

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 64 – 80

K.B. Jakupov

Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: jakupovKB@mail.ru

**GENEALOGY OF THE STOKES AND NAVIER EQUATIONS.
DEGREE RHEOLOGICAL LAWS AND EQUATIONS**

Abstract. A physical substantiation of Newton's law of friction and Navier's equations is given. The falsity of the Stokes conjecture and the Stokes equations is shown. The asymmetry of the stress tensor of a continuous medium in the general case is established. To simulate the flow of viscous fluids, the use of power friction laws with odd exponents is physically justified; accordingly, asymmetric strain tensors and equations of dynamics are derived. The models thus obtained do not contain semi-empirical constants. It is shown that the law of Newton's friction and the Navier equation of viscous fluid dynamics follow as a special case with exponent equal to unity. Numerical calculations of flow past a plate, flow in a tube of circular cross section are given. Comparisons with known experimental results of flows in the tube showed a satisfactory agreement of the solutions obtained from equations with power-law friction laws and the divergence of the solutions of the Navier equations. Difference schemes are used to solve equations in velocity-pressure variables. The adequacy of numerical experiments is provided by approximation of convective terms on five-point patterns, which excludes the influence on the result of "circuit viscosity".

Keywords: equations, tensor, friction, degree.

УДК 519.6, 532.516

К.Б. Джакупов

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

**ГЕНЕАЛОГИИ УРАВНЕНИЙ СТОКСА и НАВЬЕ.
СТЕПЕННЫЕ РЕОЛОГИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ И УРАВНЕНИЯ**

Аннотация. Дано физическое обоснование закона трения Ньютона и уравнений Навье. Показана фальшивость гипотезы Стокса и уравнений Стокса. Установлена несимметричность тензора напряжений сплошной среды в общем случае. Для моделирования течений вязких жидкостей физически обосновано использование степенных законов трения с нечетными показателями степеней, соответственно выведены несимметричные тензоры напряжений и уравнения динамики. Полученные таким образом модели не содержат полумпирических констант. Показано, что закон трения Ньютона и уравнения Навье динамики вязкой жидкости вытекают как частный случай при показателе степени, равном единице. Приведены численные расчеты обтекания пластины, течения в трубе круглого сечения. Сопоставления с известными экспериментальными результатами течений в трубе показали удовлетворительное совпадение решений, полученных из уравнений с степенными законами трения, и расхождение решений уравнений Навье. Применены разностные схемы для решения уравнений в переменных скорость-давление. Адекватность численных экспериментов обеспечена аппроксимацией конвективных членов на пятиточечных шаблонах, что исключает влияние на результат «схемной вязкости».

Ключевые слова: уравнения, тензор, трение, степень.

Введение

Уравнения динамики вязкой жидкости впервые построены в 1821г. французским ученым *Рене Навье*

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}, i = 1, 2, 3, \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = \operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} T + \mu \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 - p \operatorname{div} \mathbf{v}$$

Примечательно, что уравнения Навье полностью соответствуют закону трения Ньютона

$P_{ji(n)} = \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$. Уравнения динамики вязкой жидкости также выводили французские ученые

Пуассон в 1831г., Сен-Венан в 1843г.

В 1845г. английский физик Стокс заменил закон трения Ньютона на сумму

$P_{ji(c)} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ и с тех пор используются уравнения Стокса [1]:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{2}{3} \mu - \mu' \right) \operatorname{div} \mathbf{v} \right], i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \rho c_v \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot \lambda \nabla T + \frac{\mu}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 - p \operatorname{div} \mathbf{v} - \left(\frac{2}{3} \mu - \mu' \right) (\operatorname{div} \mathbf{v})^2$$

Ставится вопрос: какая из данных систем является адекватной моделью динамики вязкой жидкости? Уравнения Стокса принимают вид уравнений Навье только для несжимаемых жидкостей $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ при постоянном коэффициенте вязкости $\mu = \text{const}$, но при этом закон трения Стокса не переходит в закон трения Ньютона. Даже при идентичности по написанию

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} \right] + \nabla p = \rho \mathbf{F} + \mu \Delta \mathbf{v}, i = 1, 2, 3, \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

тензоры вязких напряжений Ньютона и Стокса в них будут различными. И обратное: уравнения Навье не переходят в уравнения Стокса, как и закон трения Ньютона не переходит в формулу трения Стокса.

Различие в законах трения привело к различным уравнениям баланса энергий. Следовательно, уравнения Навье и уравнения Стокса различны по своей реологической сути. Тем ни менее, в механике вязкой жидкости принято объединенное название – уравнения Навье-Стокса, что в корне является несправедливым по отношению к Навье.

1. Генеалогия уравнений Навье.

Несимметричность тензора напряжений Ньютона

В [1-7] и др. закон трения Ньютона выводится, как правило, для сдвиговых течений.

Например, в [7] (гл. IX) модуль силы трения

$$F_{mp} = \eta \left| \frac{du}{dy} \right| S = \pm \mu \frac{du}{dy} S \quad (1.1)$$

в вязкой жидкости доказывается для линейной зависимости скорости от координаты $u = \alpha y$ (аналогично в [1-6]). Но в этом случае согласно (1.1) касательное напряжение по закону трения Ньютона равно

$$p_{yx} = \frac{F_{mp}}{S} = \mu \left| \frac{du}{dy} \right| = \pm \mu \frac{du}{dy} \quad (1.2)$$

Очевидно, из-за *линейной* зависимости скорости от пространственных координат получается, что 2-я производная равна 0:

$$\frac{\partial p_{yx}}{\partial y} = \pm \mu \frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \quad (1.3)$$

Полагая нормальные напряжения равными $p_{xx} = -p + \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \dots$, получаем уравнения динамики *вязкой жидкости* в *парадоксальной* форме:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + \nabla p = \rho F_i + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2}, i = 1, 2, 3, \quad (1.4)$$

если руководствоваться выводами закона трения Ньютона, данными в [1-7]. (В (1.4) не производится суммирование по повторяющемуся индексу). Уравнения динамики (1.4) **отличаются от уравнений** Навье отсутствием 6 вязких членов, конкретно производных от касательных напряжений. В (1.4) присутствуют только производные от вязких нормальных напряжений.

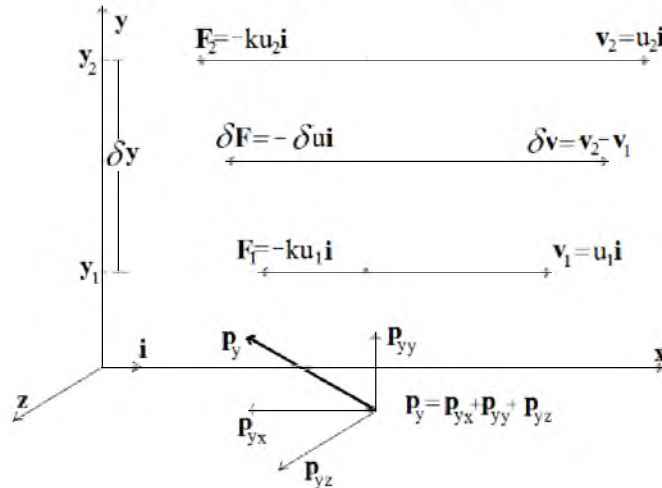
Преодолению такого рода парадоксов служит закон трения для малых скоростей [7] $F_{mp} = -kv$, по которому строго, без предположения о линейной зависимости, физически обоснован закон трения Ньютона.

Теорема 1. Касательное напряжение по Ньютону $p_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ есть следствие линейного

закона трения для малых скоростей $F_{mp} = -kv$.

