N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 2, Number 312 (2017), 173 – 180

E.A. Bakirova[1], N.B. Iskakova[2], B.Uaisov[3]

[1,2] Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan;
[1] Kazakh State Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan;
[2] Kazakh National Pedagogical University named after Abai, Almaty, Kazakhstan;
[3] Kazakh Academy of Transport and Communications named after M.Tynyshbayev
E-mail: bakirova1974@mail.ru, narkesh@mail.ru

ON THE ALGORITHM FOR SOLVING OF A LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH PARAMETER

Abstract. On a finite segment Fredholm's integral-differential equation with a parameter is considered. The kernel of integral member is assumed degenerate and as additional conditions allowing to find the values of parameter and corresponding to it solution of the investigated equation the values of solution are given in initial and eventual points of segment. At the fixed values of parameter the Cauchy problem for the Fredholm integral-differential equation with a degenerate kernel is solved. Using the fundamental matrix of differential part and assuming uniqueness solvability of the Cauchy problem an origin boundary value problem is reduced to the system of linear algebraic equations with respect to unknown parameter. Existence of solution of this system provides solvability of the investigated problem. The algorithm of finding of solution for initial problem is offered based on a construction and solving of the system of linear algebraic equations. The basic auxiliary problems of algorithm are: the Cauchy problem for ordinary differential equations and calculation of definite integrals. The numerical implementation of algorithm offered in the article uses the method of Runge-Kutta of fourth order to solve the Cauchy problem for ordinary differential equations and Simpson's method for the estimate of definite integrals.

Key words: boundary value problem with parameter, Fredholm integro-differential equation, solvability, algorithm.

УДК 517.624.3

Э.А. Бакирова[1], Н.Б. Искакова[2], Б. Уаисов[3]

[1,2] Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан;
[1] Казахский государственный женский педагогический университет, Алматы, Казахстан;
[2] Казахский Национальный педагогический университет имени Абая, Алматы, Казахстан;
[3] Казахская академия транспорта и коммуникаций им. М.Тынышбаева

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА С ПАРАМЕТРОМ

Аннотация. На ограниченном отрезке рассматривается интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма с параметром. Ядро интегрального члена предполагается вырожденным и в качестве дополнительных условий, позволяющих найти значения параметра и ему соответствующее решение исследуемого уравнения даны значения решения в начальной и конечной точках отрезка. При фиксированном значении параметра решается задача Коши для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром. Используя фундаментальную матрицу дифференциальной части и предполагая однозначную разрешимость задачи Коши исходная краевая задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестного параметра. Существование решения этой системы обеспечивает разрешимость исследуемой задачи. Предложен алгоритм нахождения решения исходной задачи, основанный на построении и решений системы линейных алгебраических уравнений. Основными вспомогательными задачами алгоритма являются: задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, вычисления определенных интегралов. Предлагаемая в статье численная реализация алгоритма использует метод Рунге-Кутта четвертого порядка для решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и метод Симпсона для приближенного вычисления определенных интегралов.

Работа выполнена в рамках проекта №3362/ГФ4 по грантовому финансированию Министерства образования и науки Республики Казахстан

Ключевые слова: краевая задача с параметром, интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма, разрешимость, алгоритм.

Вопросы существования и единственности решения краевых задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма, содержащих параметры, исследованы в [1-9].

Двухточечная краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма рассмотрены в работах [10-16].

В настоящей работе на отрезке $[0,T]$ рассматривается линейная двухточечная краевая задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с параметром

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi(t)\int_0^T \psi(s)x(s)ds + K(t)\mu + f(t), \quad x,\mu \in R^n, \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \tag{2}$$

$$x(T) = x^1, \quad x^1 \in R^n, \tag{3}$$

где $(n\times n)$-матрицы $A(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и n-вектор $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$.

