

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 148 – 154

UDC 593

Z.Tashenova<sup>1</sup>, M. Kaldarova<sup>2</sup>, M. Mussaif<sup>2</sup>

<sup>1</sup>L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

<sup>2</sup>S.Seifullin Kazakh agrotechnical University, Astana, Kazakhstan

## ONE-DIMENSIONAL NUMERICAL SUBSTANTIATION OF SOME THREE-DIMENSIONAL PROBLEM STEADY STATE TEMPERATURE IN THE PRESENCE OF HEAT FLOW, HEAT EXCHANGE AND THERMAL INSULATION

**Abstract.** Bearing components of jet propelled, hydrogen engines, atomic, and heat power plants, technological lines of processing industries, as well as internal combustion engines work in complicated thermal area. Reliable operation of these structures will depend on thermo-stress condition of bearing components. Therefore this research is dedicated to numerical study of thermo-stress condition of bearing components of structures.

This article considers the problems of numerical study of the thermomechanical state of the rods of variable cross-section in the presence of local temperature, heat flux, thermal insulation, heat transfer and axial forces, is relevant interest for engineering and technological processes related strengths of the elements are partially thermally insulated structures. The rapid development of processing of natural resources became new problems for scientists in the development of adequate mathematical models generic computational algorithms and methods that allow a comprehensive numerical investigation of the thermos-elastic state of partially insulated construction elements of variable cross-section operating in challenging thermal and power field.

**Keywords:** the temperature, the rod, the thermal energy, the algorithm, the energy.

УДК 593

Ж.М. Ташенова<sup>1</sup>, М. Калдарова<sup>2</sup>, М. Мусайф<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева;

<sup>2</sup>Казахский агротехнический университет имени С.Сейфуллина

## ЧИСЛЕННОЕ ОБОСНОВАНИЕ ОДНОМЕРНОСТИ НЕКОТОРОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА, ТЕПЛООБМЕНА И ТЕПЛОИЗОЛЯЦИИ

**Аннотация.** В данной статье рассмотрены проблемы численного исследование термомеханического состояния стержней переменного поперечного сечения при наличии локальной температуры, теплового потока, теплоизоляции, теплообмена и осевых сил, представляет соответствующий интерес для техники, технологических процессов связанных прочностей элементов частично теплоизолированных конструкций. Бурное развитие переработки природных богатств, ставшие перед учеными новые проблемы разработки адекватных математических моделей универсальных вычислительных алгоритмов и методов, позволяющих всестороннее численное исследование термоупругого состояния частично-теплоизолированных элементов конструкций переменного поперечного сечение работающих в сложном тепловом и силовом поле.

**Ключевые слова:** температура, тепловой поток, теплоизоляция, теплообмен, энергия.

Рассмотрим проблемы численного исследование термомеханического состояния стержней переменного поперечного сечения при наличии локальной температуры, теплового потока, теплоизоляции, теплообмена и осевых сил, представляет соответствующий интерес для техники, технологических процессов связанных прочностей элементов частично теплоизолированных конструкций.

### Экспериментальная часть

Рассмотрим трехмерное тело, поперечное сечение которого имеет форму прямоугольного четырехугольника. Длина имеет бесконечную протяженность. Построим глобальную декартовую систему координат  $Oxyz$ , как показано на рисунке 1.