Доказательство. В самом деле, по закону трения на движущуюся со скоростью v_i частицу m_i действует сила $F_{mpi} = -kv_i$, поэтому в индивидуальном объеме $\delta\tau$ среднemasсовая сила трения равна

$$F_{mp} = \sum_i F_{mpi} m_i / \sum_i m_i = - \sum_i kv_i m_i / \sum_i m_i = -kv, \quad F_{mp} = -kv$$



Пусть течение вязкой жидкости происходит со скоростью $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ так, что $u > 0$. Сила трения $\mathbf{F}_{mp} = -k\mathbf{v}$ в проекциях на оси координат есть сумма $\mathbf{F}_{mp} = \mathbf{F}_{(x)} + \mathbf{F}_{(y)} + \mathbf{F}_{(z)}$. На плоскости y_1 сила трения $\mathbf{F}_{(x)}$ равна $\mathbf{F}_1 = -ku_1\mathbf{i}$ и $\mathbf{F}_2 = -ku_2\mathbf{i}$ на плоскости $y_2 = y_1 + \delta y$, $\delta y > 0$. Образуются приращения сил и скоростей: $\delta\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1$, $\delta u = u_2 - u_1 > 0$, $\delta\mathbf{F} = -k\delta u\mathbf{i}$, $\delta\mathbf{F} \uparrow\downarrow \mathbf{i}$.

Вводится линейная плотность $\mathbf{f} = \frac{\delta\mathbf{F}}{\delta y}$, $\delta\mathbf{F} = \delta y\mathbf{f}$. По определению средний вектор касательного напряжения $\mathbf{p}_{yxcp} = \frac{\delta\mathbf{F}}{\delta x\delta z}$ параллелен и одинаково-во направлен с силами трения

$$\mathbf{p}_{yxcp} \uparrow\uparrow \delta\mathbf{F}, \mathbf{p}_{yxcp} \uparrow\uparrow \mathbf{f}.$$

Коэффициент пропорциональности приводит к равенствам $\mathbf{f} = k'\mathbf{p}_{yxcp}$, $k' > 0$, $\mathbf{p}_{yxcp} \uparrow\downarrow \mathbf{i}$, $k'\mathbf{p}_{yxcp}\delta y = -k\delta u\mathbf{i}$.

Скалярное произведение на орт \mathbf{i} : $k'\mathbf{p}_{yxcp}\delta y \cdot \mathbf{i} = -k\delta u\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$.

В результате получаются

$$k'\mathbf{p}_{yxcp} \cdot \mathbf{i}\delta y = k'|\mathbf{p}_{yxcp}||\mathbf{i}|\delta y \cos 180^\circ = k'p_{yxcp} \cdot 1 \cdot \delta y \cdot (-1) = -k'p_{yxcp}\delta y,$$

$$-k\delta u\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = -k\delta u|\mathbf{i}||\mathbf{i}| \cdot \cos 0^\circ = -k\delta u \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -k\delta u$$

Таким образом, из равенств $-k'p_{yxcp}\delta y = -k\delta u$, $p_{yxcp} = \frac{k\delta u}{k'\delta y}$

в пределе вытекает закон трения Ньютона

$$p_{yx} = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{k\delta u}{k'\delta y} = \mu \frac{\partial u}{\partial y},$$

$\mu = \frac{k}{k'}$ - традиционный коэффициент динамической вязкости, ч.т.д..

Обобщения полученной формулы путем перестановок индексов и переменных дают касательные напряжения по другим осям координат

$$p_{xy} = \mu \frac{\partial v}{\partial x}, p_{zx} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}, p_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, p_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}, p_{zy} = \mu \frac{\partial v}{\partial z}$$

В **теореме 1** дано строгое физическое обоснование закона трения Ньютона без предположения о сдвиговости течения.

Вывод вязких составляющих нормальных напряжений

Аналогично устанавливается формула вязкой составляющей \mathbf{p}_{xx}^0 нормального напряжения $\mathbf{p}_{xx} = -p\mathbf{i} + \mathbf{p}_{xx}^0$. Пусть силы трения равны: $\mathbf{F}_1 = -ku_1\mathbf{i}$ на плоскости x_1 и $\mathbf{F}_2 = -ku_2\mathbf{i}$ на плоскости $x_2 = x_1 + \delta x$, $\delta\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1$, $\delta\mathbf{F} = -k\delta u\mathbf{i}$, $\delta u = u_2 - u_1 > 0$, при этом $\delta\mathbf{F} \uparrow\downarrow \mathbf{i}$. Вводится линейная плотность силы $\mathbf{f} = \frac{\delta\mathbf{F}}{\delta x}$, $\delta\mathbf{F} = \delta x\mathbf{f}$. По определению

средний вектор нормального вязкого напряжения $\mathbf{p}_{xxcp}^0 = \frac{\delta\mathbf{F}}{\delta y\delta z}$ параллелен и одинаково направлен с силами трения $\mathbf{p}_{xxcp}^0 \uparrow\uparrow \delta\mathbf{F}$, $\mathbf{p}_{xxcp}^0 \uparrow\uparrow \mathbf{f}$. Коэффициент пропорциональности образует равенства $\mathbf{f} = k''\mathbf{p}_{xxcp}^0$, $k'' > 0$, $\mathbf{p}_{xxcp}^0 \uparrow\downarrow \mathbf{i}$, $k'\mathbf{p}_{xxcp}^0\delta x = -k\delta u\mathbf{i}$.

Скалярное умножение на орт: $k'\mathbf{p}_{xxcp}^0\delta x \cdot \mathbf{i} = -k\delta u\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$.

В результате получаются

$$k'\mathbf{p}_{xxcp}^0 \cdot \mathbf{i}\delta x = k'|\mathbf{p}_{xxcp}^0| |\mathbf{i}| \delta x \cos 180^\circ = k'p_{xxcp}^0 \cdot 1 \cdot \delta x \cdot (-1) = -k'p_{xxcp}^0\delta x,$$

$$-k\delta u\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = -k\delta u|\mathbf{i}||\mathbf{i}| \cdot \cos 0^\circ = -k\delta u \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -k\delta u$$

Равенства $-k'p_{xxcp}^0\delta x = -k\delta u$, $p_{xxcp}^0 = \frac{k}{k'} \frac{\delta u}{\delta x}$, в пределе дают вязкий член

нормального напряжения

$$p_{xx}^0 = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{k}{k''} \frac{\delta u}{\delta x} = \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \mu = \frac{k}{k''}$$

Обобщения полученной формулы перестановками нижних индексов дают соответствующие

нормальные напряжения $p_{yy}^0 = \mu \frac{\partial v}{\partial y}$, $p_{zz}^0 = \mu \frac{\partial w}{\partial z}$.

Полные нормальные напряжения являются суммой давления и вязких составляющих

$$p_{xx} = -p + p_{xx}^0 = -p + \mu \frac{\partial u}{\partial x}, p_{yy} = -p + p_{yy}^0 = -p + \mu \frac{\partial v}{\partial y}, p_{zz} = -p + p_{zz}^0 = -p + \mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

Таким образом, дано физическое обоснование **несимметричного** тензора напряжений Ньютона $p_{ji} = -p\delta_{ji} + \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, 3$, которому соответствуют уравнения Навье (1).

2. Тензор напряжений сплошной среды не симметричен

В теореме 1 доказана несимметричность тензора напряжений Ньютона. Тензор напряжений используется широко, в частности, в теории упругости.

Теорема 2. Тензор напряжений сплошных сред не симметричен в общем случае.

