N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 2, Number 312 (2017), 95 – 102

B.D. Koshanov, J. Nurikenova

Institute of Mathematics and Mathematical modeling, Almaty
koshanov@list.ru, zhibek.nurikenova@mail.ru

ON SOLVABILITY OF THE GENERALIZED DIRICHLET-NEIMAN PROBLEM FOR A HIGH ORDER ELLIPTIC EQUATION

Abstract. For the elliptic equation $2l-$ th order with constant (and only) real coefficients considered boundary value problem of the job normal derivatives the $(k_j-1)-$ order, $j=1,\ldots,l$ where $1\le k_1<\ldots<k_l$. When $k_j=j$ it moves to the Dirichlet problem, and when $k_j=j+1$ - in the Neumann problem. The sufficient condition of the Fredholm tasks and present a Formula for its index.

Keywords: elliptic equation of high order, normal derivative, Dirichlet -- Neumann problem, solvability of problem.
MSC 34B705, 35J25, 47E05.

УДК 517.951

Б.Д. Кошанов, Ж.С. Нурикенова

Институт математики и математического моделирования, Алматы

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ - НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Аннотация. Для эллиптического уравнения $2l-$го порядка с постоянными (и только старшими) вещественными коэффициентами рассмотрена краевая задача, заключающаяся в задании нормальных производных $(k_j-1)-$го порядка, $j=1,\ldots,l$, где $1\le k_1<\ldots<k_l$. При $k_j=j$ она переходит в задачу Дирихле, а при $k_j=j+1$ – в задачу Неймана. Получено достаточное условие фредгольмовости этой задачи и приведена формула ее индекса.

Ключевые слова: эллиптические уравнения, нормальные производные, задача Дирихле-Неймана, разрешимость задачи.
MSC 34B705, 35J25, 47E05.

Постановка задачи. Рассмотрим в области D на плоскости эллиптическое уравнение $2l$-го порядка

$$Lu=f \qquad (1)$$

с дифференциальным оператором

$$L=\sum_{r=0}^{2l}a_r\frac{\partial^{2l}}{\partial x^{2l-r}\partial y^r}+\sum_{0\le r\le k\le 2l-1}a_{rk}(x)\frac{\partial^k}{\partial x^{k-r}\partial y^r}$$

с коэффициентами $a_r\in R$ и $a_{rk}\in C^\mu(\overline{D})$, $0<\mu<1$.

Область D предполагается односвязной и ограниченной гладким контуром Γ класса $C^{2l,\mu}$. Условие эллиптичности заключается в том, что $a_{2l} \neq 0$ и корни характеристического многочлена $\chi(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_{2l} z^{2l}$ не лежат на вещественной оси. Таким образом,

$$\chi(z) = a_{2l} \prod_{k=1}^{m} (z - v_k)^{l_k} \prod_{k=1}^{m} (z - \overline{v}_k)^{l_k}, \tag{2}$$

где корни v_i попарно различны, лежат в верхней полуплоскости и их суммарная кратность $l_1 + ... + l_m$ равна l.

Обобщенная задача Дирихле - Неймана заключается в отыскании решения $u(x,y)$ уравнения (1) в области D по краевым условиям

$$\left. \frac{\partial^{k_j - 1} u}{\partial n^{k_j - 1}} \right|_{\Gamma} = g_j, \; j = 1,...,l, \tag{3}$$

где $1 \leq k_1 < k_2 < ... < k_l \leq 2l - 1$ и $n = n_1 + in_2$ означает единичную внешнюю нормаль. Нормальная производная k- го порядка здесь понимается как граничный дифференциальный оператор

$$\left(n_1 \frac{\partial}{\partial x} + n_2 \frac{\partial}{\partial y} \right)^k u = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} n_1^r n_2^{k-r} \frac{\partial^k u}{\partial x^r \partial y^{k-r}}.$$

При $k_j = j$ эта задача отвечает задаче Дирихле, а при $k_j = j + 1$ ее естественно назвать обобщенной задачей Неймана. Для полигармонического уравнения последняя задача была изучена А.В. Бицадзе [1]. Другой вариант задачи Неймана, основанный на вариационном принципе, был ранее предложен А.А.Дезиным [2]. При $a_{kr} = 0$ и $f = 0$ задача (1), (3) была рассмотрена в работе [3].