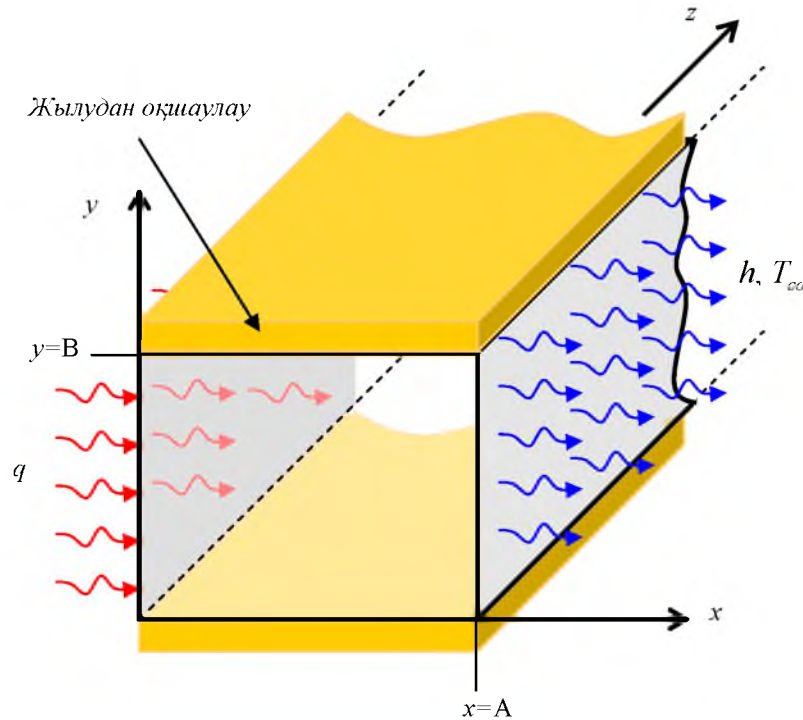


Рисунок 1– Расчетная схема рассматриваемой задачи

В этой системе координат длину тела обозначим через  $L$  (см), тогда  $-\infty \leq L \leq +\infty$ , ширину тела (в направлении оси  $Ox$ ) через  $A$  (см), ее высоту (в направлении оси  $Oy$ ) -  $B$  (см). Пусть на сторону  $x=0, 0 \leq y \leq B, -\infty \leq z \leq +\infty$  тела подведен тепловой поток постоянной интенсивности  $q = \text{const}$  ( $\text{Bm}/\text{cm}^2$ ). Через поверхности противоположенной стороны тела ( $x=A, 0 \leq y \leq B, -\infty \leq z \leq +\infty$ ) происходит теплообмен  $h$  ( $\text{Bm}/(\text{cm}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ ), а температура окружающей среды  $T_{co}$  ( $^\circ\text{C}$ ). Обе стороны ( $y=0$  и  $y=B, 0 \leq x \leq A, -\infty \leq z \leq +\infty$ ) тела полностью теплоизолированы. Требуется определить закон распределения температуры в объеме рассматриваемого тела. Здесь следует отметить, что из за постановки задачи процесс теплопереноса является двумерным, то есть поле распределение температуры в любом сечении  $z = \text{const}$  рассматриваемого тела будет одинаковым. Поэтому закон распределения температуры является функцией от двух переменных, т.е.  $T = T(x, y)$ . В рассматриваемом случае, тело является бруском бесконечной длины. В соответствии [1] выражение функционала, которое характеризует полную тепловую энергию для рассматриваемого бруса имеет следующий вид:

$$J = \int_V \frac{1}{2} \left[ K_{xx} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + K_{yy} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] dV + \int_{S(x=0)} q T dS + \int_{S(x=A)} \frac{h}{2} (T - T_{co})^2 dS, \quad (1)$$

где  $V$ - объем рассматриваемого бруса;  $S(x=0)$ - площадь поверхности ( $x=0$ ) бруса, где подведен тепловой поток  $q$ ;  $S(x=A)$ - площадь поверхности ( $x=A$ ) бруса, через которого происходит теплообмен с окружающей средой  $h$ ;  $K_{xx}, K_{yy}$  ( $\text{Bm}/(\text{cm} \cdot ^\circ\text{C})$ )- коэффициент теплопроводности рассматриваемого бруса, соответственно по направлениям осей координат  $Ox$  и  $Oy$ .

Площадь поперечного сечения рассматриваемого бруса (которая имеет форму прямоугольного четырехугольника) дискретизируем с помощью координатных прямых на четырехугольные конечные элементы. Число дискретных конечных элементов будет  $m \times n$  (соответственно по осям  $Ox$  и  $Oy$ ). Для каждого элемента построим локальную систему координат  $Oxy$ , таким образом, что начало координат совпадает с геометрическим центром элемента, как показано на рисунке 2. Нумерация узлов элемента указана на этом рисунке. Координаты узлов элемента в локальной системе координат будут следующими  $1(-a; -b)$ ;  $2(a; -b)$ ;  $3(a; b)$ ;  $4(-a; b)$ .