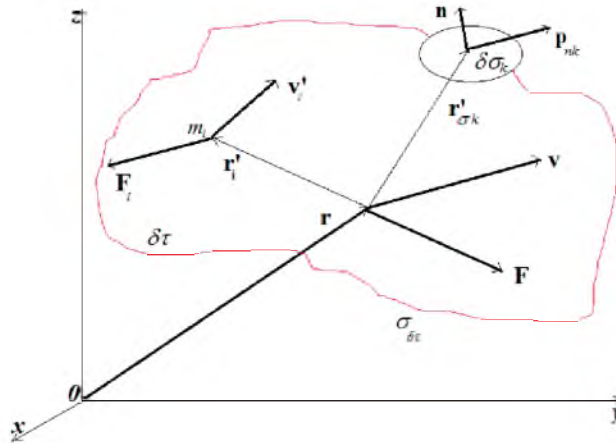
Доказательство. В частном случае не симметричность доказана, исходя из закона трения $\mathbf{F}_{mp} = -k\mathbf{v}$. В механике сплошной среды более 170 лет устоялось мнение, что тензор напряжений симметричен всегда.

Симметричность тензора напряжений, например в [1-5], выводится интегрированием по произвольному объему сплошной среды момента импульса, что дает фальшивые формулы

$$\mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{r} \times \rho \mathbf{F} - \frac{\partial \mathbf{r} \times \mathbf{p}_j}{\partial x_j} = 0, \quad p_{ji} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

Фальшивость заключается в том, что левая часть (2.1) на самом деле не равна нулю

$$\mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{r} \times \rho \mathbf{F} - \frac{\partial \mathbf{r} \times \mathbf{p}_j}{\partial x_j} \neq 0$$



Доказательство исходит из фундаментальной теоремы физики об изменении момента импульса

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i$$

Данный общий закон трансформируется в теорему об изменении моментов импульсов для индивидуального объема $\delta\tau$ сплошной среды:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{F}_i + \iint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k \mathbf{r}_{\sigma k} \times \mathbf{p}_{nk} \delta\sigma_k, \quad (2.2)$$

Между радиус-вектором \mathbf{r} в (1.10.1) и векторами \mathbf{r}_i , $\mathbf{r}_{\sigma k}$ в (2.2) имеет место естественная связь $\mathbf{r}_i = \mathbf{r} + \mathbf{r}'_i$, $\mathbf{r}_{\sigma k} = \mathbf{r} + \mathbf{r}'_{\sigma k}$, откуда вытекает связь и между скоростями

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt}, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v} + \mathbf{v}'_i$$

Подставляя их в (2.2), найдем

$$\frac{d}{dt} \sum_i (\mathbf{r} + \mathbf{r}_i') \times m_i (\mathbf{v} + \mathbf{v}_i') = \sum_i (\mathbf{r} + \mathbf{r}_i') \times m_i \mathbf{F}_i + \iint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k (\mathbf{r} + \mathbf{r}_{\sigma k}') \times \mathbf{p}_{nk} \delta\sigma_k \quad (2.3)$$

Прделаем необходимые преобразования в левой части:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_i (\mathbf{r} + \mathbf{r}_i') \times m_i (\mathbf{v} + \mathbf{v}_i') &= \frac{d}{dt} \mathbf{r} \times \sum_i m_i \mathbf{v} + \frac{d}{dt} \mathbf{r} \times \sum_i m_i \mathbf{v}_i' + \\ + \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v} + \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i' &= \frac{d}{dt} \mathbf{r} \times \delta m \mathbf{v} + \frac{d}{dt} \mathbf{r} \times \sum_i m_i \mathbf{v}_i' + \\ + \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v} + \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i', \delta m &= \sum_i m_i = \rho \delta \tau \end{aligned}$$

Имея в виду $\frac{d\delta\tau}{dt} = \delta\tau \operatorname{div} \mathbf{v}$, исполним преобразования

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{r} \times \delta m \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \delta m \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \delta m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{r} \times \frac{d\delta m}{dt} \mathbf{v} = \\ = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \rho \delta \tau \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \rho \delta \tau \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{r} \times \frac{d(\rho \delta \tau)}{dt} \mathbf{v} &= \mathbf{r} \times \rho \delta \tau \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \\ + \mathbf{r} \times \left(\rho \frac{d\delta\tau}{dt} + \delta\tau \frac{d\rho}{dt} \right) \mathbf{v} &= \mathbf{r} \times \rho \delta \tau \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \\ + \mathbf{r} \times \left(\rho \delta \tau \operatorname{div} \mathbf{v} + \delta\tau \frac{d\rho}{dt} \right) \mathbf{v} &= \mathbf{r} \times \rho \delta \tau \frac{d\mathbf{v}}{dt} \end{aligned}$$

Здесь использованы $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \rho \delta \tau \mathbf{v} = 0$, $(\rho \delta \tau \operatorname{div} \mathbf{v} + \delta\tau \frac{d\rho}{dt}) = 0$.

Окончательно найдем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_i (\mathbf{r} + \mathbf{r}_i') \times m_i (\mathbf{v} + \mathbf{v}_i') &= \mathbf{r} \times \rho \delta \tau \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \\ + \frac{d}{dt} \mathbf{r} \times \sum_i m_i \mathbf{v}_i' + \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v} + \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i' & \quad (2.4) \end{aligned}$$

Далее в правой части (2.3):

$$\begin{aligned} \sum_i (\mathbf{r} + \mathbf{r}_i') \times m_i \mathbf{F}_i &= \mathbf{r} \times \sum_i m_i \mathbf{F}_i + \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{F}_i = \\ = \mathbf{r} \times \delta m \mathbf{F} + \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{F}_i &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} \rho \delta \tau + \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{F}_i, \end{aligned}$$

$$\iint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k (\mathbf{r} + \mathbf{r}_{\sigma k}') \times \mathbf{p}_{nk} \delta\sigma_k = \iint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k \mathbf{r} \times \mathbf{p}_{nk} \delta\sigma_k + \iint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k \mathbf{r}_{\sigma k}' \times \mathbf{p}_{nk} \delta\sigma_k,$$

где по теореме *Остроградского-Гаусса* и теореме о среднем для элементарного объема $\delta\tau$ имеют место

$$\iint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k \mathbf{r} \times \mathbf{p}_{nk} \delta\sigma_k = \iint_{\sigma_{\delta\tau}} \mathbf{r} \times \sum_k \mathbf{p}_{nk} \delta\sigma_k = \iint_{\sigma_{\delta\tau}} \mathbf{r} \times \mathbf{p}_n \delta\sigma = \iiint_{\tau} \frac{\partial \mathbf{r} \times \mathbf{p}_j}{\partial x_j} \delta\tau' = \frac{\partial \mathbf{r} \times \mathbf{p}_j}{\partial x_j} \delta\tau$$

В результате совершенных преобразований (2.3) примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \rho \delta\tau \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d}{dt} \mathbf{r} \times \sum_i m_i \mathbf{v}_i' + \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v} + \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i' = \\ = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \rho \delta\tau + \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{F}_i + \frac{\partial \mathbf{r} \times \mathbf{p}_j}{\partial x_j} \delta\tau + \iint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k \mathbf{r}_{\sigma k}' \times \mathbf{p}_{nk} \delta\sigma_k \end{aligned}$$

Поделив на $\delta\tau$, получаем правую часть

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{r} \times \rho \mathbf{F} - \frac{\partial \mathbf{r} \times \mathbf{p}_j}{\partial x_j} = \\ = -\frac{1}{\delta\tau} \left\{ \frac{d}{dt} \mathbf{r} \times \sum_i m_i \mathbf{v}_i' + \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v} + \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i' \right\} + \\ + \frac{1}{\delta\tau} \left\{ \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{F}_i + \iint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k \mathbf{r}_{\sigma k}' \times \mathbf{p}_{nk} \delta\sigma_k \right\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Подведем итоги. В учебниках [1-5] и др. тем или иным способом получено известное выражение (2.1):

$$\mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{r} \times \rho \mathbf{F} - \frac{\partial \mathbf{r} \times \mathbf{p}_j}{\partial x_j} = 0,$$

