N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 2, Number 312 (2017), 193 – 205

UDC 517.94

K.Zh. Rustemova[1], A.Sh. Shaldanbaev[1], M.I. Akylbaev [2]

[1]South Kazakhstan State University, Shymkent;
[2]Kazakhstan Engineering and Pedagogical University of Friendship of Peoples, Shymkent
shaldanbaev51@mail.ru

SOLUTION OF A SINGULARLY PERTURBED CAUCHY PROBLEM FOR AN ORDINARY SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH CONSTANT COEFFICIENTS BY THE METHOD OF A DEVIATING ARGUMENT

Abstract. In this paper we obtain a spectral decomposition of the solution of the Cauchy problem for an ordinary differential equation of the second order with constant coefficients in a space with an indefinite metric, and with the help of this expansion we deduce the boundary layer expansion of the solution of the singularly perturbed Cauchy problem for the second-order equation $L_\varepsilon y = \varepsilon y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x),\ \ y(0) = 0, y'(0) = 0, x \in [0,1]$;

Keywords: self-adjoint operator, completely continuous operator, Gilbert-Schmidt's theorem, Volterian operators, indefinite metric, Schmidt decomposition, completeness, orthonormal basis.

УДК 517.94

К.Ж. Рустемова[1], А.Ш. Шалданбаев[1], М.И. Ақылбаев[2]

[1]Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент қ-сы;
[2]Қазақстанның инженерлі-педагогикалық халықтар достығы университеті, Шымкент қ-сы

Коэффиценттері тұрақты, екінші ретті кәдімгі дифференциалдықтеңдеудің сингуляр әсерленген Коши есебін, аргументін ауытқыту әдісі арқылы шешу

1. Кіріспе

Мына, $H = L^2(0,1)$ кеңістігінде, Кошидің келесі,

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x), \qquad x \in [0,1] \tag{1}$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0 \tag{2}$$

есебін қарастырайық, мұндағы ε-оң аз шама, ал a,b– белгілі тұрақты шамалар, $f(x) \in L^2(0,1)$ - белгілі функқция, $y(x)$ белгісіз функқция.

Егер $\varepsilon \to +0$ болса онда $\lim_{\varepsilon\to+0} y(x,\varepsilon)$ шегі бар ма, әлде жоқ па деген сұрақ туындайды.

$\varepsilon = 0$ сәтінде теңдеудің реті төмендеп екінші $y'(0) = 0$ шарты керек болмай қалады. Мәселенің оңай емес екенін осыдан-ақ аңғаруга болады.

Бұл (1)-(2) есепті шешудің, біздің әдісімізден өзгеше, әртүрлі жолдары бар [1-9]. Өкінішке орай, бұл әдістердің көпшілігі жартылай эмпиристік әдістер қатарына жатады, себебі, есептің қалдық мүшесі, оның коэффиқиенттері арқылы бағаланбаған.Біз бұл есепті спектрәлдік әдіспен [10-17] шешіп, әлгі олқылықты толтырмақпыз.

Біздің әдісіміздің өзгешелігі, Коши операторының спектрінің жоқтығына қарамастан, спектрәлді таралым арқылы шешімді тарқатып, сонан соң оның асимптотикасын зерттеуінде.

2. Зерттеу әдістері

Лемма 1

Егер $f(x)$ функцңиясы [0,1] кесіндісі бойында үзіксіз болса, онда Кошидің (1)-(2) есебінің бірегейшешімі бар және ол екі рет үзіксіз дифференңиалданады, былай,

$$y(x,\varepsilon,f)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \psi(x-t)f(t)dt \qquad (3)$$

өрнектеледі, мұндагы $\psi(x)$ – дегеніміз Кошидің, келесі,

$$\varepsilon\psi''(x)+a\psi'(x)+b\psi(x)=0$$

$$\psi(0)=0, \qquad \psi'(0)=1$$

Дәлелі. Жогарыдагы (3)-ті (1)-ге апарып қойсақ, мынадай,

$$y'(x,\varepsilon,f)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \psi'(x-t)f(t)dt\,,y''(x,\varepsilon,f)=\frac{f(x)}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \psi''(x-t)f(t)dt\ ,$$

$$L_\varepsilon y=f(x)+\int_0^x \psi''(x-t)f(t)dt\ +\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a\psi'(x-t)f(t)dt+\ +\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x b\psi(x-t)f(t)dt\ =$$

$$=\ f(x)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x[\varepsilon\psi''(x-t)+a\psi'(x-t)+b\psi(x-t)]f(t)dt=f(x)_0$$

Лемма 2.

Егер $a>0, b\geq 0$ болса, онда, мына,

$$D(L_\varepsilon)=\{y(x)\in C^2(0,1)\cap C^1[0,1];y(0)=0,y'(0)=0\}$$

жиынның кез келген мүшесі үшін, келесі,

$$||y||\leq\frac{||L_\varepsilon y||}{a\sqrt{2}},(4)$$

$$||y||_1\leq\sqrt{||y||^2+||y'||^2}\leq\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{||L_\varepsilon y||}{a}$$

Салдар 1. Үзіксіз функцңиялардың сызықтық көпсаласында шектеулі кері L_ε^{-1} операторы анықталган, және оны үзіксіздігін сақтай отырып, бүткіл $L^2(0,1)$ – кеңістігіне таратуга болады.

Дәлелі. Егер f=0 болса, онда (4)-дан y=0 екенін көреміз, ягни L_ε операторы $D(L_\varepsilon)$ аймагын өзінің мәндерінің жиынына: $R(L_\varepsilon)=C[0,1]$ бірмәнді сәйкестендіреді. Үзіксіз функцңиялардың сызықтық көпсаласы $L^2(0,1)$ кеңістігінде тыгыз, сондықтан, L_ε^{-1} операторын, (4) теңсіздігінің арқасында, бүткіл $L^2(0,1)$ кеңістігіне үзіксіз етіп таратуга болады.

Салдар 2. Кері L_ε^{-1} операторының қабындысы: $\overline{L_\varepsilon^{-1}}$ операторы әсіре үзіксіз, бұл жай 7 теңсіздік пен Ремихтың теоремасының салдары.