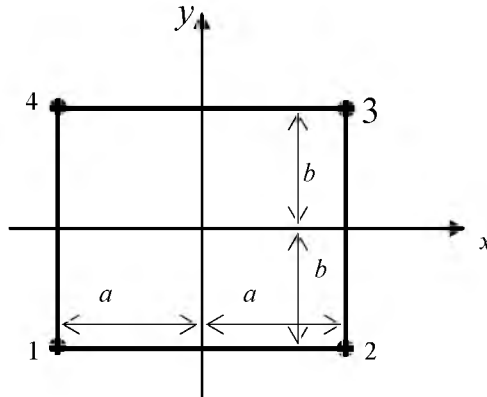


Рисунок 2 – Схема построения локальной системы координат

В пределах каждого элемента поле распределения температуры примем в виде билинейного полинома [2]:

$$T(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy = \varphi_1(x, y)T_1 + \varphi_2(x, y)T_2 + \varphi_3(x, y)T_3 + \varphi_4(x, y)T_4, \quad (2)$$

где  $T_1, T_2, T_3, T_4$  - значение температуры в узлах четырехугольника,  $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \varphi_3(x, y), \varphi_4(x, y)$  - функции формы для рассматриваемого четырехугольного конечного элемента, которые имеют следующий вид [3]:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= \frac{(a-x)(b-y)}{4ab}; & \varphi_2(x, y) &= \frac{(a+x)(b-y)}{4ab}; \\ \varphi_3(x, y) &= \frac{(a+x)(b+y)}{4ab}; & \varphi_4(x, y) &= \frac{(a-x)(b+y)}{4ab} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Свойства этих функции формы будут следующими:

$$\left. \begin{aligned} 1) & \text{ в первом узле, т.е. при } x = -a; y = -b \\ & \varphi_1(-a, -b) = 1; \varphi_2(-a, -b) = 0; \varphi_3(-a, -b) = 0; \varphi_4(-a, -b) = 0. \\ 2) & \text{ во втором узле, т.е. при } x = a; y = -b \\ & \varphi_1(a, -b) = 0; \varphi_2(a, -b) = 1; \varphi_3(a, -b) = 0; \varphi_4(a, -b) = 0. \\ 3) & \text{ в третьем узле, т.е. при } x = a; y = b \\ & \varphi_1(a, b) = 0; \varphi_2(a, b) = 0; \varphi_3(a, b) = 1; \varphi_4(a, b) = 0. \\ 4) & \text{ в четвертом узле, т.е. при } x = -a; y = b \\ & \varphi_1(-a, b) = 0; \varphi_2(-a, b) = 0; \varphi_3(-a, b) = 0; \varphi_4(-a, b) = 1. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$5) \sum_{i=1}^4 \varphi_i = 1, \quad (5)$$

$$6) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

в любой точке дискретного конечного элемента.

Кроме того из (2), (3) легко определяется значения градиентов температуры в любой точке дискретного элемента:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} T_i; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} T_i \quad (7)$$

Для наглядности предлагаемого вычислительного алгоритма поперечное сечение рассматриваемого бруса рассмотрим как один дискретный элемент четырехугольной формы, как показано на рисунке 3.

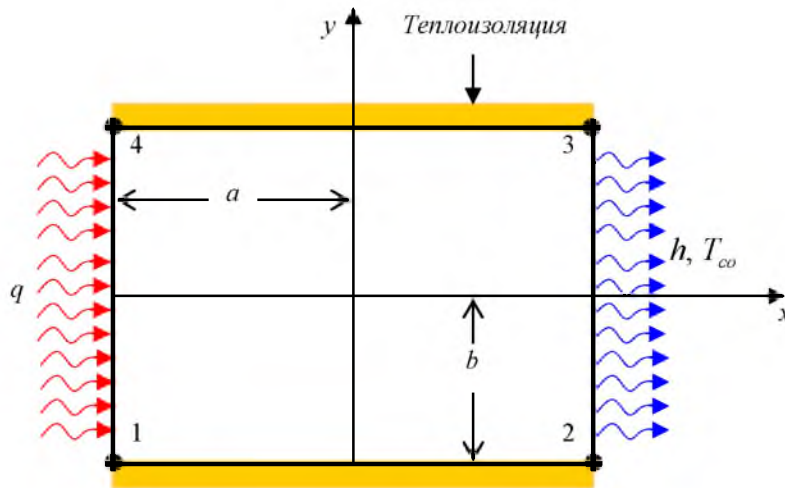


Рисунок 3 – Расчетная схема рассматриваемой задачи

Теперь для одного дискретного элемента вычислим интеграл по объему. Здесь пользуемся следующей формулой:

$$\int_V f(x, y) dV = L \int_{-a}^a \int_{-b}^b f(x, y) dx dy. \quad (8)$$

Используя выше написанные формулы например проведем проверку.