т.е. левая часть (2.5) равна нулю во всех точках потока всегда и, следовательно, тензор напряжений симметричен:

$$p_{23} = p_{32}, p_{31} = p_{13}, p_{12} = p_{21}$$

В логически полученном выражении (2.5) правая часть

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\delta\tau} \left\{ \frac{d}{dt} \mathbf{r} \times \sum_i m_i \mathbf{v}_i' + \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v} + \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i' \right\} + \\ + \frac{1}{\delta\tau} \left\{ \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{F}_i + \iint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k \mathbf{r}_{\sigma k}' \times \mathbf{p}_{nk} \delta\sigma_k \right\} \neq 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

в общем случае *не равна нулю*, т.к. во-первых, числитель дроби составлен из алгебраических величин 1-го и 2-го порядков малости, а в знаменателе стоит 3-го порядка малости $\delta\tau \rightarrow 0$, во-

вторых, элементарный объем $\delta\tau$ движется вместе с потоком и выбирается совершенно произвольно. Собственно говоря, если в какой-либо точке потока выражение (2.6) будет равно нулю, это будет означать, что в данной точке тензор сплошной среды симметричен и частица не вращается.

В раскрытом виде левая часть (2.5) по уравнению динамики сплошной среды в напряжениях равна выражению:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{r} \times \rho \mathbf{F} - \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{r} \times \mathbf{p}_j &= \mathbf{r} \times \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{F} - \frac{\partial \mathbf{p}_j}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_j} \times \mathbf{p}_j = \mathbf{r} \times 0 - \\ - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_j} \times \mathbf{p}_j &= -\mathbf{i}_j \times \mathbf{p}_j = -(p_{23} - p_{32})\mathbf{i} - (p_{31} - p_{13})\mathbf{j} - (p_{12} - p_{21})\mathbf{k}, \end{aligned}$$

из которого в силу (2.6) следует неравенство

$$(p_{23} - p_{32})\mathbf{i} + (p_{31} - p_{13})\mathbf{j} + (p_{12} - p_{21})\mathbf{k} \neq 0$$

что является доказательством **несимметричности** тензора напряжений сплошной среды, так как для *неравенства* нулю вектора необходимо и достаточно выполнения хотя бы одного из неравенств:

$$p_{23} \neq p_{32}, p_{31} \neq p_{13}, p_{12} \neq p_{21},$$

что и требовалось доказать.

Следовательно, выражение (2.1), которое применяется в учебниках Лойцянского [1] и Седова [2] в качестве теоремы об изменении момента импульса, **фальшивое**. Очевидно из (2.5), что в формуле (2.1) Лойцянского [1] и Седова [2] не может стоять знак равенства.

3. Генеалогия закона трения Стокса и уравнений Стокса

По всей вероятности, указанный факт (1.2) о выводе закона трения Ньютона для **линейной** зависимости скорости от координат и вследствие этого равенство нулю 6 вторых производных в (1.4) был известен Стоксу. Кроме этого, установленная интегральным (дедуктивным) методом ложная *симметричность* тензора напряжений сплошной среды послужила основой *симметричного* закона трения Стокса $P_{yx(c)} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$, для вывода которого не исполь-

зуется линейная зависимость скорости от координат, но были использованы элементы симметричного тензора деформации скоростей $\dot{\hat{S}}$ из первой теоремы Гельмгольца.

Симметричный тензор деформации скоростей $\dot{\hat{S}}$ связывают с тензором деформаций, имеющим двоякий вид [2, 4]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} [\overset{o}{\nabla}_j \overset{o}{w}_i + \overset{o}{\nabla}_i \overset{o}{w}_j + \overset{o}{\nabla}_i \overset{o}{w}_k \cdot \overset{o}{\nabla}_j \overset{o}{w}^k], \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} [\hat{\nabla}_j \hat{w}_i + \hat{\nabla}_i \hat{w}_j - \hat{\nabla}_i \hat{w}_k \cdot \hat{\nabla}_j \hat{w}^k], \end{aligned}$$

которые симметризируются путем *отбрасывания* множества произведений

$$\overset{o}{\nabla}_i \overset{o}{w}_k \cdot \overset{o}{\nabla}_j \overset{o}{w}^k \quad \text{и} \quad \hat{\nabla}_i \hat{w}_k \cdot \hat{\nabla}_j \hat{w}^k.$$

В результате получаются симметричные тензоры

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [\overset{o}{\nabla}_j w_i + \overset{o}{\nabla}_i w_j], \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [\hat{\nabla}_j \hat{w}_i + \hat{\nabla}_i \hat{w}_j] \quad (3.1)$$

Пренебрежение произведениями производных, обосновывается тем, что рассматриваются бесконечно малые относительные перемещения [2-4], что незаконно, так как производные

$$\hat{\nabla}_i \hat{w}_k \cdot \hat{\nabla}_j \hat{w}^k, \quad \overset{o}{\nabla}_i w_k \cdot \overset{o}{\nabla}_j w^k \text{ могут быть конечными величинами.}$$

В самом деле, пусть $w = \varepsilon F(\cos \alpha z)$, где $\alpha = \text{const} \gg 1$ очень большое но конечное число, ε - малый параметр, обеспечивающий бесконечную малость функции w , F -ограниченная дифференцируемая функция. Очевидно, производная

$$\frac{dw}{dz} = -\varepsilon F' \alpha \sin \alpha z \text{ будет конечным числом, достаточно положить}$$

$\alpha = \varepsilon^{-1} \cdot \text{const}$. Следовательно, симметричности тензоров деформаций (2.1) фальшивые.

Тензоры деформаций (3.1) являются следствием фальшивых формул дифференциалов в [2]:

$$d\mathbf{r} = d\xi^i \hat{\partial}_i \text{ и } d\mathbf{r}' = d\xi^i \bar{\partial}_i^* \quad (3.2)$$

В книге Седова [2] указывается положение «...О зависимости векторов

базиса $\hat{\partial}_i, \bar{\partial}_i$, сопутствующей системы от времени», следовательно, дифференциалы должны учитывать зависимость ортов координат от времени и иметь правильный вид

$$d\mathbf{r} = d\xi^i \hat{\partial}_i + \xi^i d\hat{\partial}_i, \quad d\mathbf{r}' = d\xi^i \bar{\partial}_i^* + \xi^i d\bar{\partial}_i^* \quad (3.3)$$

Формулы тензоров деформаций, изложенные в [2-4] основаны на фальшивой формуле (3.2), поэтому они не имеют места для правильных дифференциалов (3.3). Следовательно, теория деформаций [2,4] должна быть основательно пересмотрена и отвергнута полностью.

Закон трения Стокса линейной зависимости напряжений от скоростей деформаций, основан на фальшивых формулах теории деформаций (3.1), конкретно с первыми четырьмя членами ряда Тейлора, старшими членами ряда пренебрегается (первая теорема Гельмгольца в [1]):

$$\mathbf{v}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \delta z,$$

в эквивалентную запись которого входит симметричный тензор скоростей деформаций:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \dot{S} \delta \mathbf{r} + \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{v} \times \delta \mathbf{r} \quad (3.4)$$

Данную формулу необходимо представить в раскрытом виде

$$\delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$$

$$\delta v_i = \sum_{j=1}^3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \delta x_j, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.5)$$

Первая половина (3.5) есть компоненты тензора скоростей деформаций

$$\dot{S}_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.6)$$

вторая половина (3.5) с компонентами ротора скорости $\frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{v} \times \delta \mathbf{r}$ просто не принимается во внимание, что конечно парадоксально! Потому что, они одинаковой размерности и отличаются только знаками «плюс-минус».

