N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 2, Number 312 (2017), 120 – 126

T.R. Myrzakul, A.S. Taukenova, F.B. Belisarova, S.R. Myrzakul

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
tmyrzakul@gmail.com, aliya_tauken@gmail.com,
farida.belisarova@kaznu.kz, shynaray1981@gmail.com

INFLATION MODEL OF k-ESSENCE FOR NON MINIMALLY COUPLED GAUSS-BONNET INVARIANT

Abstract. Inflation scenarios for the Horndeski model are discussed for a nonminimal coupling of the scalar field with the Gauss-Bonnet invariant. Examples of the canonical scalar field and k - essence are considered for maintaining early acceleration. The output of e-fold number, which measure the magnitude of inflation is shown. The contribution of Gauss-Bonnet in the dynamics of inflation is derived. It is shown that in this case the field moves faster and at the end of inflation the Gauss-Bonnet contribution disappears at small curvatures of the Friedman universe.

Key words: Gauss-Bonnet invariant, Horndeski inflation, k - essence

УДК 524.8

Т.Р. Мырзақұл, А.С. Таукенова, Ф.Б. Белисарова, Ш.Р. Мырзақұл

Казахский Национальный Универститет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

ИНФЛЯЦИОННАЯ МОДЕЛЬ K-ЭССЕНЦИИ ПРИ НЕМИНИМАЛЬНОЙ СВЯЗИ С ИНВАРИАНТОМ ГАУССА-БОННЭ

Аннотация. Обсуждается инфляционный сценарии для модели Хорндески для не минимальной связи скалярного поля с инвариантом Гаусса-Боннэ. Рассматриваются примеры канонического скалярного поля и k -эссенции для поддержания раннего ускорения. Показан вывод чисел e - сгиба, которые измеряют величину инфляции. Выведен вклад Гаусса-Боннэ в динамике инфляций. Показано, что в этом случае поле движется быстрее и, что в конце инфляций вклад Гаусса-Боннэ исчезает при малых искривлениях Вселенной Фридмана.

Ключевые слова: инвариант Гаусса-Боннэ, инфляция Хорндески, k –эссенция.

Введение

Космологическая инфляция, предложенная Аланом Гутом [1], подразумевает ускоренное расширение в ранней эпохе эволюции нашей Вселенной, которое произошло после Большого взрыва. В рамках общей теории относительности была построена модель с космологической константой, которая хорошо описывала динамику Вселенной, однако появились вопросы такие как плоскость наблюдаемой Вселенной, проблема горизонта и проблема магнитных монополией, на которые не было ответов. Ученые предложили альтернативную гипотезу, согласно которой помимо вещества и излучения существует скалярное поле, создающее отрицательное давление. В расширяющейся среде отрицательное давление способно породить элементарные частицы и кванты. Затем, в рамках Вселенной Фридмана-Леметра расширение происходит экспоненциально. При данном раскладе динамики Вселенной, приведенные выше проблемы исчезают.

А. Линде [2] предложил теорию хаотической инфляции, согласно которой распределение вещества и излучения в пространстве после инфляции становится однородным, за исключением следов первичных квантовых возмущений плотности, которые со временем дали начало галактическим скоплениям наблюдаемой крупномасштабной структуры Вселенной. На основе данных теории, было построено большое количество инфляционных моделей [3-6] и др.

В конце прошлого тысячелетия группа астрономов наблюдая за сверхновыми звездами типа Ia [7,8], обнаружили ускоренное расширение Вселенной. На основе данного открытия появились модифицированные теории гравитации, описывающие динамику Вселенной в целом. Однако Лагранжиан модифицированной гравитации принимает более сложный вид в сравнении с общей теорией относительности, и приводит к дифференциальным уравнениям четвертого порядка. В 1974 году Хорндески [9] нашел самый общий класс скалярно-тензорных теорий (где скалярное поле связано с гравитацией), которые обладают стандартным Лагранжианом, как в теории Эйнштейна. Гравитация Хорндески является довольно популярной и рассматривается во многих работах, особенно в контексте инфляционной космологии (см. некоторые из них [10-12]). Кроме того, один интересный подкласс гравитации Хорндески представлен в виде не минимальной связи поля с четырёхмерным топологическим инвариантом Гаусса-Боннэ (см., например, работу [13]), так как инвариант Гаусса-Боннэ строго связан с теорией струн и следовой аномалией и может играть важную роль в расширении в начальное время нашей Вселенной.