Поскольку по предположению $\Gamma \in C^{2l,\mu}$, функции n_1, n_2 и, значит, коэффициенты граничных дифференциальных операторов (3) принадлежат классу $C^{2l-1,\mu}(\Gamma)$. Решение уравнения (1) ищется в классе $C^{2l,\mu}(\overline{D})$, соответственно его правая часть f должна принадлежать $C^{\mu}(\overline{D})$, а функции g_j в краевом условии (3) - классу $C^{2l-k_j+1,\mu}(\Gamma)$.

С уравнением (1) свяжем $2l \times 2l$ матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_{2l,2} & ... & -a_{2l-1} \end{pmatrix} \tag{4}$$

которая представляет собой так называемую фробениусовую нормальную форму [4] и ее жорданова нормальная форма полностью определяется своим характеристическим многочленом (2). Более точно, ее жорданова матрица $\widetilde{J}$ имеет блочно- диагональную структуру $\widetilde{J} = diag(J, \overline{J})$, $J = diag(J_1, ..., J_m)$ с клетками Жордана

$$J_k = \begin{pmatrix} \nu_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \nu_k & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \nu_k \end{pmatrix} \in C^{l_k \times l_k}.$$

Матрицу $\widetilde{B} \in C^{2l\times 2l}$, приводящую A к жордановой форме $\widetilde{J}$, можно описать явно. С этой целью удобно ввести следующее обозначение. Пусть некоторый n- вектор $g(z) = (g_1(z),\dots, g_n(z))$ аналитичен в окрестности точек $\nu_1,\dots,\nu_m$. Тогда исходя из разбиения $l = l_1 + \dots + l_m$, фигурирующего в (2), можем ввести блочную $n \times l$- матрицу $W_g(\nu_1,\dots,\nu_m) = (W_g(\nu_1),\dots,W_g(\nu_m))$, где матрица $W_g(\nu_k) \in C^{n\times l_k}$ составлена из вектор-столбцов

$$g(\nu_k), g'(\nu_k),\dots, \frac{1}{(l_k-1)} g^{(l_k-1)}(\nu_k).$$

Применим это обозначение к $2l$ - столбцу $h(z) = (1, z,\dots, z^{2l-1})$, пологая

$$B = W_h(\nu_1,\dots,\nu_m) \in C^{2l\times l} \tag{6}$$

Утверждается, что блочная матрица $\widetilde{B} = (B, \overline{B})$ обратима и имеет место равенство

$$\widetilde{B}^{-1} A \widetilde{B} = \widetilde{J}. \tag{7}$$

В самом деле, по определению (6) матрицу $\widetilde{B}$ можно записать в виде $W_h(\nu_1,\dots,\nu_m,\overline{\nu}_1,\dots,\overline{\nu}_m)$ и ее определитель, известный как обобщенный определитель Вандермонда, отличен от нуля [5]. Что касается равенства (7), то оно равносильно соотношению

$$AW_h(\nu_1,\dots,\nu_m) = W_h(\nu_1,\dots,\nu_m)J,$$

или, в терминах столбцов матрицы W, соотношениям

$$Ah(\nu_k) = \nu_k h(\nu_k), \quad Ah^{(j)}(\nu_k) = \nu_k h^{(j)}(\nu_k) + jh^{(j-1)}(\nu_k), 1 \le j \le l_k - 1.$$

Из определения (4) видно, что действие матрицы A на вектор $h(z)$ дает вектор $\widetilde{h} = Ah$ с компонентами

$$\widetilde{h}_1(z) = z,\dots,\widetilde{h}_{2l-1}(z) = z^{2l-1}, \widetilde{h}_{2l}(z) = -\sum_{j=0}^{2l-1} a_{2l,j} z^j.$$

Согласно (2) имеем равенства $\chi^{(j)}(\nu_k) = 0$, $0 \le j \le l_k - 1$, так что

$$\widetilde{h}^{(j)}(\nu_k) = [zh(z)]^{(j)}\Big|_{z=\nu_k}, \ 0 \le j \le l_k - 1,$$

откуда соотношения (7) получаются непосредственно.