### Результаты и их обсуждения

В целях проверки на точность и сходимость получаемых численных результатов проведем вычислительные эксперименты. За исходные данные принимая следующие значения:

$$a = 5 \text{ см}; \quad b = 3 \text{ см}; \quad q = -50 \text{ (Вт/см}^2\text{)}; \quad h = 10 \text{ (Вт/(см}^2\text{·}^\circ\text{C))}; \quad T_{co} = 40 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

$$K_{xx} = K_{yy} = 75 \text{ (Вт/(см·}^\circ\text{C))}; \text{ вычислявая систему уравнения имеем:}$$

$$2T_1 - 2T_2 - T_3 + T_4 + 5,555T_1 + 2,777T_2 - 2,777T_3 - 5,555T_4 = 20;$$

$$T_1 + 0,10294T_2 - 0,5T_3 - 0,60294T_4 = 2,647;$$

$$T_1 = -0,10294T_2 + 0,5T_3 + 0,60294T_4 + 2,647; \quad (9)$$

Подставляя в последнее уравнение вместо  $T_1$  ее выражение (9) имеем:

$$0,75T_2 - 2,20588T_3 + 0,39706T_4 = -45; \quad (10)$$

определим  $T_2$ :

$$T_2 = 0,17028T_3 + 0,3756T_4 + 17,92986; \quad (11)$$

определим  $T_3$ :

$$T_3 = 0,32658T_4 + 28,12; \quad (12)$$

определим  $T_4$ :

$$T_4 = 51,665 \text{ } ^\circ\text{C}; \quad (13)$$

определим значение  $T_3$ :

$$T_3 = 45 \text{ } ^\circ\text{C}; \quad (14)$$

находим значения  $T_2$ :

$$T_2 = 45 \text{ } ^\circ\text{C}; \quad (15)$$

находим значение  $T_1$ :

$$T_1 = 51,665 \text{ } ^\circ\text{C}; \quad (16)$$

Таким образом, из-за симметричности поставленной задачи относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ , получим, что  $T_1 = T_4 = 51,665 \text{ } ^\circ\text{C}$ ;  $T_2 = T_3 = 45 \text{ } ^\circ\text{C}$ ; Пользуясь (2) находим закон распределения температуры в пределах сечения бруса, т.е. четырехугольника:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \sum_{i=1}^4 \varphi_i(x, y)T_i = \frac{1}{4ab} [(ab - ay - bx + xy)T_1 + (ab - ay + bx - xy)T_2 + \\ &+ (ab + ay + bx + xy)T_3 + (ab + ay - bx - xy)T_4] = \frac{1}{4ab} (51,665ab - 51,665ay - 51,665bx + \\ &+ 51,665xy + 51,665ab + 51,665ay - 51,665bx - 51,665xy + 45ab - 45ay + 45bx - 45xy + \\ &+ 45ab + 45ay + 45bx + 45xy) = \frac{1}{4ab} (193,33ab - 13,33bx); \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь следует отметить, что  $-a \leq x \leq a$ .

#### Ожидаемые результаты

Из последнего видно, что поле распределения температуры в пределах сечения бруса (четыреугольника) не зависит от координаты оси  $Oy$ . Это поле является линейной функцией от  $x$ . Кроме

того из (17) также видно, что наибольшая температура наблюдается в точках поверхности  $x = -a$ . В точках этой поверхности значение температуры будет  $T(x = -a, y) = 51,665 \text{ }^\circ\text{C}$  при  $-b \leq y \leq b$ . Соответственно наименьшее значение температуры будет в точках поверхности  $x = a$ , т.е.  $T(x = a, y) = 45 \text{ }^\circ\text{C}$  при  $-b \leq y \leq b$ .

Таким образом, из полученных результатов видно, что рассматриваемый процесс теплопереноса из-за скалярности температуры является одномерным физическим процессом.