В настоящей работе рассмотрено скалярное поле, поддерживающее инфляцию, связанную с инвариантом Гаусса-Боннэ. Теория может быть выведена как частный случай гравитации Хорндески. Сначала исследуем простую модель, где инфлатон идентифицируется как k-эссенция с каноническим скалярным полем. Лагранжиан k-эссенции содержит кинетический член [14] нестандартного высшего порядка.

В работе используются следующие единицы $\kappa_Б$ = c = h = 1 и $8\pi / M^2 = 1$, где M - Планковская масса.

Модель

Рассмотрим класс моделей со скалярным полем связанным с инвариантом Гаусса-Боннэ, действие которого имеет следующий вид

$$I=\int_M dx^4\sqrt{-g}\left[\frac{R}{2}+p(\varphi,X)+\xi(\varphi)G\right],\quad X=-\frac{g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi}{2}, \tag{1}$$

где M является пространственно-временным многообразием, g – определитель метрического тензора $g_{\mu\nu}$, R – скаляр Риччи действия Гильберта-Эйнштейна общей теории относительности (ОТО), p (φ, X) – функция скалярного поля φ и его кинетической энергий X, ξ (φ) является функцией только поля, а G – четырехмерный топологический инвариант Гаусса-Боннэ, а именно

$$G=R^2-4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}+R_{\mu\nu\sigma\xi}R^{\mu\nu\sigma\xi}, \tag{2}$$

$R_{\mu\nu}$ и $R_{\mu\nu\sigma\xi}$ – тензор Риччи и тензор Римана, соответственно.

Лагранжиан в (1) представляет собой частный случай гравитации Хорндески. Модель Хорндески [9] является наиболее общей скалярно-тензорной теорией с уравнениями поля второго порядка (например, в ОТО) и предпологает общий следующий вид (в вакууме),

$$I=\int_M dx^4\sqrt{-g}\left[\frac{R}{2}+L_H\right],\quad L_H=\sum_{i=2}^{5}L_i, \tag{3}$$

где L_H содержит лагранжиан скалярного поля φ и поправки высокого порядка к ОТО в сочетании с самим полем,

$$L_2=P(\varphi,X)$$
$$L_3=-G_3(\varphi,X)W\varphi$$

$$L_4 = G_4(\phi X)R + G_{4,X}[(W\phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)(\nabla^\mu \nabla^\nu \phi)], \tag{4}$$

$$L_5 = G_5(\varphi, X)G_{\mu\nu}(\nabla^\mu \nabla^\nu \varphi) - \frac{1}{6}G_{5X}[(W\varphi)^3 -$$
$$3(W\varphi(\nabla_\mu \nabla_\nu \varphi)(\nabla^\mu \nabla^\nu \varphi) + 2(\nabla^\mu \nabla_\alpha \varphi)(\nabla^\alpha \nabla_\beta \varphi)(\nabla^\beta \nabla_\mu \varphi)].$$

Здесь $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - Rg_{\mu\nu}/2$ обычный тензор Эйнштейна, тогда как $P(\phi, X)$ и $G_i(\phi, X)$ с $i = 3, 4, 5$ функции скалярного поля ϕ и его кинетической энергий X, W – оператор Даламбера. Если зададим вид функции как в работе [10]

$$\begin{aligned} P(\phi, X) &= p(\phi, X) + 8\frac{d^4\xi(\phi)}{d\phi^4}X^2(3 - \log X), \\ G_3(\phi, X) &= 4\frac{d^3\xi(\phi)}{d\phi^3}X(7 - 3\log X), \\ G_4(\phi, X) &= 4\frac{d^2\xi(\phi)}{d\phi^2}X(2 - \log X), \\ G_5(\phi, X) &= -4\frac{d\xi(\phi)}{d\phi}\log X, \end{aligned} \tag{5}$$

то после интегрирования по частям можно получить уравнение (1). Делая простой выбор $p(\phi, X) = X$, находим гравитацию Эйнштейна-дилатон-Гаусса-Боннэ (ЭдГБ). Отметим также, что если $\xi(\phi) = \text{const}$, то вклад Гаусса-Боннэ исчезает.