2-лемманың дәлелі. Мына, y(x)∈ $D(L_\varepsilon)$ жатыстықтан, келесі,

$$y(x)=\int_0^x y'(t)dt,\quad |y(x)|\leq|\int_0^x y'(t)dt|$$

$$\leq\int_0^x|y'(t)|dt\leq(\int_0^x 1^2dt)^{\frac{1}{2}}-(\int_0^x |y'|^2dt)^{\frac{1}{2}}\leq\sqrt{1-x}(\int_0^x |\acute{y}|^2dt)^{\frac{1}{2}},$$

теңсіздіктер шыгады.

Демек,

$$|y(x)|^2 \leq (1-x)\int_0^x |\acute{y}|^2 dt\,,\quad ||y(x)||^2 = \int_0^1 |y(x)|^2 dx \leq \int_0^1 \left[(1-x)\int_0^x |\acute{y}|^2 dt\right]dx$$

$$\leq \int_0^1 |\acute{y}|^2 dt \int_0^1 (1-x)dx \leq ||\acute{y}||^2 \int_0^1 x dx \leq ||\acute{y}||^2 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 \leq \frac{||\acute{y}||^2}{2}$$

Мұнан, $||y|| \leq \frac{||\acute{y}||}{\sqrt{2}}$

Әрі қарай, жоғарыдағы (1) теңдеудің екі жағын да y'(x) функцияcына скаляр көбейтеміз, сонда

$$(L_\varepsilon y, y') = \varepsilon(y'', y') + a\,||\acute{y}||^2 \;+\; b(y, y') = (f, y'),$$

$$(y'', y') = \int_0^1 y'', y' dx = \int_0^1 y' dy' = \frac{\acute{y}^2(x)}{2}\Big|_0^1 = \frac{\acute{y}^2(1)}{2} = 0,$$

$$(y, y') = \int_0^1 y, y' dx = \int_0^1 y\, dy = \frac{y^2(x)}{2}\Big|_0^1 = \frac{y^2(1)}{2} \geq 0$$

Демек,

$$(L_\varepsilon y, y') = \varepsilon\frac{\acute{y}^2(1)}{2} + a\,||\acute{y}||^2 + b\frac{y^2(1)}{2} = (f, y')$$

Бұл теңсіздіктен, $\varepsilon > 0, a > 0, b \geq 0$ сәтінде, келесі,

$$a\,||\acute{y}||^2 \leq (f, y') \leq ||f|| \cdot ||\acute{y}||, \Rightarrow a||\acute{y}|| \leq ||f||, ||\acute{y}|| \leq \frac{||f||}{a}$$

теңсіздіктер шығады. Онда

$$||y|| \leq \frac{||\acute{y}||}{\sqrt{2}} \leq \frac{||f||}{a\sqrt{2}} \leq \frac{||L_\varepsilon y||}{a\sqrt{2}},$$

$$||y||_1 = \sqrt{||y||^2 + ||\acute{y}||^2} \leq \sqrt{\frac{||f||^2}{2a^2} + \frac{||f||^2}{a^2}} = \frac{||f||}{a}\sqrt{1+\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{||f||}{a} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{||L_\varepsilon y||}{a}$$

Лемма 3.

Егер $Su(x) = u(1-x)$ және $L_\varepsilon y = \varepsilon y'' + ay'(x) + by(x)$

$$D(L_\varepsilon) = \{y(x) \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1];\ y(0) = 0, y'(0) = 0\};$$

болса, онда SL_ε - операторы$L^2(0,1)$кеңістігінде симметриялы, яғни, мына

$$(\mathrm{SL}_\varepsilon y, z) = (y, \mathrm{SL}_\varepsilon z)$$

теңдігі кез келген $y, z \in D(L_\varepsilon)$ жұбы үшін орынды.

Дәлелі. Мына, $u, v \in D(L_\varepsilon)$ – жатыстықтары орынды делік, онда, келесі,

$$S(L_\varepsilon u\,, v) = (L_\varepsilon u, \delta v) = \varepsilon\int_0^1 u''(x_1 v(1-x)dx + a\int_0^1 u'(x)v(1-x)dx + b\int_0^1 u(x)v(1-x)dx;$$

$$\int_0^1 u''(x)v(1-x)dx = \int_0^1 v(1-x)du'(x) = u'(x)v(1-x)|_0^1 + \int_0^1 v'(1-x)u'(x)dx =$$

$$\int_0^1 v'(1-x)du = v'(1-x)u(x)\,|_0^1 + \int_0^1 u(x)v''(1-x)dx = \int_0^1 u(x)v''(1-x)dx;$$

$$\int_0^1 u'(x)v(1-x)dx = \int_0^1 v(1-x)du = v(1-x)u(x)|_0^1 + \int_0^1 u(x)v'(1-x)dx = \int_0^1 u(x)v'(1-x)dx$$

$$S(L_\varepsilon u\,, v) = (L_\varepsilon u, \delta v) = \int_0^1 u(x)[\varepsilon v''(1-x) + av'(1-x) + bv(1-x)]dx = (u, SL_\varepsilon v),$$

теңдіктер де орынды.

Келесі, 1-теорема, жоғарыда, дәлелденген 1-3 леммалардың тікелей салдары.

Теорема 1. Егер $a > 0, b \geq 0, \varepsilon > 0$ болса, онда $SL_\varepsilon -$ операторының қабынылысы жалқы оператор, кері оператор $\overline{(SL_\varepsilon)}^{-1}$ операторы бар және ол әсіре үзіксіз жалқы, мұндағы $Su(x) = u(1-x)$,

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'' + ay' + by, D(L_\varepsilon) = \{y \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1]; y(0) = 0, y'(0) = 0\}$$

Теорема 2.

Егер $a > 0, b \geq 0, \varepsilon > 0$ болса, онда $\overline{SL_\varepsilon}$ операторының нормаланған меншікті векторлары $L^2(0,1)$ – кеңістігінде ортонормаланған базис құрайды.

Бұл теорема алдыңғы теорема мен Гильберт пен Шмидтің теоремасының, оңай, салдары.