Обозначим $e(t) = e_1(t) + ie_2(t) \in C^{2l-1,\mu}(\Gamma)$ единичный касательный вектор к контуру Γ в точке t, связанный с вектором $n(t)$ внешней нормали равенством $e = in$, и введем $l \times 2l$ матрицу- функцию $C = (C_{jk})$, элементы которой определяются из соотношений

$$\sum_{k=1}^{2l} C_{jk} z^{k-1} = (e_1 + e_2 z)^{2l-k_j} (-e_2 + e_1 z)^{k_j - 1}, \; 1 \le j \le l, \tag{8}$$

Основной результат. Сформулируем теперь основной результат о фредгольмовой разрешимости рассматриваемой задачи. Как обычно, под фредгольмовостью и индексом задачи понимаются аналогичные понятия для отвечающего ей оператора

$$C^{2l,\mu}(\overline{D}) \to C^{\mu}(\overline{D}) \times \prod_{j=1}^{l} C^{2l-k_j+1,\mu}(\Gamma). \tag{9}$$

Напомним, что определенные выше прямоугольные матрицы C и B имеют размеры, соответственно, $l \times 2l$ и $2l \times l$, так что можно ввести $l \times l$ матрицу – функцию $G(t) = C(t)B$, $t \in \Gamma$.

Теорема 1. *В предположении*

$$\det[C(t)B] \neq 0, \; t \in \Gamma,$$

задача (1), (3) фредгольмова в пространстве $C^{2l,\mu}(\overline{D})$ *и ее индекс* $\wp$ *дается формулой*

$$\wp = -\frac{1}{\pi} [\arg \det(CB)] \Big|_{\Gamma} + 2l^2, \tag{11}$$

где приращение непрерывной ветви аргумента на контуре Γ *осуществляется против часовой стрелки.*

Доказательство. Пусть условие (10) выполнено. Покажем, что тогда оператор (9) исходной задачи фредгольмов и в обозначениях (10) его индекс $\wp$ дается формулой (11).

Теперь обратимся к матрице CB. Напомним, что $2l \times l$ матрица B, фигурирующая в (10), определяется равенством (6) по отношению к $2l$ - вектору $h(z) = (1, z, \dots, z^{2l-1})$. Из определения (8) элементов матрицы $C(t)$ видно, что она зависит только от единичного касательного вектора $e(t) = e_1(t) + ie_2(t)$ в точке $t \in \Gamma$, этот факт можно записать в виде $C(t) = C_0[e(t)]$. Когда точка t пробегает контур Γ, вектор $e(t)$ описывает единичную окружность Γ_0 против часовой стрелки, поэтому условие (10) равносильно

$$\det[C_0(t)B] \neq 0, \; e \in \Gamma_0, \tag{12}$$

и, соответственно, для величины $\wp$ в (11) имеем выражение

$$\wp = -\frac{1}{\pi} [\arg \det(C_0 B)] \Big|_{\Gamma_0} + 2l^2 \tag{13}$$

Из утверждения а) леммы, приведенной в [5], следует, что матрица $C_0(e)W_h(\nu_1, \dots, \nu_m)$ совпадает с $W_p(\nu_1, \dots, \nu_m)$, где $p = C_0(e)h$. Таким образом, l - вектор p представляет собой многочлен $p(e, z)$, составленный из компонент (2.11), и следовательно,

$$C_0 B = W_p(\nu_1, \dots, \nu_m), \; p_j(e, z) = (e_1 + e_2 z)^{2l-1} \left(\frac{-e_2 + e_1 z}{e_1 + e_2 z} \right)^{k_j - 1}. \tag{14}$$

Таким образом, условие (12) фредгольмовости задачи (1), (3) не зависит от контура Γ и определяется только характеристическим уравнением (2) и набором $1 \le k_1 < k_2 < \dots < k_l \le 2l$ натуральных чисел.

Утверждения b), c) леммы [5] позволяют связать определитель матрицы W с некоторыми операциями.

Лемма 1. (a) Пусть вектор - функция $g=(g_1,...,g_l)$ и скалярная функция φ аналитичны в окрестности точек $\nu_1,...,\nu_m$. Тогда

$$\det W_{\varphi g}(\nu_1,...,\nu_m)=\prod_{j=1}^{m}\left[\varphi(\nu_j)\right]^{l_j}\det W_g(\nu_1,...,\nu_m).$$

(b) Пусть скалярная функция ω аналитична в окрестности точек $\nu_1,...,\nu_m$, причем $\omega'(\nu_j)\neq 0$, $1\le j\le m$, и $\omega'(\nu_i)\neq\omega'(\nu_j)$ при $i\neq j$. Пусть вектор- функция $h=(h_1,...,h_l)$ аналитична в окрестности точек $\omega(\nu_1),...,\omega(\nu_m)$. Тогда

$$W_{how}(\nu_1,...,\nu_m)=\prod_{j=1}^{m}\left[\omega'(\nu_j)\right]^{l_j(l_j-1)/2}W_h\left[\omega(\nu_1),...,\omega(\nu_m)\right].$$