### Выводы

Все эти тестовые расчеты показывают, что в рамках рассмотренной задачи при нахождении закона распределения температуры в пределах расчетной области с применением энергетического принципа достаточно дискретизировать одним четырехугольным элементом, вследствие чего разрешающая система будет состоять из четырех линейных алгебраических уравнений. Последние можно решать аналитически. Здесь следует отметить, что при других граничных условиях это утверждение может терять смысл.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ноздрев В.Ф. Курстермодинамики. – М.: Мир, 1967. – 247 с.
- [2] Huebner, K. H., The Finite Element Method for Engineers. Wiley, 1975, pp: 183-187.
- [3] Lishirong, Chengshangyue, Analysis of thermal post-bulking of heated elastic rods. China Applied mathematics and mechanics, 2000, vol. 2: 119-125.
- [4] Lishirong, Yangjingning, Accurate model of post bucking of elastic rod with Mirabel cross sections. Gansu University of Science, 1999, ch.1: 98-102.
- [5] Kudaykulov, A. K., Mathematical (finite element) modeling applications of heat distribution in one-dimensional structural elements. Baiterek, 2009, pp: 123-129.
- [6] Kenzhegul, B. Z., Kudaykulov A. K., Myrzasheva, A. N., Numerical study of stem elongation of heat-resistant alloy based on the availability of all types of sources. Bishkek, 2009, pp: 67-75.
- [7] TashenovaZh.M., Nurlybaeva E.N., Kudaykulov, A., Zhumadillaeva A.K. Numerical study of established thermo-mechanical state of rods of limited length, with the presence of local heat flows, temperatures, heat insulation and heat transfer // Advanced Science Letters. -№ 19.-P.2395-2397.
- [8] TashenovaZh.M., Nurlybaeva E.N., Kudaykulov A. Developing a Computational Modeling Algorithm for Thermostressed Condition of Rod made of Heat-resistant Material ANB-300 type // Advanced Materials Research. – 2013. – Vol. 19. – P. 4562-4566.
- [9] Nicolas X., Benzaoui A., Xin S. Numerical simulation of thermoconvective flows and more uniform depositions in a cold wall rectangular APCVD reactor // J. Cryst. Growth. – 2008. – № 1(310). – P.174-186.
- [10] Chen W.R. A numerical study of laminar free convection heat transfer between inner sphere and outer vertical cylinder // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 2007. – № 13-14(50). – P. 2656-2666.
- [11] Gamrat G., Favre-Marinet M., Le P.S. Numerical study of heat transfer over banks of rods in small Reynolds number cross-flow // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 2008. – № 3-4(51). – P. 853-864.
- [12] Nouri-Borujerdi A., Lavasani A.M. Experimental study of forced convection heat transfer from a cam shaped tube in cross flows // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 2007. – № 13-14(50). – P. 2605-2611.
- [13] AvedissianT., Naylor D. Free convective heat transfer in an enclosure with an internal louvered blind // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 2008. – № 1-2(51). – P. 283-293.
- [14] Yalcin H.G., Baskaya S. Sivrioglu M. Numerical analysis of natural convection heat transfer from rectangular shrouded fin arrays on a horizontal surface // Int. Commun. Heat and Mass Transfer. – 2008. – № 3(35). – C. 299-311.
- [15] Das A., Das B. Thermo-elastic stress distribution in three layered system // Proc. Nat. acad Sci. – 2001. – Vol. 71, №1. – P. 21-31.
- [16] Lishirong, Chengshangyue, Analysis of thermal post-bulking of heated elastic rods. China Applied mathematics and mechanics, 2000, vol. 2: 119-125.
- [17] Lishirong, Yangjingning, Accurate model of post bucking of elastic rod with Mirabel cross sections. Gansu University of Science, 1999, ch.1: 98-102.
- [18] Kudaykulov, A. K., Mathematical (finite element) modeling applications of heat distribution in one-dimensional structural elements. Baiterek, 2009, pp: 123-129.
- [19] Kenzhegul, B. Z., Kudaykulov A. K., Myrzasheva, A. N., Numerical study of stem elongation of heat-resistant alloy based on the availability of all types of sources. Bishkek, 2009, pp: 67-75.
- [20] Panamarev, V. A., 2002. About calculating models for titanic bar high temperature straining. Boundary problems and mathematical modeling, pp: 65-69.