Жалқы $\overline{SL_\varepsilon}$ - операторының меншікті векторлары $\varphi_n(x), n = 1,2, ...$, ал меншікті мәндері λ_n ($n = 1,2, \dots,$) болсын делік, онда, келесі,

$$\overline{SL_\varepsilon}\varphi_n(x) = \lambda_n\varphi_n(x), \qquad \overline{SL_\varepsilon^{-1}}\,\varphi_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n} \quad (n = 1,2, \dots,)$$

теңдіктер орындалады. S- операторымен, келесі,

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'' + ay' + by = f(x), \qquad x \in (0,1]$$

теңдеудің екі жағына да әсер етсек, онда, мынадай,

$$SL_\varepsilon y = Sf, \Longrightarrow y(x,e,f) = (SL_\varepsilon)^{-1}Sf,$$

$$y(x,e,f) = \sum_{n=1}^{\infty}((SL_\varepsilon)^{-1}Sf, \varphi_n) \cdot \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}(Sf, (SL_\varepsilon)^{-1}, \varphi_n)\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(Sf,\varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n(x)$$

теңдіктерге келеміз, мұндағы, $Su(x) = u(1-x)$,яғни

S- дегеніміз $S^2 = I$теңдігін қанағаттандыратын жалқы әрі унитар оператор.

Теорема 3. Егер $a > 0, b \geq 0, \varepsilon > 0$ болса, онда жоғарыдағы Кошидің (1)-(2) есебі $L^2(0,1)$ кеңістігінде әлді шешіледі және бұл әлді шешім, мынадай,

$$y(x,e,f) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(Sf,\varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n(x) \tag{5}$$

болады, мұндағыλ_n ($n = 1,2, \dots,$), дегеніміз SL_ε- операторының меншікті мәндері, ал $\varphi_n(x)$ ($n = 1,2, ...,$) соларға сәйкес меншікті функциялар (векторлар),

$$Su(x) = u(1-x)$$

$$L_\varepsilon y(x) = \varepsilon y''(x) + ay'(x) + by(x), x \in [0,1]; \tag{1}$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0 \tag{2}$$

3. Зерттеу нәтиежелері

Меншікті $\varphi_n(x)$, ($n = 1,2, ...,$) функцңиялардың дифференңиалдық теңдеуі арқылы жоғарыдағы, (5) формуланың Фүре коэффиңенттерін түрлендірейік.

Лемма 4. Егер *g(x)* функцңиясы [0,1] кесіндісі бойында үзіксіз болса, онда Кошидің, мына,

$$\begin{cases} Bz(x) = az'(x) + bz(x) = g(x), x \in (0,1] \\ z(0) = 0 \end{cases},$$

есебінің шешімі келесі,

$$z(x)=B^{-1}g(x)=\int_0^1\frac{\theta(x-t)}{a}e^{-\int_t^x\frac{b}{a}d\xi}g(t)dt \tag{6}$$

функция болады, мұндағы $\theta(x)$ - дегеніміз Хевксайдтың функциясы

$$\theta(x)=\begin{cases}1, x>0;\\0, x<0.\end{cases}$$

Дәлелі: Жогарыдагы, (6) формуланы дифференциалдап, келесі

$$z'(x)=\frac{g(x)}{a}-\frac{b}{a}\int_0^x g(t)e^{-\int_t^x\frac{b}{a}d\xi}dt$$

теңдікті аламыз, мұнан

$$az'(x)+g(x)-b\int_0^x\frac{g(t)}{a}e^{-\int_t^x\frac{b}{a}d\xi}dt=g(x)-bz(x)\Rightarrow az'(x)+bz(x)=g(x),\ z(0)=0,$$

Салдар

$$\int_0^x\left[az'(t)+bz(t)\right]\frac{e^{-\int_t^x\frac{b}{a}d\xi}}{a}dt=z(x)$$

Лемма 5. Мына,

$$Bu=au'(x)+bu(x);\ \ u(0)=0$$

оператордың сыңырласы, келесі,

$$B^{+}v=-av'(x)+bv'(x);\ \ v(1)=0$$

оператор.

Дәлелі.

$$(\mathrm{Bu},\mathrm{v})=\int_0^1[au'(x)+bu(x)]v(x)dx=\int_0^1 av(x)du+\int_0^1 u(x)bv(x)dx=u(x)-av(x)\,|\,\begin{matrix}1\\0\end{matrix}-$$

$$\int_0^1 av'(x)u(x)dx+\int_0^1 u(x)bv(x)dx=v(1)au(1)+\int_0^1 uB^{+}v(x)dx=(u,B^{+}v).$$

Лемма 6. Егер

(а)$Bu= au'(x)+bu(x);\ u(0)=0;$

(б)$B^{+}v= -\ av'(x)+bv(x);\ v(1)=0;$

(в)$Su(x)=u(1-x),$

то имеет место формула

$$\mathrm{SB}=\mathrm{B}^{+}\mathrm{S}$$

Дәлелі.

$$SBu(x)=au'(1-x)+bu(1-x);\ \ u(0)=0$$

Егер u(x)∈ D(B) болса,онда $Su(x)\in \mathrm{D}(B^{+})$ және бұл сәтте

$$\mathrm{B}^{+}Su=-a\frac{d}{dx}\left[Su\right]+\hat{a}Su=au'(1-x)+\mathrm{bu'(1-x)}=S\hat{A}u(x),$$

бізге керегі де осы еді

Теорема 4. Егер, мына,

$$\varepsilon\varphi_n''(x)+a\varphi_n'(x)+в\varphi_n(x)=\lambda_n S\varphi_n(x) \tag{7}$$

$$\varphi_n(0)=0,\ \ \varphi'(0)=0 \tag{8}$$

теңдіктер орындалса,яғни $\lambda_n(n=1,2....)$ сандары (7)-(8)-есептің меншікті мәндері, ал $\varphi_n(x)(n=1,2.....)$ оларға сәйкес меншікті функциялары болса,онда келесі,

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon\varphi_n(1)}{\lambda_n}\varphi_n(x)$$

формула орынды,мұндағы $\psi(x)$ −дегеніміз Кошидің келесі,

$$\varepsilon z''(x)+az'(x)+bz(x)=0,$$

$$\psi(0)=0, \psi'(0)=1$$

есебінің шешімі.