Полагая

$$\omega(e,z)=\frac{-e_2+e_1 z}{e_1+e_2 z},\; g_j(\varsigma)=\varsigma^{k_j-1},\, 1\le j\le l, \tag{15}$$

представим многочлены (14) в виде $p_j(e,z)=(e_1+e_2 z)^{2l-1}g\left[\omega(e,z)\right]$. Тогда на основании леммы 1

$$\det W_p=\prod\nolimits_{j=1}^{m}(e_1+e_2\nu_j)^{l_j(2l-l_j)}\det W_g\circ\omega.$$

Так что условие (12) равносильно

$$\det W_g\left[\omega(e,\nu_1),...,\omega(e,\nu_m)\right]\neq 0,\, e\in\Gamma_0 \tag{16}$$

и равенство (13) переходит в

$$\wp=-\frac{1}{\pi}\left[\arg\det W_g\circ\omega\right]\Big|_{\Gamma_0}+2l^2-\sum\nolimits_{j=1}^{m}\frac{l_j(2l-l_j)}{\pi}\arg(e_1+\nu_j e_2)\Big|_{\Gamma_0}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{2\pi}\arg(e_1+\nu_j e_2)\Big|_{\Gamma_0}=1, \tag{17}$$

отсюда окончательно

$$\wp=-2\left[\frac{1}{2\pi}\arg\det W_g\left[\omega(e,\nu_1),...,\omega(e,\nu_m)\right]\Big|_{\Gamma_0}+l^2-\sum\nolimits_{j=1}^{m}l_j^2\right]. \tag{18}$$

С помощью предложения d) леммы [5] определитель матрицы W_g в (15), (16) и величину $\wp(g)$ можно вычислить явно в каждом из следующих двух случаев:

$$(a)\; k_{j+1}-k_j=1,\, 1\le j\le l,$$
$$(b)\; m=1, \nu_1=\nu. \tag{19}$$

Случай (a) означает, что $k_j=k_1+j-1$, а случай (b) соответствует одному корню $\nu_1=\nu$ в (2).

Теорема 2. *В каждом из случаев (19) задача (1), (3) фредгольмова и ее индекс равен нулю.*

Доказательство. Из предложения d) леммы [5] непосредственно следует, что

$$\det W_g(\varsigma_1,\ldots,\varsigma_m)=\prod_{j=1}^{m}\varsigma_j^{(k_1-1)l_j}\prod_{i>j}(\varsigma_i-\varsigma_j)^{l_il_j}$$

в случае (a) и

$$\det W_g(\varsigma)=c\varsigma^s,\ s=\sum_{j=1}^{l}(k_j-j)$$

в случае (b) с некоторой постоянной $c\neq 0$. В обозначениях (15) для $\omega_i=\omega(s,\nu_i)$ разность

$$\omega(e,\nu_i)-\omega(s,\nu_j)=\frac{\nu_i-\nu_j}{(e_1+e_2\nu_i)(e_1+e_2\nu_j)},$$

поэтому условие (16) выполнено в обоих случаях. С учетом (17) и очевидного равенства

$$\arg[\omega(e,\nu_j)]_{\Gamma_0}=0$$

приходим к выражению

$$\frac{1}{2\pi}\arg\det W_g[\omega(e,\nu_1),\ldots,\omega(e,\nu_m)]\Big|_{\Gamma_0}=-2\sum_{i>j}l_il_j=-l^2+\sum_{j=1}^{m}l_j^2$$

в случае (a) и $\wp(g)=0$ в случае (b). Поскольку $l_1=l$ при $m=1$, предыдущее равенство можно использовать для обоих случаев, что совместно с (18) приводит к $\wp=0$.

Удобно от матрицы W_g в (16) перейти к аналогичной матрице W_q, где q связан с вектором g в (15) соотношением $g(\omega)=\omega^{k_1-1}q(\omega)$. В явном виде

$$q_j(\omega)=\omega^{s_j},\ s_j=k_j-k_1,\ 1\le j\le l. \tag{20}$$

Согласно лемме 1 (a) определители этих матриц связаны равенством

$$\det W_q=\prod_{j=1}^{m}\omega_j^{l_j(k_1-1)}\det W_q,$$

так что в формулах (16), (18) можно g заменить на q.

