos 2(\theta+\beta_2)]\alpha_2^3\left[\frac{1}{28\mu^2}-2(1-3e\cos\theta)\cdot\left(\frac{\alpha_2^2}{11}\cos\theta+\frac{L^2}{7}e+\right.\right.\right.$$

$$+\frac{L^2}{7}e\cos\theta\Bigg)\Bigg]\Bigg\}+\frac{v}{e}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{\alpha_2}{L^2\mu^2}[1-\cos 2(\theta+\beta_2)]\cdot\Bigg\{\Bigg[\left(-\frac{1}{\mu^2}\right)+L^2e+\left(\frac{3}{2\mu^2}\right)e^2\Bigg]+$$

$$+\left[(2\alpha_2^2)+\left(\frac{2}{\mu^2}\right)e+\left(L^2-\frac{13}{2}\alpha_2^2\right)e^2\right]\cos\theta+\left(\frac{5}{2\mu^2}\right)e^2\cos 2\theta+\left(-\frac{13}{2}\alpha_3^2\right)e^2\cos 3\theta\Bigg\}\times$$

$$\times\alpha_3^2\sqrt{\alpha_3}\,; \tag{23}$$

$$h=\left[1-e+\frac{15}{16}e^2+\frac{15}{16}e^2\cos 2\theta+(e-3e^2)\cos\theta\right]\sqrt{\alpha_3}-\frac{v}{2\mu^2}\alpha_2^2[1-\cos 2(\theta+\beta_2)]\times$$

$$\times e\cos\theta\alpha_3\sqrt{\alpha_3}\,, \tag{24}$$

здесь

$$\sqrt{\mu^2-\Lambda L^2}=\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\cdot\frac{1}{(t+\beta_1)},\ \Lambda=2h_*+\alpha_1\,.$$

Установим зависимость между tи θ, используя [3, с. 589]

$$\ell=n(t+\beta_1)=(1+3e^2)\theta-2e\sin\theta+\frac{3}{4}e^2\sin 2\theta+O(e^3)\,, \tag{25}$$

где $n(t+\beta_1)=n(t-\tau)$, n – среднее движение, τ – время прохождения через перицентр.

Обратив ряд (25) по методу Лагранжа [3, с. 531], найдем

$$\theta=(1+3e^2)n(t+\beta_1)+2e\sin n(t+\beta_1)-3e^2\sin 2n(t+\beta_1)\,. \tag{26}$$

Из структуры выражений (22)-(24) следует, что ℓ – быстрая переменная, gи h– медленные переменные, так как ℓ явно зависит от времени, а gи h зависят неявно.

3. Заключение

В силу того, что $\cos i=\frac{H}{G}$ и к тому же H и G – медленные переменные можно утверждать:

1. Под действием внешнего тела S кеплеровские элементы, характеризующие размер орбиты, меняются весьма медленно.

2. Под действием внешнего тела S происходят быстрое движение:

– пробного тела от перицентра по медленно меняющейся орбите вокруг оси ζ по закону (26);

– пробное тело движется медленно вместе с орбитой вокруг оси Z по закону (24).

3. Составляющая возмущающего ускорения $v'z$ весьма медленно уменьшает наклон орбиты. Другая составляющая возмущающего ускорения $v\bar{r}$ медленно увеличивает большую полуось орбиты.

4. Наличие в формулах (22)-(24) перед фигурной скобкой множителя $\frac{v}{e}$ обеспечивает сходимость рядов на заданном временном интервале при $e\geq e_{\ddot{e}}$.

Полученные результаты справедливы для возмущений как гравитационной, так и негравитационной природы, что делает разработанную теорию актуальной и универсальной.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Шинибаев М.Д. Поступательные движения пассивно гравитирующего тела в центральном и нецентральном поле тяготения.- Алматы: РИО ВАК РК, 2001.- 128 с.

[2] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Методы теории движения искусственных небесных тел.- М.: Наука, 1983.- 352 с.
[3] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы.-М.: Наука, 1968.- 799 с.

REFERENCES

[1] ShinibaevM.D. Postupatelnyedvigenijpassivnogravitiruyoushegotelavcentralnominecentralnompoletaygotenia.- Almaty: RIO VAK RK, 2001.– 128s. (in Russ).
[2] Dubochin G.N. Nebesnayamehanika. Metodi teoriidvigeniaiskusstvennihnebesnih tel.- M.: Nauka, 1983.- 352 s. (in Russ).
[3] Dubochin G.N. Nebesnayamehanika. Osnovnyezadachi I metody.- M.: Nauka, 1968.- 799 s. (in Russ).

ӘОЖ: 629.195+531.1

М.Д. Шыныбаев[1], С.С.Даирбеков[2], С.А.Жолдасов[2],
Г.Е. Мырзақасова[2], Д.Р. Алиасқаров[2], А.Ж. Сәдібек[2]

[1]Ұлттық ғарыштық зерттеулер мен технологиялар орталығы, Алматы қ., Қазақстан;
[2]Сыр-Дария университеті, Жетысай қ., Қазақстан

ХИЛЛДЫҢ ЕКІНШІ ЕСЕБІНДЕГІ ДЕЛОНЕНІҢ ОСКУЛЯЦИЯЛЫҚ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

Аннотация. Канондық дифференциалдық теңдеулер сынақ денесінің ұйытқұлы қозғалыстарын сипаттайды. Делоне канондық оскуляциялық элементтерін енгізуге себеп болған Якоби элементтерінің жарамсыздығы [2, б. 53].

Якоби элементтерін қолданғанда дифференциалдық теңдеулердің оң жағында пайда болатын уақытқа пропорционал мүшелер зерттеулерге кедергі келтіреді. Делоне элементтерінде қорытылған ұйытқулы қозғалыстың дифференциалдық теңдеулерінде ол кемшілік жойылады. Бұл канондық дифференциалдық теңдеулер Гамильтон-Якоби әдісімен интегралданады. Егер сынақ денесі эллипс типтес қозғалыста болса, онда айнымалыларды ажырату әдісін қолдануға болады. Бірақ ұйытқушы күштердің құрамына байланысты, айнымалылар толық біртекті түрде ажыратылмай қалуы мүмкін. Мақалада осы жағдайдан құтылу әдісі берілген.

Түйін сөздер: Жер серігі, сынақ денесі, Делоне элементтері, Хиллдың екінші есебі, ұйытқулы қозғалыс, Лаплас шегі.