Дәлелі. Теореманың шарты бойынша , келесі ,

$$\varepsilon\psi''(x)+a\psi'(x)+b\psi(x)=0,$$

$$\psi(0)=0,\ \psi'(0)=1$$

теңдіктер орынды. Біз бұларды, басқаша түрде жазайық:

$$\varepsilon\psi''(x)+B\psi(x)=0,$$

мұндағы,

$$B\psi(x)=a\psi'(x)+b\psi(x);\psi(0)=0.$$

Енді, $SB\psi(x)$- функциясының $\{\varphi_n(x)\}$, n=1,2….системасы бойынша Фуре коэффиценттерін табайық ,

$$(SB\psi,\varphi_n)=(SB\psi,\lambda_n B^{-1}S\varphi_n-\varepsilon B^{-1}\varphi_n''=$$

$$\lambda_n(SB\psi,B^{-1}S\varphi_n)-\varepsilon(SB\psi,B^{-1}\varphi_n'')=\lambda_n(S(B^{-1})^{+}SB\psi,\varphi_n)-\varepsilon((B^{-1})^{+}SB\psi,\varphi_n'')=$$

$$\lambda_n(SSB^{-1}B\psi,\varphi_n)-\varepsilon(SB^{-1}B\psi,\varphi_n'')=\lambda_n(\psi,\varphi_n)-\varepsilon(S\psi,\varphi_n'').$$

$$(S\psi,\varphi_n'')=\int_0^1 S\psi d\varphi_n'=S\psi\varphi_n'(x)|_0^1-\int_0^1(S\psi)'d\varphi_n(x)=$$

$$=\psi(1-x)\varphi_n'(x)|_0^1-(S\psi)'\ \ \varphi_n(x)\Big|_0^1+\int_0^1(S\psi)''\varphi_n(x)dx=$$

$$S\psi'(x)\varphi_n(x)|_0^1+\int_0^1(S\psi)''-\varphi_n(x)dx=\psi'(1-x)\varphi_n(x)|_0^1+\int_0^1\ (S\psi)''\varphi_n(x)dx=$$

$$\psi'(0)\varphi_n(1)+\int_0^1(S\psi)''\varphi_n(x)dx=$$

$$=\varphi_n(1)+\int_0^1(S\psi)''\varphi_n(x)dx=\begin{vmatrix}\varepsilon\psi''+B\psi=0,\\ \varepsilon S\psi''=-SB\psi\end{vmatrix}=\varphi_n(1)-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 SB\psi\cdot\varphi_n(x)dx=\varphi_n(1)-\frac{(SB\psi,\varphi_n)}{\varepsilon};$$

Демек,

$$(SB\psi,\varphi_n)=\lambda_n(\psi,\varphi_n)-\varepsilon\cdot\varphi_n(1)+(SB\psi,\varphi_n);$$

сондықтан,

$$(\psi,\varphi_n)=\frac{\varepsilon\varphi_n(1)}{\lambda_n},$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\psi,\varphi_n)-\varphi_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon\varphi_n(1)}{\lambda_n}\varphi_n(x).$$

Енді (5) формуладан, Кошидің (1)-(2) есебінің шешімінің шекқатпарлық таралымын аламыз, бұл үшін оның Фуре коэффициенттерін бөліктеп интеғралдау арқылы түрлендіреміз.

$$(Sf,\varphi_n)=(Sf,\lambda_n B^{-1}S\varphi_n-\varepsilon B^{-1}\varphi_n'')=\lambda_n(Sf,B^{-1}S\varphi_n-\varepsilon(Sf,B^{-1}\varphi_n''))=$$
$$=\lambda_n((B^{-1})^{+}Sf,S\varphi_n)-\varepsilon((B^{-1})^{+}Sf,\varphi_n'')=\lambda_n(SB^{-1}f,S\varphi_n)-\varepsilon(SB^{-1}f,\varphi_n'')=$$
$$=\lambda_n(B^{-1}f,\varphi_n)-\varepsilon(SB^{-1}f,\varphi_n'');$$

Соңғы өрнекті түрлендірейік

$$(SB^{-1}f,\varphi_n'')$$
$$=\int_0^1 SB^{-1}fd\varphi_n'=\varphi_n'(x)SB^{-1}f\,\big|_0^1-\int_0^1(SB^{-1}f)'d\varphi_n=-\varphi_n(x)(SB^{-1}f)'\big|_0^1+\int_0^1\varphi_n(SB^{-1}f)''dx=$$
$$-\varphi_n(1)(SB^{-1}f)'(1)+(S(B^{-1}f)'',\varphi_n);$$

Демек,

$$(Sf,\varphi_n)=\lambda_n(B^{-1}f,\varphi_n)+\varepsilon\varphi_n(1)(SB^{-1}f)'(1)-\varepsilon(S(B^{-1}f)'',\varphi_n);$$

Онда (5)-формуладан, мынадай,

$$y(x,\varepsilon,f)=$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(B^{-1}f,\varphi_n)\varphi_n(x)+(SB^{-1}f)'(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon\varphi_n(1)}{\lambda_n}\varphi_n(x)-\varepsilon y(x,\varepsilon,\frac{d^2}{dx^2}B^{-1}f)=B^{-1}f(x)-S(B^{-1}f)'(1)*\psi(x)-\varepsilon y(x,\varepsilon,\ \frac{d^2}{dx^2}B^{-1}\ f)=$$

$$=B^{-1}f(x)-(B^{-1}f)'(0)\psi(x)-\varepsilon y(x,\varepsilon,\frac{d^2}{dx^2}B^{-1}f),$$

мұндағы

$$B^{-1}f(x)=\int_0^x\frac{f(t)}{a}e^{-\int_t^x\frac{b}{a}d\xi}dt.$$

Жоғарыдағы (1) теңдеудің оң жақтағы бос мүшесін жеткілікті біртеғіс функция деп санап,асимптотикалық таралымның келесі мүшелерін табуға болады.