Закон трения Стокса $p_{yx(c)} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ получается умножением (3.6) на 2, то есть

откровенной подгонкой к закону трения Ньютона, что отражено в подробной записи симметричного тензора напряжений Стокса:

$$p_c = - \left[p + \left(\frac{2}{3} \mu - \mu' \right) \text{div} \mathbf{v} \right] E + 2 \mu \dot{S},$$

$$p_{ji(c)} = - \left\{ p + \left(\frac{2}{3} \mu - \mu' \right) \text{div} \mathbf{v} \right\} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3$$

Закон трения Стокса и симметричный тензор напряжений лауреат Нобелевской премии Л.Д.Ландау объявил гипотезой. Таким образом, гипотеза Стокса является фальшивой, так как не соответствует закону трения $\mathbf{F}_{mp} = -k\mathbf{v}$, генеалогией гипотезы являются первые 4 члена ряда Тейлора, следовательно, уравнения Стокса (2) являются фальшивыми [10].

3. Степенные законы трения и уравнения

Доказанная теорема 2 о несимметричности тензора напряжений сплошных сред создает возможности для конструирования широкого спектра новых реологических законов, из которых можно выбирать подходящие модели для данного физического процесса соответственно скорости течения и физическим свойствам среды.

Пусть $u > 0$ и рассмотрим пропорциональные степени скорости силы трения: $\mathbf{F}_{mp} = -k_u u^{m_u} \mathbf{i} - k_v v^{m_v} \mathbf{j} - k_w w^{m_w} \mathbf{k}$, проекции которой на ось x равны: $\mathbf{F}_1 = -k_u u_1^{m_u} \mathbf{i}$ на плоскости y_1 и $\mathbf{F}_2 = -k_u u_2^{m_u} \mathbf{i}$ на плоскости $y_2 = y_1 + \delta y$, $\delta y > 0$. Образуются приращения силы и скорости: $\delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1$, $\delta \mathbf{F} = -k_{m_u} \delta u^{m_u} \mathbf{i}$, $\delta u^{m_u} = u_2^{m_u} - u_1^{m_u} > 0$, причем $\delta \mathbf{F} \uparrow \downarrow \mathbf{i}$.

Вводится линейная плотность силы $\delta \mathbf{F}$ как отношение $\mathbf{f} = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta y}$, $\delta \mathbf{F} = \delta y \mathbf{f}$. По определению

вектор $\mathbf{p}_{yxcp} = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta x \delta z}$ касательного напряжения параллелен и одинаково направлен с силами трения $\mathbf{p}_{yxcp} \uparrow \uparrow \delta \mathbf{F}, \mathbf{p}_{yxcp} \uparrow \uparrow \mathbf{f}$.

Через коэффициент пропорциональности имеем равенства $\mathbf{f} = k' \mathbf{p}_{yxcp}$, $k' > 0$, $\mathbf{p}_{yxcp} \uparrow \downarrow \mathbf{i}$, $k' \mathbf{p}_{yxcp} \delta y = -k_{m_u} \delta u^{m_u} \mathbf{i}$.

Данное выражение умножается на орт: $k' \mathbf{p}_{yxcp} \delta y \cdot \mathbf{i} = -k_{m_u} \delta u^{m_u} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$.

В результате получаются

$$k' \mathbf{p}_{yxcp} \cdot \mathbf{i} \delta y = k' \left| \mathbf{p}_{yxcp} \right| \left| \mathbf{i} \right| \delta y \cos 180^\circ = k' p_{yxcp} \cdot 1 \cdot \delta y \cdot (-1) = -k' p_{yxcp} \delta y,$$

$$-k_{m_u} \delta u^{m_u} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = -k_{m_u} \delta u^{m_u} \left| \mathbf{i} \right| \left| \mathbf{i} \right| \cdot \cos 0^\circ = -k_{m_u} \delta u^{m_u} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -k_{m_u} \delta u^{m_u}$$

Равенства $-k' p_{yxcp} \delta y = -k_{m_u} \delta u^{m_u}$, $p_{yxcp} = \frac{k_{m_u} \delta u^{m_u}}{k' \delta y}$, в пределе дают

касательное напряжение $p_{yx} = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{k_{m_u} \delta u^{m_u}}{k' \delta y} = \mu_{m_u} \frac{\partial u^{m_u}}{\partial y}$, $\mu_{m_u} = \frac{k_{m_u}}{k'}$

Обобщения полученной формулы путем перестановок нижних индексов дают соответствующие касательные напряжения

$$p_{xy} = \mu_{m_v} \frac{\partial v^{m_v}}{\partial x}, p_{zx} = \mu_{m_u} \frac{\partial u^{m_u}}{\partial z}, p_{xz} = \mu_{m_w} \frac{\partial w^{m_w}}{\partial x}, p_{yz} = \mu_{m_w} \frac{\partial w^{m_w}}{\partial y}, p_{zy} = \mu_{m_v} \frac{\partial v^{m_v}}{\partial z} \quad (3.5.1)$$

Формулы (3.5.1) выведены, ради простоты, для $u > 0, v > 0, w > 0$ и нечетных показателей степени $m = 1; 3; 5; 7; 9 \dots$. Для нечетных показателей получается такой же результат.

Вывод вязких составляющих нормальных напряжений

Аналогичными рассуждениями устанавливается формула составляющей \mathbf{p}_{xx}^0 нормального напряжения $\mathbf{p}_{xx} = -p \mathbf{i} + \mathbf{p}_{xx}^0$. Пусть силы трения равны: $\mathbf{F}_1 = -k_u u_1^{m_u} \mathbf{i}$ на плоскостит x_1 и $\mathbf{F}_2 = -k_u u_2^{m_u} \mathbf{i}$ на плоскости $x_2 = x_1 + \delta x$, $\delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1$, $\delta \mathbf{F} = -k_{m_u} \delta u^{m_u} \mathbf{i}$, $\delta u^{m_u} = u_2^{m_u} - u_1^{m_u} > 0$, причем $\delta \mathbf{F} \uparrow \downarrow \mathbf{i}$. Вводится линейная плотность силы $\delta \mathbf{F}$: $\mathbf{f} = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta x}$, $\delta \mathbf{F} = \delta x \mathbf{f}$.

По определению вектор нормального вязкого напряжения $\mathbf{p}_{xxcp}^0 = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta y \delta z}$ параллелен и одинаково направлен с силами трения $\mathbf{p}_{xxcp}^0 \uparrow \uparrow \delta \mathbf{F}$, $\mathbf{p}_{xxcp}^0 \uparrow \uparrow \mathbf{f}$.

Через коэффициент пропорциональности имеем $\mathbf{f} = k'' \mathbf{p}_{xxcp}^0$, $k'' > 0$, $\mathbf{p}_{xxcp}^0 \uparrow \downarrow \mathbf{i}$, $k' \mathbf{p}_{xxcp}^0 \delta x = -k_{m_u} \delta u^{m_u} \mathbf{i}$. Данное выражение умножается на орт:

$k' \mathbf{p}_{xxcp}^0 \delta x \cdot \mathbf{i} = -k_{m_u} \delta u^{m_u} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$. В результате получаются

$$k' \mathbf{p}_{xxcp}^0 \cdot \mathbf{i} \delta x = k' \left| \mathbf{p}_{xxcp}^0 \right| \left| \mathbf{i} \right| \delta x \cos 180^\circ = k' p_{xxcp}^0 \cdot 1 \cdot \delta x \cdot (-1) = -k' p_{xxcp}^0 \delta x,$$

$$-k_{m_u} \delta u^{m_u} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = -k_{m_u} \delta u^{m_u} |\mathbf{i}| |\mathbf{i}| \cdot \cos 0^\circ = -k_{m_u} \delta u^{m_u} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -k_{m_u} \delta u^{m_u}$$