В целом, ϕ можно иденфицровать с полем k-эссенции, чей тензор энергии-импульса определяется следующим выражением [14]

$$T^{\mu}_{(\phi)\nu} = (\rho(\phi, X) + p(\phi, X))u^\mu u_\nu + p(\phi, X)\delta^\mu_\nu, \quad u_\nu = \frac{\partial_\nu \phi}{\sqrt{2X}}, \tag{6}$$

так, что $p(\phi, X)$ является эффективным давлением k-эссенций и $\rho(\phi, X)$ ее плотность энергии

$$\rho(\phi, X) = 2X\frac{\partial p(\phi, X)}{\partial X} - p(\phi, X). \tag{7}$$

Каноническое скалярное поле соответствующее $p(\phi, X) = X - V(\phi)$, $V(\phi)$ является только функцией поля, но Лагранжиан k-эссенций допускает кинетический член высокого порядка. Будем работать с плоской метрикой Фридмана-Робертсона-Уокера (ФРУ).

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 dx^2, \tag{8}$$

где $a \equiv a(t)$ масштабный фактор, зависящий от космологического времени. Таким образом

$$X = \frac{\dot{\phi}^2}{2}, \tag{9}$$

и уравнения движения даны в [10]

$$3H^2 = \rho(\phi, X) - 24H^3\dot{\phi}\frac{d\xi(\phi)}{d\phi}, \tag{10}$$

$$-(2\dot{H}+3H^2) \quad = \quad p(\phi,X)+8H^2\frac{d^2\xi(\phi)}{d\phi^2}\dot{\phi}^2+8\frac{d\xi(\phi)}{d\phi}(2H^3\dot{\phi}+2H\dot{H}\dot{\phi}+H^2\ddot{\phi}), \quad (11)$$

где точка означат производную по времени. Уравнение непрерывности k-эссенций следует из уравнения движения как,

$$\dot{\rho}(\phi,X)+3H(\rho(\phi,X)+p(\phi,X))=24\frac{d\xi(\phi)}{d\phi}\dot{\phi}H^2(\dot{H}+H^2). \quad (12)$$

Заметим, что $\rho(\phi,X)+p(\phi,X)=2Xp_X(\phi,X)$, и в пространстве-времени ФРУ $G=24H^2(H^2+\dot{H})$. Введем число e -сгибов относительно данного времени t_0, а именно:

$$N=\log\left[\frac{a(t_0)}{a(t)}\right], \quad (13)$$

и принимая во внимание, что $dN=-Hdt$, имеем из системы уравнений движения (10) и (12),

$$3H^2=\rho(\phi,X)+24H^4\phi'\frac{d\xi(\phi)}{d\phi}, \quad (14)$$

$$-\rho'(\phi,X)+3H^2\phi'^2(p_X(\phi,X))=24\frac{d\xi(\phi)}{d\phi}\phi'H^3(H'-H), \quad (15)$$

где штрихованный индекс обозначает производную по N и $X=H^2\phi'^2/2$. e -сгиб является полезным параметрам в инфляционной космологии и, если его идентифицировать со временем t_0, когда ускорение заканчивается, оно измеряет скорость расширения Вселенной в разное время $t<t_{\mathrm{i}}$.