Через $C([0,T],R^n)$ обозначим пространство непрерывных функций $x:[0,T]\to R^n$ с нормой $\|x\|_1 = \max\limits_{t\in[0,T]}\|x(t)\|$.

Решением задачи (1)-(3) является пара $(x^*(t),\mu^*)$, где непрерывная на $[0,T]$ и непрерывно дифференцируемая на $(0,T)$ функция $x^*(t)$, удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению с параметром (1) при $\mu=\mu^*$ и краевым условиям (2), (3).

Пусть $X(t)$ - фундаментальная матрица обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t\in[0,T].$$

Тогда решение задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения с параметром (1), (2) сводится к эквивалентной системе интегральных уравнений

$$x(t) = X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)\varphi(\tau)d\tau\int_0^T \psi(s)x(s)ds +$$
$$+X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)K(\tau)d\tau\cdot\mu + X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau. \tag{4}$$

Введя обозначение

$$a = \int_0^T \psi(s)x(s)ds$$

систему (4) запишем в виде

$$x(t) = X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)\varphi(\tau)d\tau \cdot a +$$

$$+ X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)K(\tau)d\tau \cdot \mu + X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \,. \quad (5)$$

Умножив обе части (5) на $\psi(\tau)$, интегрируя по τ на отрезке $[0,T]$, получим

$$a = G \cdot a + \int_0^T \psi(\tau)X(\tau)\int_0^\tau X^{-1}(\tau_1)K(\tau_1)d\tau_1 d\tau \cdot \mu + \int_0^T \psi(\tau)X(\tau)\int_0^\tau X^{-1}(\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1 d\tau \,, \quad (6)$$

где
$$G = \int_0^T \psi(\tau)X(\tau)\int_0^t X^{-1}(\tau_1)\varphi(\tau_1)d\tau_1 d\tau \,.$$

При обратимости матрицы $I - G$ из равенства (6) следует

$$a = [I - G]^{-1}\left\{\int_0^T \psi(\tau)X(\tau)\int_0^\tau X^{-1}(\tau_1)K(\tau_1)d\tau_1 d\tau \cdot \mu + \right.$$

$$\left. + \int_0^T \psi(\tau)X(\tau)\int_0^\tau X^{-1}(\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1 d\tau \right\}, \quad (7)$$

где I - единичная матрица размерности n.

Подставив в (5) вместо a правую часть (7), получим представление $x(t)$ через параметр μ:

$$x(t) = X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)\varphi(\tau)d\tau \cdot [I - G]^{-1} \times$$

$$\times \left\{\int_0^T \psi(\tau_1)X(\tau_1)\int_0^{\tau_1} X^{-1}(\tau_2)K(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 \cdot \mu + \int_0^T \psi(\tau_1)X(\tau_1)\int_0^{\tau_1} X^{-1}(\tau_2)f(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 \right\} +$$

$$+ X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)K(\tau)d\tau \cdot \mu + X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \quad (8)$$

Определив из (8) значение $x(t)$ при $t = T$ и подставив его в краевое усло-вие (3), получим систему линейных уравнений относительно параметра μ:

$$Q(T)\mu = -F(T), \qquad \mu \in R^n, \quad (9)$$

где

$$Q(T) = X(T)\int_0^T X^{-1}(\tau)K(\tau)d\tau +$$

$$+ X(T)\int_0^T X^{-1}(\tau)\varphi(\tau)d\tau[I - G]^{-1}\int_0^\tau \psi(\tau_1)X(\tau_1)\int_0^{\tau_1} X^{-1}(\tau_2)K(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1,$$

$$F(T) = x^{(1)} - X(T)\int_0^T X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau -$$

$$- X(T)\int_0^T X^{-1}(\tau)\varphi(\tau)d\tau[I-G]^{-1}\int_0^\tau \psi(\tau_1)X(\tau_1)\int_0^{\tau_1} X^{-1}(\tau_2)f(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 .$$

При обратимости матрицы $I-G$ необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (1)-(3) является существование решения системы (9), а критерием однозначной разрешимости обратимость матрицы $Q(T)$.