Теорему 2 дополним случаем $m=2$, $\nu_2=-1/\nu_1$. С этой целью обозначим $\Gamma_0(\nu)$ образ единичной окружности Γ_0 при отображении $e\to\omega(e,\nu)$, где $1\neq\operatorname{Im}\nu>0$. Очевидно, при $\nu=i$ этот образ состоит из одной точки $\varsigma=i$, поэтому можно считать $\nu\neq i$. Полагая $t=e_2/e_1$ и переходя к дробно -линейной функции

$$\varsigma=\frac{-t+\nu}{1+t\nu} \tag{21}$$

убеждаемся, что $\Gamma_0(\nu)$ является окружностью, лежащей в верхней полуплоскости. Эта окружность проходит через точки ν, $-1/\nu$ и имеет своим центром точку

$$\varsigma_0=i\frac{|\nu|^2+1}{2\operatorname{Im}\nu} \tag{22}$$

Важно отметить, что эта окружность всегда охватывает точку $\varsigma=i$.

В самом деле, как показывает прямая проверка, при $\nu=\alpha+i\beta$, $1\neq\beta>0$, разность

$$|\varsigma_0 - \nu|^2 - |\varsigma_0 - i|^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 + 2(\alpha^2 - \beta^2) + 1 - [\alpha^2 + (\beta - 1)^2]^2$$

совпадает с положительной величиной $4\beta[\alpha^2 + (\beta - 1)^2]$.

Теорема 3. *Пусть* $m = 2$, $\nu_1 = \nu$, $\nu_2 = -1/\nu_1$ *и натуральное* r *выбрано столь большим, что*

$$P_s(\varsigma) = (-\varsigma)^r \det W_q(\varsigma, -1/\varsigma),\ s = (s_1, ..., s_{l-1}), \tag{23}$$

является многочленом. Тогда условие (16) равносильно тому, что

$$P_s(\varsigma) \neq 0,\ \varsigma \in \Gamma(\nu). \tag{24}$$

При выполнении этого условия индекс $\wp$ задачи дается формулой

$$\wp = 4[n_s(\nu) - l_1 l_2], \tag{25}$$

где $n_s(\nu)$ есть число корней многочлена P_s (с учетом их кратности), лежащих внутри окружности $\Gamma_0(\nu)$.

Доказательство. Воспользуемся тем, что преобразование ω коммутирует с $\nu \to -1/\nu$, т.е. $\omega(e, -1/\nu) = -1/\omega(e, \nu)$. Поэтому

$$\det W_q[\omega(e, \nu_1), \omega(e, \nu_2)] = \det W_q[\omega(e, \nu), -1/\omega(e, \nu)],$$

В соответствии с (23) отсюда следует, что условие (16) равносильно $P_s[\omega(e, \nu)] \neq 0$, $e \in \Gamma_0$, т.е. отсутствию корней ς_j многочлена P_s на окружности $\Gamma_0(\nu)$. При выполнении этого условия

$$\frac{1}{2\pi} \arg \det W_q[\omega(e, \nu_1), \omega(e, \nu_2)]\Big|_{\Gamma_0} = \frac{1}{2\pi} \arg P_s\big|_{\Gamma_0(\nu)}. \tag{26}$$

Запишем далее $P_s(\varsigma)$ в произведение линейных множителей $\varsigma - \varsigma_j$ и заметим, что

$$\frac{1}{2\pi} \arg[\omega(e, \nu) - \varsigma_j]_{\Gamma_0} = \begin{cases} -2, \varsigma_j \in D_0(\nu), \\ 0, \varsigma_j \notin \overline{D_0(\nu)}, \end{cases}$$

где $D_0(\nu)$ означает открытый круг с границей $\Gamma_0(\nu)$.

В самом деле, при возрастании $t \in R$ точка ς в (21) обходит окружность $\Gamma_0(\nu)$ по часовой стрелке. Поскольку $t = e_2 / e_1$ не меняется от замены e на $-e$, отсюда заключаем, что при обходе $e \in \Gamma_0$ против часовой стрелки точка $\varsigma = \omega(e, \nu)$ двукратно обходит окружность $\Gamma_0(\nu)$ по часовой стрелке.

Суммируя равенства (26) по всем j, приходим к заключению, что левая часть (26) совпадает с $c - 2n_s(\nu)$. Поэтому для $l = l_1 + l_2$ формула (18) переходит в (25), что завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бицадзе А.В. О некоторых свойствах полигармонических функций // Дифференц. уравнения. - 1988. - Т. 24, № 5. - С. 825-831.