$$y(x,\varepsilon,\frac{d^2}{dx^2}B^{-1}f)=B^{-1}\frac{d^2}{dx^2}B^{-1}f(x)-(B^{-1}\frac{d^2}{dx^2}B^{-1}f)'(0)\psi(x)-\varepsilon y(x,\varepsilon(\frac{d^2}{dx^2}B^{-1})^2f)$$

$$y(x,\varepsilon,f)=B^{-1}f(x)-(B^{-1}f)'(0)\psi(x)-\varepsilon[B^{-1}\frac{d^2}{dx^2}B^{-1}f(x)-(B^{-1}\frac{d^2}{dx^2}B^{-1}f)'(0)\psi(x)-$$

$$-\varepsilon y(x,\varepsilon(\frac{d^2}{dx^2}B^{-1})^2f)]=B^{-1}f(x)-(B^{-1}f)'(0)\psi(x)-[B^{-1}\frac{d^2}{dx^2}B^{-1}f(x)-(B^{-1}\frac{d^2}{dx^2}B^{-1}f)'(0)\psi(x)]*\varepsilon+$$

$$+\varepsilon^2y(x,\varepsilon(\frac{d^2}{dx^2}B^{-1})^2f)$$

Былай, $D^0=I$, $Df(x)=\frac{d^2}{dx^2}B^{-1}f(x)$ деп, белгілеулер енгізсек, жоғарыдағы формула, мына,

$$y(x,\varepsilon,f)=B^{-1}f(x)-(B^{-1}f)'(0)*\psi(x)-[B^{-1}D(x)-(B^{-1}Df)'(0)*\psi(x)]\varepsilon+$$
$$+\varepsilon^2y(x,\varepsilon,D^2f)=B^{-1}D^0f(x)-(B^{-1}D^0f)'(0)*\psi(x)-[B^{-1}Df(x)-(B^{-1}Df)'(0)*\psi(x)]\varepsilon+$$
$$+\varepsilon^2y(x,\varepsilon,D^2f),$$

түрге енеді.Әрі қарай, математикалық индукцияны қолдануымызға болады

$$y(x,\varepsilon,f)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k[B^{-1}D^k f(x)-(B^{-1}D^k)'(0)*\psi(x)]\varepsilon^k+(-1)^n\varepsilon^n y(x,\varepsilon,D^n f)$$

Алынған нәтижені тұжырымдап қоялық.

Теорема 5. Егер $a>0, b\geq 0, \varepsilon>0$, f(x) $\epsilon C^n[0,1]$ болса, онда Кошидің,келесі,

$$L_\varepsilon y=\varepsilon y''(x)+ay'(x)+by(x)=f(x), \qquad x\in[0,1]\ (2.7.1)$$

$$y(0)=0, y'(0)=0 \qquad (2.7.2)$$

есебінің шешімі,мынадай,

$$y(x,\varepsilon,f)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k[B^{-1}D^k f(x)-(B^{-1}D^k f(x))'(0)*\psi(x)]\varepsilon^k+(-1)^n\varepsilon^n y(x,\varepsilon,D^n f)$$

болады, мұндағы,

$$D^0=I\ ,Df(x)=\frac{d^2}{dx^2}B^{-1}f(x),$$

$$B^{-1}f(x)=\int_0^x\frac{f(t)}{a}e^{-\int_t^x\frac{b}{a}d\xi}dt.$$

$$\psi(x)=\frac{e^{k_2x}-e^{k_1x}}{k_2-k_1},k_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4\varepsilon b}}{2\varepsilon};$$

$$\left|\left|y(x,\varepsilon,D^nf)\right|\right|\leq\frac{||D^nf||}{a\sqrt{2}}.$$

4.Талқысы

Мысал

$$\varepsilon y'(x)+ay(x)=1.\ x\in(0,1]; \qquad (9)$$

$$y(0)=0$$

Бұл есептің шешімі

$$y(x,\varepsilon)=\frac{1-e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}}{a},\text{мұнан} \qquad (10)$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}y(x,\varepsilon)=\begin{cases}0, & x=0\ \text{болған сәтте};\\ \frac{1}{a}, & x\neq0\ \text{болған сәтте}.\end{cases} \qquad (11)$$

Жоғарыдағы (10) функцияның үзіксіз екені айдан анық, бірақ оның шегі (11) үзікті функция, демек жинақталу бірқалыпты емес. Теңдеудің оң жағы $f(x)=1$ өте біртегіс әдемі функция, солай бола тұра, ол бірқалыпты жинақталуды қамтамассыз ете алмады, демек, бірқалыпты жинақталуды қаматамассыз ету үшін теңдеудің оң жағына біртегістіктен басқа қосымша шарттар қою керек сыйақты.

Жоғарыдағы (0.1)-(9) есептің шешімі, мынадай

$$y(x,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x f(t)e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)}dt \qquad (12)$$

болары айдан анық, егер $f(x)\in C[0,1]$, яғни ол [0,1] кесіндісі бойында үзіксіз болса, онда

$$y(x,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x[f(t)-f(0)]e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)}dt+\frac{f(0)}{\varepsilon}\int_0^x e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)}dt,$$

$$\int_0^x e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)}dt = \begin{vmatrix} x-t=s \\ -dt=ds \end{vmatrix} = \int_0^x e^{-\frac{a}{\varepsilon}s}ds =$$

$$= e^{-\frac{a}{\varepsilon}s}\left(-\frac{\varepsilon}{a}\right)\Big|_0^x = \frac{\varepsilon}{a}\left(1-e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}\right),$$

мұнан

$$y(x,\varepsilon) - \frac{f(0)}{a}\left(1-e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x [f(t)-f(0)]\,e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)}dt;$$

Соңғы интеғралды, былай,

$$\left|\int_0^x [f(t)-f(0)]\,e^{-\frac{a}{\varepsilon}t}dt\right| \le \max_{0\le t\le\varepsilon}|f(t)-f(0)| + \int_\varepsilon^x |f(x)-f(0)|e^{-\frac{a}{\varepsilon}t}dt \le$$

$$\le \overline{\max_{0\le t\le\varepsilon}}|f(t)-f(0)| + 2\max_{0\le t\le 1}|f(t)| \times \int_0^x e^{-\frac{a}{\varepsilon}}dt \le$$

$$\le \max_{0\le t\le\varepsilon}|f(t)-f(0)| + 2\|f\|_c \times \frac{\left(1-e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}\right)\varepsilon}{a}$$

бағалауға болады, бірақ бұл баға бөліміндегі ε −ға төтеп бре алмайды. Мұнан шығар қорытынды есеп қарапайым болып көрінгенмен, қалпақпен ұрып алар, есептер қатарына жатпайды.