Предлагается следующий алгоритм нахождения решения задачи (1)-(3).

I. Решая задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi(t), \qquad x(0) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{10}$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + K(t), \qquad x(0) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{11}$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \qquad x(0) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{12}$$

получим $(n \times n)$ матричные функции $\tilde{\varphi}(t)$, $\tilde{k}(t)$, и n- вектор-функцию $\tilde{f}(t)$ соответственно.

II. Вычислим интегралы

$$\begin{gathered} \hat{\psi} = \int_0^T \psi(t)dt, \quad \hat{\psi}(\varphi) = \int_0^T \psi(t)\tilde{\varphi}(t)dt, \\ \hat{\psi}(K) = \int_0^T \psi(t)\tilde{K}(t)dt, \quad \hat{\psi}(f) = \int_0^T \psi(t)\tilde{f}(t)dt, \end{gathered} \tag{13}$$

III. Предполагая обратимость матрицы $I-G$ составим систему линейных алгебраических уравнений (9). Решая эту систему, найдем параметр μ^*.

IV. Равенством (7) найдем элемент a^* и построим функцию

$$F^*(t) = \varphi(t)\cdot a^* + K(t)\mu^* + f(t), \qquad t \in (0,T).$$

Решая следующую задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + F^*(t), \qquad x(0) = 0, \qquad t \in [0,T],$$

найдем $x^*(t)$.

Если известна фундаментальная матрица $X(t)$, то решение краевой задачи (1)-(3) определяется равенством

$$x^*(t) = X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)\big(\varphi(\tau)\cdot a^* + K(\tau)\mu^* + f(\tau)\big)d\tau,$$

$$t \in [0,T]. \tag{14}$$

Предлагаемый алгоритм дает решение краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с параметром (1)-(3) в аналитической форме (14).

Для случая, когда фундаментальную матрицу построить не удается, предлагается численная реализация вышеизложенного алгоритма, основанная на методе Рунге-Кутта 4-го порядка и формуле Симпсона. Методом Рунге-Кутта 4-го порядка находим численные решения задач Коши (10)-(12). С помощью формулы Симпсона вычисляем определенные интегралы (13). Численные решения задач Коши и численные значения определенных интегралов позволяют получить приближенную систему алгебраических уравнений относительно параметра μ.

Пример. На отрезке [0,1] рассмотрим краевую задачу для интегро-дифференциального уравнения с параметром

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi(t)\int_0^1 \psi(s)x(s)ds + K(t)\mu + f(t), \quad x, \mu \in R^2, \quad t \in (0,1), \tag{15}$$

$$x(0) = 0, \qquad x(1) = x^1, \qquad x^1 \in R^2, \tag{16}$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, \ \varphi(t) = \begin{pmatrix} t^2 & 1 \\ 0 & t^3 \end{pmatrix}, \ \psi(s) = \begin{pmatrix} 2 & s \\ s^3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^t \\ t-1 & 2 \end{pmatrix}, \ f(t) = \begin{pmatrix} 2t - t^3(t-1) + \frac{1}{12}t^2 + e^t - \frac{59}{30} \\ t - \frac{29}{30}t^3 + 3 \end{pmatrix}, \quad x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решением задачи (15), (16) является пара $(x^*(t), \mu^*)$, где $x^*(t) = \begin{pmatrix} t(t-1) \\ t^2 \end{pmatrix}$, $\mu^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

I. Взяв число разбиений интервала [0,1) равным $M = 40$ с шагом $h = 0.025$ и решая методом Рунге-Кутта задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi(t), \ x(0) = 0, \ t \in [0,1],$$

определим значения (2×2) матрицы $\tilde{\varphi}_i^h$, $i = \overline{0,M}$. Используя значения матриц $\psi(t)$, $\tilde{\varphi}_i^h$, $i = \overline{0,M}$, с помощью формулы Симпсона вычислим

$$\hat{\psi}^h(\varphi) = \int_0^1 \psi(t)\tilde{\varphi}_i^h(t)dt.$$

Тем самым получим матрицу $G^h = \hat{\psi}^h(\varphi) = \begin{pmatrix} 0.183858 & 1.157062 \\ 0.053684 & 0.234769 \end{pmatrix}$.