Инфляция

Ускорение раннего времени реализовано в квази-де Ситтеровском пространстве-времени, когда параметр Хаббла почти постоянен и поле движется медленно. В таком случае уравнения (14), (15) будут читаться как, в приближений медленного сворачивания с $|H'/H|<<1$, $|\phi'|<<1$ и $|\phi''|<<|\phi'|$,

$$3H^2\cong\rho(\phi,X), \quad \rho'(\phi,X)-3H^2\phi'^2p_X(\phi,X)\cong 24\frac{d\xi(\phi)}{d\phi}\phi'H^4. \quad (16)$$

Взяв время t_0 в (13) как время в конце инфляций и предполагая, что когда начинается ускоренное расширение, то $0<<N$, поведение поля может быть объяснено следующим образом: когда $0<<N$, то $\phi<<0$, в то время когда $N=0$, $\phi\cong 0$, так как $\phi'<0$. Когда параметр Хаббла уменьшается и стремится к нулю, тогда N стремится к нулю, $0<\rho'(\phi,X)$, во то время как $X'<0$, позволяющий изящный выход из инфляций.

Введем параметр медленного сворачивания:

$$\varepsilon=\frac{H'}{H}, \quad (17)$$

который положителен и мал во время ускоренной фазы и порядка единицы когда ускорение заканчивается приводя к общему числу e-сгиба $\mathsf{N} \equiv N(a(t_1))$, t_1 начальное время инфляции, достаточно большое, чтобы объяснить термализацию наблюдаемой Вселенной. Если более конкретизоваться, оно должно быть в промежутке $55 < \mathsf{N} < 65$.

Рассмотрим пример простой модели, воспроизводящий инфляцию в рамках рассматриваемой работы.

k-эссенция с каноническим скалярным полем

Определим k-эссенцию с каноническим скалярным полем, выдавая как

$$p(\phi, X) = X - V(\phi), \quad \rho(\phi, X) = X + V(\phi), \tag{18}$$

где $V(\phi)$ является функцией только скалярного поля и кинетический член является стандартным. Во время инфляций, для больших и отрицательных значений поля, оно должно быть как

$$X << V(\phi \to -\infty), \tag{19}$$

в то время как в конце, когда поле стремится к исчезновению

$$V(\phi \to 0^-) << X. \tag{20}$$

Рассмотрим следующий вид параметра Хаббла

$$H^2 = H_0^2(N+1), \quad \varepsilon \cong \frac{1}{2(N+1)}, \tag{21}$$

где H_0 значение параметра Хаббла в конце инфляции. Можно увидеть, что ε параметр медленного сворачивания мал, когда $1 << N$, а именно когда H почти постоянный. Принимая во внимание, что $-dN/dt = H$, с точки зрения космологического времени решение соответствует

$$H^2 = \frac{H_0^4}{4}(t_0 - t)^2, \tag{22}$$

где t_0 общее время инфляций и $t = 0$ в начале ускоренной фазы. Таким образом, путем использования уравнений в [10] с приближением медленного сворачивания $|H'/H| << 1$ и $|\phi''| << |\phi'|$, находим

$$V(\phi) \cong 3H_0^2(N+1), \quad \phi' \cong \frac{-24\xi_\phi(\phi)H^4 + V_\phi(\phi)}{3H^2}. \tag{23}$$

Из второго уравнения мы получим

$$\phi'^2 \cong \frac{-24\xi'(\phi)H_0^4(N+1)^2 + 3H_0^2}{3H_0^2(N+1)}. \tag{24}$$

Не минимальная связь $\xi(\phi)$ между полем и Гауссом-Бонне определяет вид поля и следовательно, механизм выхода из инфляций. Так как поле должно двигаться медленно, реалистичный сценарий может быть дан как

$$\xi'(\phi) = \frac{\xi_0}{(N+1)^{2+\lambda}}, \quad \xi(\phi) = -\frac{1}{(1+\lambda)}\frac{\xi_0}{(N+1)^{1+\lambda}}, \quad -1 < \lambda, \tag{25}$$