Еґерде теңдеудің оң жағына қосымша шарт жүктесек, яғни $f(x) \in W_2^1[0,1]$ болса, онда

$$\left\|y(x,\varepsilon) - \frac{f(x)}{a}\right\| \le \frac{\sqrt{\varepsilon}}{a\sqrt{2a}}[f|0| + \|f'\|]$$

боларын көруге болады

Еґерде (12) формулада алмастыру жасасақ ол, мына,

$$y(x,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x f(x-t)e^{-\frac{a}{\varepsilon}t}dt$$

түрге келеді. Енді оң жақтағы интеґралды, $f(x) \in W_2^n[0,1]$, сәтінде бөліктеп интеґралдасақ, онда мынадай,

$$\int_0^x f(x-t)\,e^{-\frac{a}{\varepsilon}t}dt = \cdots = e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}\sum_{k=1}^n (-1)^k f^{(k-1)}(0)\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^k -$$

$$-\sum_{k=1}^n f^{(k-1)}(x)(-1)^k\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^k + (-1)^n\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^n\int_0^x f^{(n)}(x-t)e^{-\frac{a}{\varepsilon}t}dt =$$

$$= \left|t=\frac{x}{\varepsilon}\right| = \sum_{k=1}^n\left[\frac{(-1)^k f^{(k-1)}(0)e^{-at}}{a^k} - \frac{(-1)^k f^{(k-1)}(x)}{a^k}\right]\varepsilon^k +$$

$$+(-1)^n\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^n\int_0^x f^{(n)}(x-t)e^{-\frac{a}{\varepsilon}t}\,dt, =$$

$$= \sum_{k=1}^\infty [r_k(t)+P_k(x)]\,\varepsilon^k + (-1)^n\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^n\int_0^x f^{(n)}(x-t)e^{-\frac{a}{\varepsilon}t}dt;$$

$$\left\|\int_a^x f^{(n)}(x-t)e^{-\frac{a}{\varepsilon}t}\,dt\right\| \le \|f^{(n)}(x-t)\|\left(\int_0^1 e^{-\frac{2a}{\varepsilon}t}dt\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \|f^{(n)}(x)\|\left[\left(\frac{\varepsilon}{-2a}e^{-\frac{2a}{\varepsilon}t}\right)/_0^1\right]^{\frac{1}{2}} \le \|f^{(n)}(x)\| \times \left(\frac{\varepsilon}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}, \rightarrow$$

$$\left\|\int_0^x f^{(n)}(x-t)e^{-\frac{a}{\varepsilon}t}dt\right\| \le \|f^{(n)}(x)\|\left(\frac{\varepsilon}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Біз жогарыда есепті қарабайыр әдістердің бірі арқылы шыгаруга әрекет жасадық, бірақ мұнымыз іске аспады.

Егер $\varepsilon y'(x)+ay(x)=f(x),\ y(0)=0; a-cosnt$болса, онда

$$\frac{\varepsilon}{a}y(x)+\int_0^x y(t)dt=\frac{1}{a}\int_0^x f(t)dt.$$

Енді $\lambda=\frac{\varepsilon}{a}, F(t)=\frac{1}{a}\int_0^x f(t)dt,\ Jy(x)=\int_0^x y(t)dt$болсын, десек, онда

$$(\lambda I+J)y(x)=F(t),\qquad y(x)=R_\lambda F(t)=(J+\lambda I)^{-1}F(t)=$$
$$=\frac{1}{a}(J+\lambda I)^{-1}Jf(t)=\frac{1}{a}\left(J+\frac{\varepsilon}{a}I\right)^{-1}Jf(x).$$

J −интегралдау операторы әсіре үзіксіз операторлар қатарына жатады сондықтан, оның резольвентасы $R_\lambda=(J+\lambda I)^{-1}$операторы да әсіре үзіксіз, ал оның өзі $\lambda=0$ нүктесінен басқа барлық нүктелерде аналитикалық оператор функция, ал $\lambda=0$ нүктесі елеулі (существенная) ерекше нүкте. Сондықтан, жалпы, алганда,

$$\lim_{\lambda>0} y(x,\lambda)=\lim_{\lambda>0}(J+\lambda I)^{-1}F(t)$$

шегі жоқ ,сондықтан, тақырыпты тамам деуге болар еді. Бірақ λ белгілі бір қыйсықтың бойымен,немесе, нүктелермен ұмтылганда ондай шек бар болып ,және ол керек болып тұр. Бұл тақырыптың өміршеңділігі мен өзекшелігі осында болса керек. Келесі,бөлімде біз қолданыста жүрген әдістерге талдау жасаймыз.

5.Қорытынды

Әдісімізді Вишик пен Василеваның шекқатпарлық функция әдісімен сылыстырайық.

$H=L^2(0,1)$ −кеңістігінде Кошидің, мынадай,

$$\varepsilon y'(x)+a(x)y(x)=f(x),\qquad x\in(0,1] \tag{13}$$
$$y(0)=0 \tag{14}$$

Сингуляр әсерленген есебін қарастыралық, мұндагы $a(x)$ пен $f(x)$қажетінше біртегіс функция, ал $\varepsilon>0$ −азшамалы параметр.

Осы (13)-(14) есептің шешімін, мына,

$$y(x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n-1}[\varphi_k(x)+\psi_k(\tau)]\varepsilon^k+\varepsilon^n R_n(x,\tau) \tag{15}$$

түрде іздейік, мұндагы $\tau=\frac{x}{\varepsilon}$ −шабан параметр. Осы өрнекті, жогарыдагы, (13) теңдеуге апарып қоялық, сонда, мынадай,

$$\varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}\left[\varphi_k'(x)+\dot{\psi}_k\times\frac{1}{\varepsilon}\right]\varepsilon^k+\varepsilon^{n+1}R_n'+$$
$$+a(x)\sum_{k=0}^{n-1}[\varphi_k(x)+\psi_k(\tau)]\,\varepsilon^k+\varepsilon^n a(x)R_n(x,\tau)=f(x),$$