Матрица $I - G^h$ имеет обратную: $[I - G^h]^{-1} = \begin{pmatrix} 1.360599 & 2.057285 \\ 0.095451 & 1.451121 \end{pmatrix}$.

II. Решая задачи Коши методом Рунге-Кутта 4-го порядка

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + K(t), \qquad x(0) = 0, \qquad t \in [0,T],$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \qquad x(0) = 0, \qquad t \in [0,T],$$

найдем значения матриц $\tilde{K}_i^h$ и векторов $\tilde{f}_i^h$, $i = \overline{0,M}$.

Применяя формулы Симпсона, вычислим определенные интегралы

$$\hat{\psi}^h = \int_0^1 \psi(t)dt, \quad \hat{\psi}^h(K) = \int_0^1 \psi(t)\tilde{K}_i^h(t)dt, \qquad \hat{\psi}^h(f) = \int_0^1 \psi(t)\tilde{f}_i^h(t)dt.$$

III. Используя численные решения задач Коши и численные значения определенных интегралов, составим приближенную систему алгебраических уравнений относительно параметра μ:

$$Q^h(1)\mu = -F^h(1), \quad \mu \in R^2,$$

где $$Q^h(1) = \begin{pmatrix} 0.288198 & -0.447868 \\ 0.060207 & 0.234617 \end{pmatrix}, \quad F^h(1) = \begin{pmatrix} 2.254688 \\ 3.683668 \end{pmatrix}.$$

Решая полученную систему, находим приближенное значение параметра

$$\mu^h = \begin{pmatrix} 0.999999954 \\ -1.000000022 \end{pmatrix}.$$

IV. Подставляя приближенное значение параметра в правую часть равенства

$$a = [I - G^h]^{-1}\left(\hat{\psi}^h(K) \cdot \mu^h + \hat{\psi}^h(f)\right),$$

определим приближенное значение элемента $a^h = \begin{pmatrix} -0.083333331 \\ -0.033333255 \end{pmatrix}.$

V. Методом Рунге-Кутта 4-го порядка решая задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + F^{*,h}(t), \quad x(0) = 0, \quad t \in [0, T],$$

где $F^{*,h}(t) = \varphi(t) \cdot a^h + K(t)\mu^h + f(t)$, находим численные значения решения краевой задачи (15), (16) в точках разбиения интервала $(0,1)$, которые приведены в следующей таблице.