Равенства $-k' p_{xxcr}^0 \delta x = -k_{m_u} \delta u^{m_u}$, $p_{xxcr}^0 = \frac{k_{m_u} \delta u^{m_u}}{k' \delta x}$, в пределе дают вязкий член нормального напряжения

$$p_{xx}^0 = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{k_{m_u} \delta u^{m_u}}{k'' \delta x} = \mu_{m_u} \frac{\partial u^{m_u}}{\partial x}, \mu_{m_u} = \frac{k_{m_u}}{k''}$$

Обобщения полученной формулы путем перестановок нижних индексов дают напряжения

$$p_{yy}^0 = \mu_{m_v} \frac{\partial v^{m_v}}{\partial y}, p_{zz}^0 = \mu_{m_w} \frac{\partial w^{m_w}}{\partial z}$$

Полные нормальные напряжения являются суммой давления и вязких составляющих

$$p_{xx} = -p + \mu_{m_u} \frac{\partial u^{m_u}}{\partial x}, p_{yy} = -p + \mu_{m_v} \frac{\partial v^{m_v}}{\partial y}, p_{zz} = -p + \mu_{m_w} \frac{\partial w^{m_w}}{\partial z}$$

Таким образом, из законов трения с нечетными показателями степеней

$$\mathbf{F}_{mp} = -k_{m_v} v^{m_v} \mathbf{e}_v, v = |\mathbf{v}|, \mathbf{v} = v \mathbf{e}_v, m_v = 1; 3; 5; 7; 9 \dots$$

вытекают касательные и нормальные напряжения и уравнения

$$p_{ji} = -p \delta_{ji} + \frac{\alpha \mu}{m_i^{m_i-1}} \frac{\partial v_i^{m_i}}{\partial x_j}, i, j = 1, 2, 3,$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\alpha \mu}{m_i^{m_i-1}} \frac{\partial v_i^{m_i}}{\partial x_j} \right), i = 1, 2, 3,$$

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) - p \operatorname{div} \mathbf{v} + Q_\tau +$$

$$+ \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha \mu}{m_i^{m_i-1}} \frac{\partial v_i^{m_i}}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho Q, \alpha = 1 \left(\frac{cek}{m} \right)^{m-1}, \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0$$

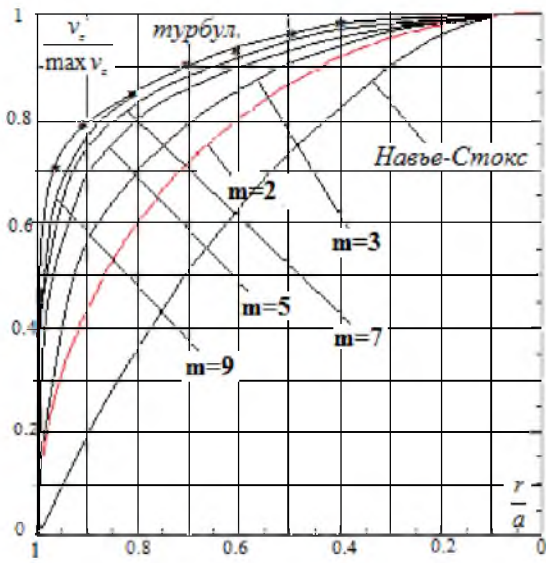
Здесь μ — ньютоновская динамическая вязкость с масштабом μ_* . Показатели степеней нечетные целые положительные числа.

На фиг.1 представлены профили осевой скорости течения вязкой жидкости в трубе круглого сечения радиуса "а", насчитанные из краевой задачи для показателей степени $m = 1; 3; 5; 7; 9$:

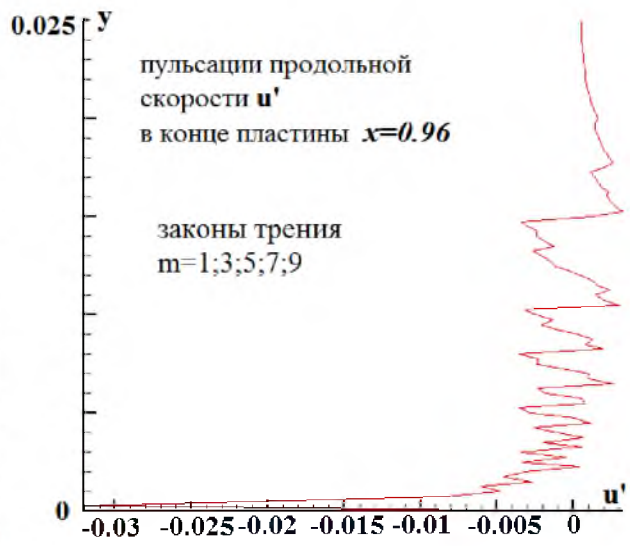
$$\frac{dp}{dz} = \frac{\mu_m}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV_z^m}{dr} \right), V_r = 0, V_\varphi = 0, \frac{dp}{dz} = \operatorname{const} < 0,$$

с решением

$$V_z^m = -\frac{1}{4\mu_m} \frac{dp}{dz} (a^2 - r^2), V_r = 0, V_\varphi = 0, \frac{V_z}{\max V_z} = \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{m}}$$



Фигура 1



Фигура 2

Степень $m = 1$ соответствует уравнению Навье-Стокса, т.е. закону трения Ньютона. Профиль осевой скорости при степени $m = 9$ почти сливается с экспериментальным профилем, который отмечен точками.

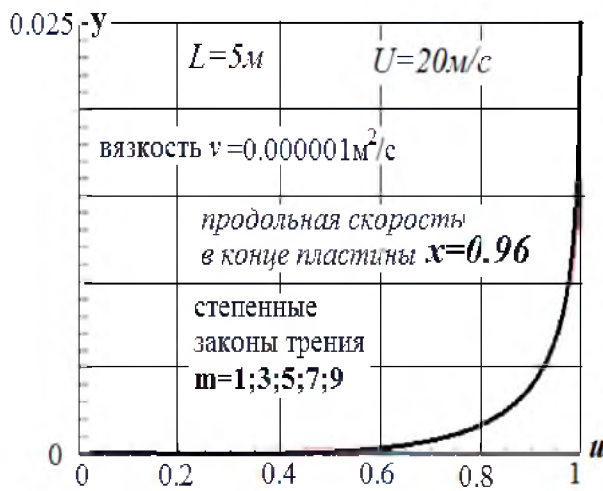
На фиг. 2, 3, 4 приведены расчеты на сетке 200×150 продольного обтекания пластины. На фиг. 2 приведено распределение пульсаций продольной скорости в конце пластины, рассчитанное

по формуле $u''_{ij} = u_{ij}^n - \bar{u}_{ij}^n$, где $\bar{u}_{ij}^n = (\sum_{k=n_0}^n u_{ij}^k) / (n - n_0)$ - осредненная продольная

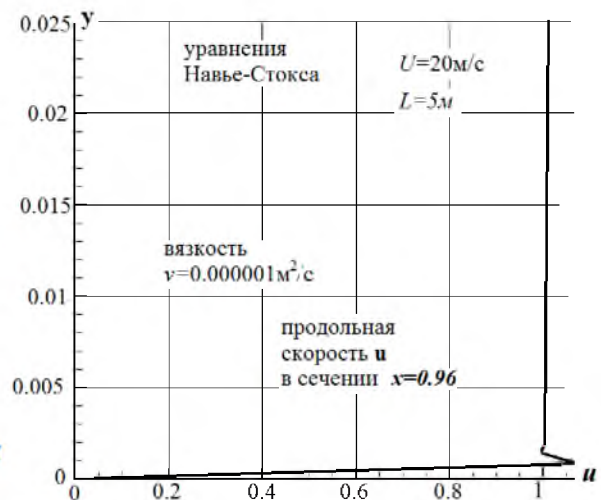
скорость на момент времени $t_n = 0.0001n, n - n_0 = 10^5, n_0 = 1502590$.