теңдік аламыз, мұндагы $(\cdot)$ −жогаргы нүкте арқылы τ −айнымалысы бойынша туынды белгіленген Жақшаларды ашайық;

$$\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^{k+1}\varphi_k'(x)+\sum_{k=0}^{n-1}\dot{\psi}_k(\tau)\times\varepsilon^k+\varepsilon^{n+1}R_n'+$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}[a(x)\varphi_k(x)+a(x)\psi_k(\tau)]\varepsilon^k+$$

$$+\varepsilon^n a(x)R_n(x,\tau) = f(x),$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[\varphi_{k-1}'(x) + \dot{\psi}_k + a(x)\varphi_k(x) + a(x)\psi_k(\tau)\right]\varepsilon^k +$$

$$+\varepsilon^n\left(\varepsilon R_n' + a(x)R_n(x,\tau) + \varphi_{n-1}'\right) + \dot{\psi}_0(\tau) + a(x)\varphi_0(x) + a(x)\psi_0(\tau) = f(x)$$

Мұнан,

$$a(x)\times\varphi_0(x) = f(x), \rightarrow \varphi_0(x) = \frac{f(x)}{a(x)};$$

$$\dot{\psi}_0(\tau) + a(x)\psi_0(\tau) = 0, \qquad \frac{\dot{\psi}_0}{\psi} = -a(x), \int_0^{\tau(x)}\frac{\dot{\psi}_0}{\psi}d\tau = -\int_0^x a(x)d\tau =$$

$$= -\int_0^x d(x)\frac{dx}{\varepsilon};\ l_n\psi_0(\tau)/_0^\tau = -\int_0^x \frac{d(\xi)}{\xi}d\xi,$$

$$l_n\frac{\psi_0(\tau)}{\psi_0(0)} = -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi, \qquad \psi_0(\tau) = \psi_0(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi}, \tau = \frac{x}{\varepsilon}.$$

Әрі қарай,x –қа тәуелді функцияларды бөлек, ал τ –га тәуелді функцияларды бөлек нөлге теңеп, мынадай:

$$\varphi_{k-1}'(x) + a(x)\varphi_k(x) = 0, \rightarrow \varphi_k(x) = -\frac{\varphi_{k-1}'(x)}{a(x)};$$

$$\dot{\psi}_k + a(x)\psi_k(\tau) = 0, \rightarrow \psi_k(\tau) = \psi_k(0)e^{-\frac{1}{\xi}\int_0^x a(\xi)d\xi};$$

теңдіктер аламыз. Енді бастапқы шартқа жүгінеміз:

$$y(x,\varepsilon)/_{x=0} = 0, \rightarrow \varphi_k(0) + \psi_k(0) = 0, R_n(x,\tau)/_{x=0} = 0.$$

Демек, $\psi_k(0) = -\varphi_k(0), \rightarrow$

$$\psi(0) = -\varphi_0(0) = -\frac{f(0)}{a(0)}, \psi_1(0) = -\varphi_1(0) = \frac{\varphi_0'(0)}{a(0)}.$$

Ыңғайлы болу үшін, мынадай,

$$Df(x) = \frac{d}{dx}\frac{f(x)}{a(x)}.\ D^0 = I$$

белгілеулер енгізейік, сонда

$$\varphi_0(x) = \frac{f(x)}{a(x)} = \frac{D^0 f(x)}{a(x)},$$

$$\varphi_1(x) = -\frac{\varphi_0'(x)}{a(x)} = -\frac{1}{a(x)}\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{a(x)} = -\frac{Df(x)}{a(x)},$$

$$\varphi_2(x) = -\frac{\varphi_1'(x)}{a(x)} = \frac{D^2 f(x)}{a(x)}, \ldots, \varphi_k(x) = (-1)^k\frac{D^k f(x)}{a(x)}.$$

Сондықтан,

$$\psi_k(\tau) = -\varphi_k(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi} = -(-1)^k \frac{D^k f(0)}{a(0)} \times e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi}.$$

Қалдық $R_n(x,\tau)$мүшесі үшін, мынадай,

$$R_n^{'} + a(x)R_n + \varphi_{n-1}^{'} = 0,$$

теңдеу аламыз және оған, мынадай,

$$R_n(0_\tau 0) = 0$$

бастапқы шарт тіркеседі, яғни $R_n(x,\tau)$ функциясы, мынадай,

$$R_n^{'} + a(x)R_n = -\varphi_{n-1}^{'}(x) = (-1)^n D^n f(x)$$

$$R_n(x,\tau)/_{x=0} = 0$$

Коши есебінің шешімі. Демек, $R_n(x,\tau) = (-1)^n y(x,\varepsilon,D^n f)$, мұндағы $y(x,\varepsilon,D^n f)$ $-$дегеніміз сол бастапқы (13)-(14) есептің шешімі, оң жағы $(-1)^n D^n f(x)$ болған сәттегі.

Сонымен жоғарыдағы (13)-(14) есептің шешімі бар болса, онда ол, мынадай,

$$y(x,\varepsilon,f) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[\frac{D^k f(x)}{a(x)} - \frac{D^k f(0)}{a(0)}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi}\right]\varepsilon^k +$$

$$+\varepsilon^n(-1)^n y(x,\varepsilon,D^n f)$$

болады.

Әдістің әлсіз тұстары:

1) Жоғарыдағы (13)-(14) есептің бар жоқтығы туралы ләм-лим деп ауыз ашпайды
2) Неліктен шешімді (ол бар болған сәтте) (15) түрінде іздеуіміз керек?
3) Есептеу барысында, мынадай,

$$\varphi_{k-1}^{'}(x) + a(x)\varphi_k(x) + \dot{\psi}_k(\tau) + a(x)\psi_k(\tau) = 0$$

бір теңдеуден, мынадай,

$$\varphi_{k-1}^{'}(x) + a(x)\varphi_k(x) = 0, \qquad \dot{\psi}_k(\tau) + a(x)\psi_k(\tau) = 0$$

екі теңдеуге көшеді,шын мәнінде τ шамасы x $-$қа тәуелді $\left(\tau = \frac{x}{\varepsilon}\right)$ сондықтан бұл әрекетте негізсіздіктің ізі айқын байқалады.

4) Ең сорақысы, қалдық $R_n(x,\tau)$ мүшені қалай бағалау туралы ешнәрсе айтылмайды.

Қолданбалы математикада, мұндай әдістер көптеп кездеседі, олар қосымша мәліметті практикадан немесе, эксперименттен көріп тұрады, сондықтан олар үшін нәтиежеге тез қол жеткізу маңызды, басқасын кейін көре жатармыз дейді-де, сол деймен қалып қояды.