с $|\xi_0| \sim 1/H_0^2$ общей постоянной и λ число больше чем минус один. Как следствие,

$$
\begin{aligned}
\phi &\cong \phi_0 - \left(\frac{2}{1-\lambda}\right)(N+1)^{\frac{1-\lambda}{2}}\sqrt{-8\xi_0 H_0^2}, \quad -1<\lambda<0,\\
\phi &\cong \phi_0 - 2\sqrt{1+N}\sqrt{-8\xi_0 H_0^2+1}, \quad 0=\lambda,\\
\phi &\cong \phi_0 - 2\sqrt{1+N}, \quad 0<\lambda,
\end{aligned} \tag{26}
$$

где $\phi_0 < 0$ является значением поля в конце ускоренной фазы, и требуется, чтобы $\xi_0 < 0$. Точное восстановление потенциала приводит к

$$
\begin{aligned}
V(\phi) &\cong 3H_0^2\left[\left(\frac{2}{1-\lambda}\right)\sqrt{-8\xi_0 H_0^2}\right]^{\frac{2}{\lambda-1}}(\phi_0-\phi)^{\frac{2}{1-\lambda}}, \quad -1<\lambda<0,\\
V(\phi) &\cong 3H_0^2\left[2\sqrt{-8\xi_0 H_0^2+1}\right]^{-2}(\phi_0-\phi)^2, \quad 0=\lambda,\\
V(\phi) &\cong \frac{3H_0^2}{4}(\phi-\phi_0)^2, \quad 0<\lambda,
\end{aligned} \tag{27}
$$

в то время как отношение между потенциалом и связью

$$
\xi(\phi) = -\frac{\xi_0}{(1+\lambda)}\left[\frac{3H_0^2}{V(\phi)}\right]^{1+\lambda}, \tag{28}
$$

и получается явный вид функций Лагранжа. Видно, что вклад Гаусса-Боннэ значителен в динамике инфляций только при $-1<\lambda<0$. В этом случае ϕ' больше по отношению к классическому случаю без поправок к ОТО и поле движется быстрее. Отметим, что в конце инфляций $\xi(\phi) \cong -\xi_0/(1+\lambda) \sim 1/H_0^2$, и при $H < H_0$, вклад Гаусса-Боннэ исчезает при малых искривлениях Вселенной Фридмана.

Заключение

В данной работе были исследованы решения для инфляции в модели Хорндески, где скалярное поле, представляющее инфляцию, связанно с инвариантом Гаусса-Боннэ. Было рассмотрено каноническое скалярное поле со стандартным кинетическим членом и *k*-эссенцией, где присутствовало скалярное поле с более высоким порядком кинетического члена. Интерес к такому роду теорий в контексте ранней инфляций мотивирован тем, что можно ожидать, при высоких искривлениях ОТО, эффекты модифицируют теорию Эйнштейна. В частности, инвариант Гаусса-Боннэ играет важную роль в теории струн и входит в следовую аномалию [15,16]. Тем более *k*-эссенция, это одна из возможных теории описывающая инфляцию [14,17]. Преиму-ществом работы с моделью Хорндески является то, что несмотря на сложную форму Лагранжиана, уравнения движения остаются второго порядка как в общей теории относительности.

Проанализирована модель поведения параметра Хаббла для раннего ускорения, используя технику реконструкции для вывода Лагранжиана исходя из данных решений. Эта процедура довольно проста, если выражает все величины в виде чисел e -сгиба, которые измеряют величину инфляции.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Guth H. (1981) Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems, Physical Review D, 23: 347. DOI: 10.1103/PhysRevD.23.347.

[2] Linde A. (1983) Chaotic inflation, Physics Letters B,129:177-181. DOI: 10.1016/0370-2693(83)90837-7.

[3] Nojiri S., Odintsov SD, Oikonomou VK, (2015) Singular inflation from generalized equation of state fluids, Physics Letters B, 747:310. DOI: 10.1016/j.physletb.2015.06.016.

[4] De Laurentis M, Paolella M, Capozziello S. (2015) Cosmological inflation in F(R,G) gravity, Physical Review D, 91:083531. DOI : 10.1103/PhysRevD.91.083531.