На фиг. 3 представлена продольная скорость в конце пластины, полученная численным решением уравнений динамики со степенными законами трения. При тех же параметрах получено решение уравнений Навье.

Профиль фиг.4 продольной скорости в конце пластины, полученный численным решением уравнений Навье $m = 1$, резко отличается от профиля фиг. 3. Тем самым численно подтверждается эффективность степенных законов трения и непригодность уравнений Навье в высокоскоростных течениях.



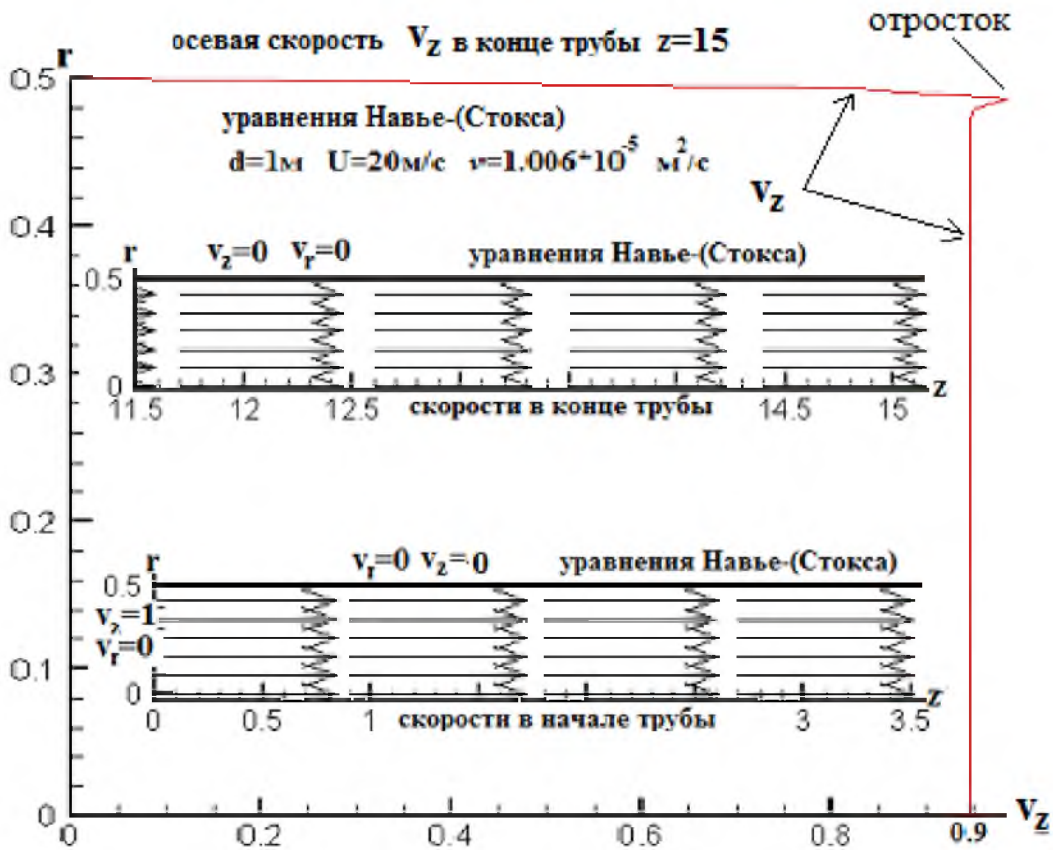
Фигура 3



Фигура 4

На фиг. 2 приведено распределение пульсаций продольной скорости в конце пластины, рассчитанное по формуле $u_{ij}^m = u_{ij}^n - \bar{u}_{ij}^n$, где $\bar{u}_{ij}^n = (\sum_{k=n_0}^n u_{ij}^k) / (n - n_0)$ - осредненная продольная скорость на момент времени $t_n = 0.0001n, n - n_0 = 10^5, n_0 = 1502590$.

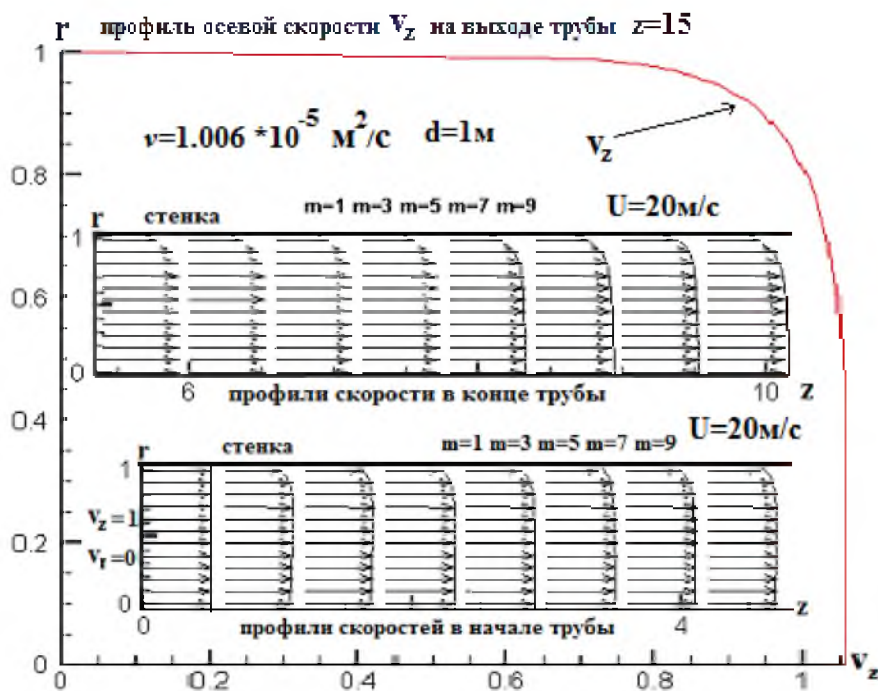
На фиг. 5 представлены профили осевой скорости в начале и в конце трубы с диаметром 1м, полученные численным решением уравнений Навье на сетке 100x400. Около стенки трубы в пограничном слое образуется отросток. Несжимаемая жидкость с кинематической вязкостью $\nu = 1.006 * 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{с}$ втекает в трубу со скоростью $U = 20 \text{ м} / \text{с}$. Течение стационарное.



Фигура 5

На фиг. 5 представлены профили осевой скорости в начале и в конце трубы с диаметром 1м, полученные численным решением на сетке 100x400 уравнений с нечетными степенными законами трения. Профиль осевой скорости в конце трубы характерен с профилем $m=9$ на фиг. 1. Отросток не образуется.

Из распределений скоростей в различных сечениях трубы, длина которой равна 15 калибрам, видно, что уравнения Навье с законом трения Ньютона при одних и тех же данных не реагируют на вязкость жидкости, пограничный слой практически отсутствует. Расчеты проведены по схеме без «аппроксимационных вязкостей» (без схемной диффузии) для конвективных членов. Фиг. 6 наглядно демонстрирует, что профили скоростей, полученные решением уравнений со степенными законами трения, идентичны результатам экспериментов фиг. 1, видно образование пограничного слоя у стенки трубы.