Таблица - Результаты вычисления численного решения краевой задачи

t	$x_1(t)$ (численное решение)	$x_1(t)$ (точное решение)	$x_2(t)$ (численное решение)	$x_2(t)$ (точное решение)
0.000	0	0	0	0
0.025	-0.024375	-0.024375	0.000625	0.000625
0.050	-0.047499999	-0.0475	0.0025	0.0025
0.075	-0.069374999	-0.069375	0.005625	0.005625
0.100	-0.089999999	-0.09	0.01	0.01
0.125	-0.109374999	-0.109375	0.015625	0.015625
0.150	-0.127499999	-0.1275	0.0225	0.0225
0.175	-0.144374998	-0.144375	0.030625	0.030625
0.200	-0.159999998	-0.16	0.04	0.04
0.225	-0.174374998	-0.174375	0.050625	0.050625
0.250	-0.187499998	-0.1875	0.0625	0.0625
0.275	-0.199374998	-0.199375	0.075625	0.075625
0.300	-0.209999998	-0.21	0.089999999	0.09
0.325	-0.219374998	-0.219375	0.105624999	0.105625
0.350	-0.227499997	-0.2275	0.122499999	0.1225
0.375	-0.234374997	-0.234375	0.140624999	0.140625
0.400	-0.239999997	-0.24	0.159999998	0.16
0.425	-0.244374997	-0.244375	0.180624998	0.180624
0.450	-0.247499997	-0.2475	0.202499998	0.2025
0.475	-0.249374997	-0.249375	0.225624998	0.225625
0.500	-0.249999997	-0.25	0.249999997	0.25
0.525	-0.249374997	-0.249375	0.275624997	0.275625
0.550	-0.247499997	-0.2475	0.302499997	0.3025
0.575	-0.244374997	-0.244375	0.330624997	0.330625
0.600	-0.239999997	-0.24	0.359999997	0.36
0.625	-0.234374997	-0.234375	0.390624997	0.390625
0.650	-0.227499997	-0.2275	0.422499996	0.4225
0.675	-0.219374997	-0.219375	0.455624996	0.455625
0.700	-0.209999997	-0.21	0.489999996	0.49
0.725	-0.199374998	-0.199375	0.5256249966	0.525625
0.750	-0.187499998	-0.1875	0.562499996	0.5625
0.775	-0.174374998	-0.174375	0.600624996	0.600625
0.800	-0.159999998	-0.16	0.639999996	0.64
0.825	-0.144374998	-0.144375	0.680624996	0.680625
0.850	-0.127499998	-0.1275	0.722499997	0.7225

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5
0.875	-0.109374999	-0.109375	0.765624997	0.765625
0.900	-0.089999999	-0.09	0.809999997	0.81
0.925	-0.069374999	-0.069375	0.855624998	0.855625
0.950	-0.047499999	-0.0475	0.902499998	0.9025
0.975	-0.024375	-0.024375	0.950624999	0.950625
1.000	0	0	1	1

Как видно из таблицы, разность между точным и численным решениями не превышает значения $\varepsilon = 0.4 \times 10^{-8}$.

Замечание. В случае если решение $x(t)$ исследуемой линейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с параметром (1)-(3) удовлетворяет начальному условию $x(0) = x^0$, то с помощью замены

$$y(t) = x(t) - x^0,$$

получим эквивалентную краевую задачу

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \varphi(t)\int_0^T \psi(s)y(s)ds + K(t)\mu + f(t) + \left(A(t) + \varphi(t)\int_0^T \psi(s)ds \right) \cdot x^0, \quad y, \mu \in R^n,\ t \in (0,T),$$

$$y(0) = 0, \quad y(T) = x^1 - x^0,$$

решение которой находим по вышеизложенному алгоритму.

ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Nesterenko O.B. Iteration method for the solution of integro-differential equations with constraints // Nonlinear Oscillations. -2007. –Vol. 10, №3. P. 339-350.

[2] Luchka A. Yu., Nesterenko O.B. Projection method for the solution of integro-differential equations with restrictions and control // Nonlinear Oscillations. -2008. –Vol. 11, №2. P. 219-228.

[3] Luchka A. Yu., Nesterenko O.B. Construction of solution of integro-differential equations with restrictions and control by projection-iterative method // Nonlinear Oscillations. -2009. –Vol. 12, №1. P. 85-93.

[4] Кибенко А.В., Перов А.И. О двухточечной краевой задаче с параметром //Ученые записки АГУ им.С.М. Кирова. Сер. физ.-мат. и хим. наук. -1961. №3. -С. 21-30.

[5] Кибенко А.В., Перов А.И. Некоторые теоремы существования для двухточечной краевой задачи с параметром //Труды семинара по функциональному анализу. -1963. Вып.7. -С. 52-58.

[6] Кибенко А.В. Метод последовательных приближений в двухточечной краевой задаче для уравнения с параметром //Ученые записки АГУ им.С.М.Кирова. Сер. физ.-мат. и хим. наук. -1961. №6. -С. 13-21.