[5] Myrzakul S, Myrzakulov R, Sebastiani L. (2016) f(ϕ)R-models for inflation, International Journal of Modern Physics D, 25.2:1650041. DOI: 10.1142/S0218271816500413.

[6] Myrzakul S., Myrzakulov R., Sebastiani L.(2015) Chaotic inflation in higher derivative gravity theories, The European Physical Journal C, 75:111. DOI:10.1140/epjc/s10052-015-3332-x.

[7] Perlmutter S. et al. (1999) Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae, Astrophysical Journal, 517:565- 586. DOI : 10.1086/307221.

[8] Reiss AG et al. (1998) Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant, The Astronomical Journal, 116:1009- 1038. DOI: 10.1086/300499.

[9] Horndeski GW (1974) Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space, International Journal of Theoretical Physics, 10:363. DOI: 10.1007/BF01807638

[10] Kobayashi T, Yamaguchi M, Yokoyama J. (2011) Generalized G-Inflation-Inflation with the Most General Second-Order Field Equations, Progress of Theoretical Physics, 26:511. DOI.org/10.1088/0264-9381/28/10/103001

[11] Myrzakulov R., Sebastiani L. (2016) Scalar tensor Horndeski models: simple cosmological applications, Astrophysics and Space Science, 361:62. DOI: 10.1007/s10509-016-2846-5.

[12] Cognola G., Myrzakulov R., Sebastiani L., Vagnozzi S., Zerbini S. (2016) Covariant Hořava-like and mimetic Horndeski gravity: cosmological solutions and perturbations, Classical and Quantum Gravity, 33:22. DOI:10.1088/0264-9381/33/22/225014.

[13] Nojiri S, Odintsov SD, Sasaki M. (2005) Gauss-Bonnet dark energy // Physical Review D, 71:123509. DOI: 10.1103/PhysRevD.71.123509.

[14] Armendariz-Picon C., Mukhanov V. F., Damour T. (1999) *k*-Inflation, Physics Letters B, 458 : 209. DOI: 10.1016/S0370-2693(99)00603-6.

[15] Myrzakulov R., Odintsov S., Sebastiani L. (2015) Inflationary universe from higher-derivative quantum gravity // Physical Review D. - Vol.91. - P.083529. DOI: 10.1103/PhysRevD.91.083529.

[16] Bamba K., Myrzakulov R., Odintsov SD, Sebastiani L. (2014) Trace-anomaly driven inflation in modified gravity and the BICEP2 result, Physical Review D. 90.4:043505. DOI:10.1103/PhysRevD.90.043505.

[17] Sebastiani L., Cognola G., Myrzakulov R., Odintsov SD, Zerbini S. (2014) Nearly Starobinsky inflation from modified gravity, Physical Review D, 89.2: 023518.DOI: 10.1103/PhysRevD.89.023518.

Т.Р. Мырзақұл, А.С. Таукенова, Ф.Б. Белисарова, Ш.Р. Мырзақұл

Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық универститеті, Алматы, Қазақстан

ГАУСС-БОННЭ ИНВАРИАНТЫМЕН МИНИМАЛДЫ ЕМЕС БАЙЛАНЫС КЕЗІНДЕГІ k-ЭССЕНЦИЯНЫҢ ИНФЛЯЦИЯЛЫҚ МОДЕЛІ

Аннотация. Гаусс-Боннэ инвариант пен скаляр өрісі арасында минималды емес байланыс кезінде Хорндески моделі үшін инфляциялық сценарий талқыланды. Ерте кездегі үдетуді сақтау үшін канондикалық скаляр өрісі және *k*-эссенция мысалдары қарастырылды. Инфляцияны өлшейтін *e*-қайырлу санын есептедік. Инфляция динамикасындағы Гаусс-Боннэ үлесі көрсетілді. Бұл жағдайда өріс жылдам қозғалатыны және инфляцияның соцында Фридман әлемінің шағын бұрмалануы кезінде Гаусс-Боннэ үлесі жоғалатыны көрсетілді.

Тірек сөздер: Гаусс-Боннэ инварианты, Хорндески инфляциясы, k-эссенция.