REFERENCES

- [1] Huebner, K. H., The Finite Element Method for Engineers. Wiley, 1975, 183-187 (in Eng.).
- [2] Lishirong, Chengshangyue, Analysis of thermal post-bulking of heated elastic rods. China Applied mathematics and mechanics, **2000**, 2, 119-125 (in Eng.).
- [3] Lishirong, Yangjingning, Accurate model of post bucking of elastic rod with Mirabel cross sections. Gansu University of Science, **1999**, 1, 98-102 (in Eng.).
- [4] Kudaykulov, A. K., Mathematical (finite element) modeling applications of heat distribution in one-dimensional structural elements. Baiterek, **2009**, 123-129, (In Russ.).
- [5] Kenzhegul, B. Z., Kudaykulov A. K., Myrzasheva, A. N., Numerical study of stem elongation of heat-resistant alloy based on the availability of all types of sources. Bishkek, **2009**, 67-75, (In Russ.).
- [6] Nozdrev, V. F., The course of thermodynamics. Enlightenment, **1995**, (In Russ.).
- [7] TashenovaZh.M., Nurlybaeva E.N., Kudaykulov, A., Zhumadillaeva A.K. Numerical study of established thermo-mechanical state of rods of limited length, with the presence of local heat flows, temperatures, heat insulation and heat transfer // Advanced Science Letters, (In Russ.).
- [8] TashenovaZh.M., Nurlybaeva E.N., Kudaykulov A. Developing a Computational Modeling Algorithm for Thermostressed Condition of Rod made of Heat-resistant Material ANB-300 type // Advanced Materials Research, **2013**, 19, 4562-4566 (In Russ.).
- [9] Nicolas X., Benzaoui A., Xin S. Numerical simulation of thermoconvective flows and more uniform depositions in a cold wall rectangular APCVD reactor // J. Cryst. Growth, **2008**, 1(310), 174-186 (In Russ.).
- [10] Chen W.R. A numerical study of laminar free convection heat transfer between inner sphere and outer vertical cylinder // Int. J. Heat and Mass Transfer, **2007**, 13-14(50), 2656-2666 (in Eng.).
- [11] Gamrat G., Favre-Marinet M., Le P.S. Numerical study of heat transfer over banks of rods in small Reynolds number cross-flow // Int. J. Heat and Mass Transfer, **2008**, 3-4(51), 853-864, (in Eng.).
- [12] Nouri-Borujerdi A., Lavasani A.M. Experimental study of forced convection heat transfer from a cam shaped tube in cross flows // Int. J. Heat and Mass Transfer, **2007**, 13-14(50), 2605-2611 (In Russ.).
- [13] Avedissian T., Naylor D. Free convective heat transfer in an enclosure with an internal louvered blind // Int. J. Heat and Mass Transfer, **2008**, 1-2(51), 283-293, (In Russ.).
- [14] Yalcin H.G., Baskaya S. Sivrioglu M. Numerical analysis of natural convection heat transfer from rectangular shrouded fin arrays on a horizontal surface // Int. Commun. Heat and Mass Transfer, **2008**, 3(35), 299-311, (In Russ.).
- [15] Das A., Das B. Thermo-elastic stress distribution in three layered system // Proc. Nat. acad Sci, 2001, 71, 1, 21-31, (in Eng.).
- [16] Lishirong, Chengshangyue, Analysis of thermal post-bulking of heated elastic rods. China Applied mathematics and mechanics, **2000**, 2, 119-125, (in Eng.).
- [17] Lishirong, Yangjingning, Accurate model of post bucking of elastic rod with Mirabel cross sections. Gansu University of Science, **1999**, 1, 98-102, (in Eng.).
- [18] Kudaykulov, A. K., Mathematical (finite element) modeling applications of heat distribution in one-dimensional structural elements. Baiterek, **2009**, 123-129, (In Russ.).
- [19] Kenzhegul, B. Z., Kudaykulov A. K., Myrzasheva, A. N., Numerical study of stem elongation of heat-resistant alloy based on the availability of all types of sources. Bishkek, 2009, 67-75, (In Russ.).
- [20] Panamarev, V. A. About calculating models for titanic bar high temperature straining. Bound ary problems and mathematical modeling, **2002**, 65-69, (In Russ.).

**Ж.М. Ташенова<sup>1</sup>, М. Калдарова<sup>2</sup>, М. Мусайф<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті  
<sup>2</sup> С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университеті

**ЖЫЛУ АҒЫНЫ, ЖЫЛУ АЛМАСУ ЖӘНЕ ЖЫЛУ ИЗОЛЯЦИЯСЫ БАР ҮШӨЛШЕМДІ  
ЕСЕПТІҢ ТҰРАҚТЫ ТЕМПЕРАТУРАЛЫ КҮЙІНДЕГІ САНДЫҚ СИПАТТАМАСЫ**

**Аннотация.** Көптеген өндіріс орындарында негізгі құрылым элементтері күрделі жылу көздері әсерінде тұрақты жұмыс жасайды. Өндірістің үздіксіз жұмыс жасауы әрине сол элементтердің сынып қалмауына тікелей байланысты. Сондықтанда алдын – ала негізгі құрылым элементтердің әр түрлі жылу көздері әсерінде қандай термо-механикалық жағдайда болуын терең зерттеу өндірістің үздіксіз, тұрақты, сапалы жұмыс жасау тұрғысынан өте өзекті мәселе болып табылады. Бұл ғылыми жұмыс осы мәселені шешуге бағытталған.

**Тірек сөздер:** температура, жылу көздері, жылу алмасу, жылу ағыны, жылу изоляция.