[7] Гома И.А. Метод последовательных приближений в двухточечной краевой задаче с параметром // Укр. матем. журн. -1977. Т.29, №6. -С. 800-807.

[8] Эйдельман Ю.С. Краевая задача для дифференциального уравнения с параметром //Диф.уравн. 1978. Т.14, №7. -С. 1335-1337.

[9] Джумабаев Д.С. Необходимые и достаточные условия существования решений краевых задач с параметром // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1979. №3. -С. 5-12.

[10] Dzhumabaev D.S. A method for solving the linear boundary value problem for an integro-differential equation // //Computational mathematics and mathematical physics, - 2010. - 50, - №7. - P. 1150-1161.

[11] Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the well-posedness of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations // Differential equations, - 2010. - 46. - № 4. - P. 553-567.

[12] Бакирова Э.А., Искакова Н.Б. Алгоритмы нахождения решения линейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с интегральным условием на основе сплайн-аппроксимации // Математический журнал Алматы, 2016. - Т. 16, № 1. – С. 17-34.

[13] Dzhumabaev D.S. Necessary and sufficient conditions for the solvability of linear boundary value problems for the Fredholm integro-differential equations // Ukranian Mathematical journal, - 2015. - 66. -№ 8. - P. 1200-1219.

[14] Dzhumabaev D.S. An algorithm for solving a linear two-point boundary value problem for an integrodifferential equation //Computational mathematics and mathematical physics, - 2013. - 53. - № 6. - P. 736-758.

[15] Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations //Journal of computational and applied mathematics, -2016. -294. - P. 342-357.

[16] Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. On the unique solvability of the boundary value problems for Fredholm integrodifferential equations with degenerate kernel // Journal of Mathematical Science. Vol. 220. No 4. 2017. P. 489-506.

Э.А. Бакирова[1], Н.Б. Искакова[2], Б. Уаисов[3]

[1,2] БҒМ Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан;
[1]Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан;
[2] Абай атындағы Қазақ Ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан;
[3] М.Тынышбаев атындагы Қазақ көлік және коммуникациялар академиясы

ПАРАМЕТРІ БАР ФРЕДГОЛЬМ ИНТЕГРАЛДЫҚ- ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУІ ҮШІН СЫЗЫҚТЫ ШЕТТІК ЕСЕПТІ ШЕШУДІҢ БІР АЛГОРИТМІ ТУРАЛЫ

Аннотация. Шектелген аралықта параметрі бар Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі қарастырылады. Интегралдық мүшенің өзегі нұқсанды деп болжамдалады және параметрдің мәнін әрі оган сәйкес келетін зерттелінді теңдеудің шешімін табуды мүмкін ететін қосымша шарттар ретінде шешімнің алгашқы және соцгы нүктелердегі мәндері берілген. Параметрдің белгілеп алынган мәнінде нұқсанды өзекті Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін Коши есебі шешіледі. Дифференциалдық бөліктің фундаменталдық матрицасын пайдалана отырып әрі Коши есебінің бірмәнді шешілімділігін ескере отырып, бастапқы шеттік есеп белгісіз параметрге қатысты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесіне келтіріледі. Осы жүйенің шешімінің бар болуы зерттелінді есептің шешілімділігін қамтамасыз етеді. Бастапқы есептің шешімін табудың сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін құруга және оны шешуге негізделген алгоритмі ұсынылды. Алгоритмнің негізгі көмекші есептері мыналар болып табылады: жәй дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебі, анықталган интегралдарды есептеу. Мақалада ұсынылган алгоритмді сандық жүзеге асыру төртінші ретті Рунге-Куттаның әдісін жәй дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебін шешуге және Симпсон әдісін анықталған интегралдарды жуықтап шешуге пайдаланады.

Кілттік сөздер: параметрі бар шеттік есеп, Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеу, шешілімділік, алгоритм.