Фигура 6

ВЫВОДЫ

Уравнения Навье являются моделью низкоскоростных течений. Гипотеза Стокса ошибочна, поэтому уравнения Стокса являются фальшивыми. Уравнения со степенными законами трения показали совпадение с известными экспериментальными результатами. Очевидными достоинствами данных уравнений является естественный вывод из законов физики и полное отсутствие каких-либо полуэмпирических констант, коих изобилие в полуэмпирических моделях.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: "Наука", 1973г.
- [2] Седов Л.И. Механика сплошной среды. - Т.1. М.: "Наука", 1973г.
- [3] Лыков А.В. Теплообмен. - М.: «Энергия», 1972г. С.560.
- [4] George E. Mase. Theory and Problems of Continuum Mechanics. Schaum's Outline Series. MCGRAW-HILL BOOK COMPANY. New York, St. Louis, San Francisco, London, Sydney, Toronto, Mexico and Panama 1970.
- [5] Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: «Мир», 1973г.
- [6] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Изд-во "Наука", 1974г.
- [7] Савельев И.В. Курс общей физики. - Т.1. М.: "Наука", 1977г.
- [8] Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. - М.: "Наука", 1973г.
- [9] Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во МГУ, 1978г.
- [10] Джакупов К.Б. Коррекции теоретических парадоксов механики сплошной среды. - А: Типография «Гылым ордасы», 2016. С.418.
- [11] Jakupov K.B. RHEOLOGICAL LAWS OF VISCOUS FLUID DYNAMICS // Известия НАН РК, сер. физ.-мат., 1(293), январь-февраль 2014г. с.51-55.
- [12] Джакупов К.Б. Моделирование термобародиффузий с химическими реакциями в жидкостях и газах // Известия НАН РК, серия физ.-мат., 6(310), ноябрь-декабрь 2016 г. с.80-88.
- [13] Джакупов К.Б. О $k - \varepsilon$, LES, Рейнольдси и степенных моделях // Известия НАН РК, серия физ.-мат., 1(311) январь-февраль 2017 г. с.144-159.
- [14] Jakupov K.B. About gipotese of Stokes and rheological laws. -Almaty "Gylym Ordasy", P.172.
- [15] U.Piomelli. Large-eddy simulation: achievements and challenges // Progress in Aerospace Sciences 35 (1999) 335-362.
- [16] Spalart P. R.: Strategies for turbulence modelling and simulations, Int.J. Heat Fluid Flow, 21, pp. 2, (2000).
- [17] Strelets, M.: Detached Eddy Simulation of massively separated flows. AIAA Paper 2001-879, (2001).
- [18] Menter, F.R., Egorov, Y, (2010): The Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Turbulent Flow Predictions. Part 1: Theory and Model Description, J. Flow Turbulence and Combustion, Vol. 85, No. 1

- [19] Egorov, Y, Menter, F.R. and Cokljat D.: Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Flow Predictions. Part 2: Application to Aerodynamic Flows, companion paper, J. Flow Turbulence and Combustion, Vol. 85, No. 1.
[20] Rotta J. C.: *Turbulente Strömungen*. BG Teubner Stuttgart, (1972).

REFERENCES

- [1] Loitsyanskii LG Fluid Mechanics. TH.: "SCIENCE" 1973.
[2] Sedov L.I. Mechanics of a continuous medium. M.: "Nauka", 1973.
[3] Lykov A.V. Teploobmen. - M.: "Energy", 1972. S.560.
[4] George E. Mase. Theory and Problems of Continuum Mechanics. Schaum's Outline Series. MCGRAW-HILL BOOK COMPANY. New York, St. Louis, San Francisco, London, Sydney, Toronto, Mexico and Panama 197
[5] Batchelor J. Introduction to the dynamics of fluid. M.: "World", 1973.
[6] Schlichting G. Theory of the boundary layer. - M.: Publishing house "Science", 1974.
[7] Saveliev I.V. Course general physics.- T.I. M.: "Nauka", 1977r. P.414.
[8] Landau LD, Lifshits EM Hydrodynamics. - Moscow: "Nauka", 1973.
[9] Piyushin AA Mechanics of a continuous medium. -M.: Izd. MGU, 1978.
[10] Jakupov K.B. Correction of continuum mechanics theoretical paradoxes.- Almaty "Gylym. Ordasy", 2016.P.417.
[11] Jakupov K.B. RHEOLOGICAL LAWS OF VISCOUS FLUID DYNAMICS // Proceedings of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, ser.fiz.-mat., 1 (293), January-February 2014, p.51-55.
[12] Jakupov K.B. Modeling of thermobarodiffusion with chemical reactions in Fluids and gases // Izvestiya NAS RK, series of Physics and Mathematics, 6 (310), November-December, 2016 g. 80-88.
[13] Jakupov K.B. About, LES, Reynolds and power models // Izvestiya NAS RK, series of Physics and Mathematics, 1 (311) January-February 2017, p.144-159.
[14] Jakupov K.B. About gipotese of Stokes and rheological laws. -Almaty "Gylym Ordasy", P.172.
[15] U.Piomelli. Large-eddy simulation: achievements and challenges // Progress in Aerospace Sciences 35 (1999) 335-362.
[16] Spalart P. R.: Strategies for turbulence modelling and simulations, Int.J. Heat Fluid Flow, 21, pp. 2, (2000).
[17] Strelets, M.: Detached Eddy Simulation of massively separated flows. AIAA Paper 2001-879, (2001).
[18] Menter, F.R., Egorov, Y, (2010): The Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Turbulent Flow Predictions. Part 1: Theory and Model Description, J. Flow Turbulence and Combustion, Vol. 85, No. 1
[19] Egorov, Y, Menter, F.R. and Cokljat D.: Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Flow Predictions. Part 2: Application to Aerodynamic Flows, companion paper, J. Flow Turbulence and Combustion, Vol. 85, No. 1.
[20] Rotta J. C.: *Turbulente Strömungen*. BG Teubner Stuttgart, (1972).

ӘОЖ: 519.6, 532.516

К.Б. Жақып

ҚР БҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы қ., Қазақстан

СТОКСА ЖӘНЕ НАВЬЕ ТЕНДЕУЛЕРІНІҢ ГЕНЕАЛОГИЯЛАРЫ. ДӘРЕЖЕЛІК РЕОЛОГИЯЛЫҚ ЗАҢДАР ЖӘНЕ ТЕНДЕУЛЕР

Аннотация. Ньютон үйкеліс заңына және Навье теңдеулеріне физикалық негіздеу берілген. Стокс гипотезасының және Стокс теңдеулерінің жалғандығы көрсетілген. Тұтас ортаның кернеулер тензорының жалпы жағдайда беттеспегендігі орнатылған. Тұтқырлы сұйықтықтардың ағыстарын модельдеу үшін дәрежелік үйкеліс заңдарын дәрежелері тақ көрсеткішті пайдалану физикалық негізделінген, сәйкес беттеспеген кернеулер тензоры жасалған және қозғалыс теңдеулері шығарылған. Осылай салынған модельдерде жарықтай эмпирикалық тұрақтылықтар жоқ. Ньютон үйкеліс заңы және тұтқырлы сұйықтықтардың қозғалысының Навье теңдеулері дәреже көрсеткіші бірге тең болғандағы жеке дербес жағдайы екені көрсетілген. Жайманы ағып өту және дөңгелек кесіндікті құбырдағы ағыстардың сандық нәтижелері келтірілген. Дәрежелік үйкеліс заңдары бар теңдеулердің шешімдерін белгілі құбырдағы ағыстардың эксперименттік нәтижелерімен салыстырғандық қанағатты қалыптасулық және Навье теңдеулерінің шешімдерінің олардан шалқақтауы көрсетілген. Жылдамдық-қысым айнаымалдарындағы теңдеулерді шешуге айырымдық схемалар қолданылған. Сандық эксперименттердің адалдығы конвективтік мүшелерді беснүктелі шаблонда аппроксимация жасауымен қамтылған, сондықтан нәтижелерге «схемалық тұтқырлықтың» әсерлігі жойылады.

Түйін сөздер: теңдеулер, тензор, үйкеліс, дәреже.