Біздің әдісіміздің көш ілгері екені айдан анық.

ӘДЕБИЕТ

[1] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимтотические методы в теорий сингулярных возмущений.-М.: Высш. шк. 1990.-200с.
[2] Вишик М.И., Люстерник А.А. Регулярное вырождение и погранслойный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук, 1957. №5. с.3-122.
[3] Ахиезер Н.Н., Глазман Н.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.-М.:Наука ,1966.,-544с.
[4] A. N. Tikhonov, Mat. Sbornik 27, 147-156 (1950), (in Russian).
[5] M. I. Imanaliev, Asymptotical Methods in the Theory of Singulary Perturbed Integro-Differential Systems, Ilim, Bishkek,
[6] Lomov S., Introduction to the General Theory of Singular Perturbations, American Mathematical Society, Providence, RI,1992.
[7] V. Butuzov, Comput. Math. Math. Phys. 12, 14-34 (1972).
[8] Vasil’eva A., and Tupchiev V., Soviet Math. Dokl. 9, 179-183 (1968).

[9] Trenogin V., Russian Math. Surveys 25, 119-156 (1970).
[10] T. Sh. Kal'menov, S. T. Akhmetova, and A. Sh. Shaldanbaev, Mat. Zh. Almaty 4, 41–48 (2004), (in Russian).
[11] T. Sh. Kal'menov, and U. A. Iskakova, Doklady Mathematics 45, 1460-1466 (2009).
[12] T. Sh. Kal'menov, and A. Sh. Shaldanbaev, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18, 352–369 (2010).
[13] A. Kopzhassarova, and A.Sarsenbi, Abstract and Applied Analysis 2012, 1-6 (2012), (Article ID 576843).
[14] Orazov I., Shaldanbaev A,Sh,Shomanbayeva M.About the nature of the spectrum of the periodic problemn for the heat equation with a deviating argument.// Abstract and Applied Analysis. Volume 2013(2013).Article ID 128363,6 pages htt://dx.doi.org/10.1155/2013/128363.
[15] A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, Isabek 0razov,Solution of a singularly perturbed Cauchy problem using amethod of a deviating argument, AIP Conference Proceedings 1676, 020072 (2015); doi: 10.1063/1.4930498
[16] A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, and Asylzat Kopzhassarova,
Solution of a singularly perturbed Cauchy problem for linear systems of ordinary differential equations by the method of spectral decomposition, AIP Conference Proceedings 1759, 020090 (2016); doi: 10.1063/1.4959704.
[17] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1-2. – М.: Мир, 1977.

REFERENCES

[1] Vasilyeva A. B., Butuzov of V. F. Asimtoticheskiye methods in theories of singular indignations. - M.: Vyssh. шк. 1990. - 200 pages.
[2] Vishik M. I., Lyusternik A. A. Regular degeneration and a frontier layer layer for the linear differential equations with small parameter//Achievements of mathematical sciences, 1957. No. 5. page 3-122.
[3] Akhiyezer N. N., Glazman N. M. The theory of linear operators in Hilbert space. - M of a.:nauk, 1966.,-544s.
[4] Tikhonov A. N., Mat. Sbornik 27, 147-156 (1950), (in Russian).
[5] Imanaliev M. I., Asymptotical Methods in the Theory of Singulary Perturbed Integro-Differential Systems, Ilim, Bishkek,
[6] Lomov S., Introduction to the General Theory of Singular Perturbations, American Mathematical Society, Providence, RI,1992.
[7] V. Butuzov, Comput. Math. Math. Phys. 12, 14-34 (1972).
[8] A. Vasil'eva, and V. Tupchiev, Soviet Math. Dokl. 9, 179-183 (1968).
[9] V. Trenogin, Russian Math. Surveys 25, 119-156 (1970).
[10] T. Sh. Kal'menov, S. T. Akhmetova, and A. Sh. Shaldanbaev, Mat. Zh. Almaty 4, 41–48 (2004), (in Russian).
[11] T. Sh. Kal'menov, and U. A. Iskakova, Doklady Mathematics 45, 1460-1466 (2009).
[12] T. Sh. Kal'menov, and A. Sh. Shaldanbaev, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18, 352–369 (2010).
[13] Kopzhassarova A., and Sarsenbi A., Abstract and Applied Analysis 2012, 1-6 (2012), (Article ID 576843).
[14] Orazov I., Shaldanbaev A,Sh,Shomanbayeva M.About the nature of the spectrum of the periodic problemn for the heat equation with a deviating argument.// Abstract and Applied Analysis. Volume 2013(2013).Article ID 128363,6 pages htt://dx.doi.org/10.1155/2013/128363.
[15] A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, Isabek 0razov,Solution of a singularly perturbed Cauchy problem using amethod of a deviating argument, AIP Conference Proceedings 1676, 020072 (2015); doi: 10.1063/1.4930498
[16] A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, and Asylzat Kopzhassarova,
Solution of a singularly perturbed Cauchy problem for linear systems of ordinary differential equations by the method of spectral decomposition, AIP Conference Proceedings 1759, 020090 (2016); doi: 10.1063/1.4959704.
[17] Read M., Simon B. Methods of modern mathematical physics. T.1-2. – M.: World, 1977.

УДК 517.94

К.Ж. Рустемова[1], А.Ш. Шалданбаев[1], М.И. Ақылбаев[2]

[1]Южно-Казахстанский государственный университет, г.Шымкент
[2]Казахстанский инженерно-педагогический университет Дружбы народов, г.Шымкент

РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ,ДЛЯОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ,МЕТОДОМ ОТКЛОНЯЮЩЕГОСЯ АРГУМЕНТА

Аннотация. В данной работе получено спектральное разложение решении задачи Коши обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в простанстве с индефинитной метрикой,и с помощью этого разложения выведено погранслойное разложение решении сингулярно возмущенной задачи Коши, для уравнениявторого порядка

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x),\ \ y(0) = 0, y'(0) = 0,$$
$$x \in [0,1];$$

Ключевые слова: самосопряженный оператор, вполне непрерывный оператор, теорема Гилберта –Шмидта, вольтеровые операторы, индефинитная метрика, разложение Шмидта, полнота, ортонормированный базис.