[2] Дезин А.А. Вторая краевая задача для полигармонического уравнения в пространстве W_2^m // Докл. АН СССР. – 1954. - Т. 96, №5. - С. 901-903.

[3] Малахова Н.А., Солдатов А.П. Об одной краевой задаче для эллиптического уравнения высокого порядка // Дифференц. уравнения. - 2008. - Т. 44, № 8. - С. 1077-1083.

[4] Мальцев А.И. Основы линейной алгебры, М., Москва, 1970.
[5] Солдатов А.П. Эллиптические системы высокого порядка // Дифференц. уравнения. – 1989. - Т. 25, № 1. - С. 136-144.
[6] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
[7] Ващенко О.В., Солдатов А.П. Интегральное представление решений обобщенной системы Бельтрами // Науч. Ведом. БелГУ, сер. инфор. и прик. мат. – 2006. - Вып. 6, №1 (21). - С. 3-6.
[8] Soldatov A.P. Hyperanalytic functions and their applications // J. Math. Scien. – 2004. - V.17. - P. 1-111.
[9] Пале Р. Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе. - М.: Мир, 1970.
[10] Кошанов Б.Д, Солдатов А.П. Обобщенная задача Дирихле -- Неймана для эллиптического уравнения высокого порядка // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, №12. - С. 1666-1681.
[11] Абаполова Е.А., Солдатов А.П. К теории сингулярных интегральных уравнений на гладком контуре // Науч. Ведом. БелГУ, сер. инфор. и прик. мат. – 2010. - Вып. 18, №5 (76). - С. 6-20.

REFERENCES

[1] Bitsadze A.V. Some Properties of Polyharmonic Functions // Differential Eq. – 1988. - V. 24, № 5. - P. 825-831.
[2] Dezin A.A. The Second Boundary Problem for the Polyharmonic Equation in the Space W_2^m // Dokl. Akad. Nauk. – 1954. - V. 96, № 5. - P. 901-903.
[3] Malakhova N.A., Soldatov A.P. On a Boundary Value Problem for a Higher-Order Elliptic Equation // Differential Eq. – 2008. - V. 44, № 8. - P. 1077-1083.
[4] Mal'tsev A.I. Foundations of Linear Algebra. - Moscow, 1970.
[5] Soldatov A.P. Higher-Order Elliptic Systems // Differential Eq. – 1989. - V. 25, № 1. - P. 136-144.
[6] Muskhelishvili N.I. Singular Integral Equations. - Moscow, 1968.
[7] Vashchenko O.V., Soldatov A.P. Integral Representation of Solutions of Beltrami Generalized System // Nauch. Vedom. Belgorod Univ. Ser. Inform., Appl. Math. – 2006. - Vyp. 6, № 1(21). - P. 3-6.
[8] Soldatov A.P. Hyperanalytic Functions and Their Applications // J. Math. Scien. – 2004. - V. 17. - P. 1-111.
[9] Palais R.S. Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem, Princeton: Princeton Univ. Press, 1965.
[10] Koshanov B.D., Soldatov A.P. Boundary value problem with normal derivatives for a higher-order elliptic equation on the plane // Differentia Eq. – 2016. – V. 52, № 12. – P. 1594-1609.
[11] Abapolova E.A., Soldatov A.P. On the theory of singular integral equations on a smooth contour // Nauch. Vedom. Belgorod Univ. Ser. Inform., Appl. Math. – 2010. - Vyp. 18, №5 (76). – P. 6-20.

Б.Д. Қошанов, Ж.С. Нұрыкенова

Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы

ЖОҒАРҒЫ РЕТТІ ЭЛЛИПТИКАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ЖАЛПЫЛАҒАН ДИРИХЛЕ - НЕЙМАН ЕСЕБІНІҢ ШЕШІЛІМІ ТУРАЛЫ

Аннотация. Тұрақты нақты коэффициентті $2l$ - дәрежелі эллиптикалық теңдеу үшін, (k_j-1)–шы дәрежелі нормал туындысы бар шеттік есеп қарастырылды, мұндағы $j=1,\dots,l$, $1\le k_1<\dots<k_l$. $k_j=j$ болған кезде Дирихле есебіне көшеді, ал $k_j=j+1$ болғанда Нейман есебіне көшеді. Осы есептің фредгольмдылығының жеткілікті шарты алынды және оның индексінің формуласы көрсетілді.

Түйін сөздер: эллиптикалық теңдеулер, нормал туындылар, Дирихле-Нейман есебі, есептің шешілуі.
MSC 34B705, 35J25, 47E05.