N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 6, Number 310 (2016), 65 – 71

S.S. Baizhanov[1], B.Sh. Kulpeshov[2]

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan, e-mail: sayan-5252@mail.ru;
[2]International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: b.kulpeshov@iitu.kz

INVARIANT PROPERTIES AT EXPANDING MODELS OF QUITE O-MINIMAL THEORIES

Abstract. The present work concerns the notion of weak o-minimality originally studied by D. Macpherson, D. Marker and C. Steinhorn. If M is weakly o-minimal structure and $A\subseteq M$, we say that two non-algebraic 1-types p and q over A are weakly orthogonal if $p(x)\cup q(y)$ has a unique extension to a complete 2-type over A, and we say that p and q are quite orthogonal if there is an A-definable bijection between the sets of realizations of these types. We say that a weakly o-minimal theory is quite o-minimal if the notions of weak and quite orthogonality coincide. Here the properties being invariant regarding to expanding a model of a countably categorical quite o-minimal theory by a convex unary predicate are studied. It is proved that such properties as quite o-minimality, countable categoricity and convexity rank are invariant.

Keywords: weak o-minimality, quite o-minimality, countable categoricity, expansion of a model, convexity rank.

УДК 510.67

С.С. Байжанов[1], Б.Ш. Кулпешов[2]

[1]Институт математики и математического моедлирования, Алматы, e-mail: sayan-5225@mail.ru;
[2]Международный университет информационных технологий, Алматы, e-mail: b.kulpeshov@iitu.kz

ИНВАРИАНТНЫЕ СВОЙСТВА ПРИ ОБОГАЩЕНИЯХ МОДЕЛЕЙ ВПОЛНЕ О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ

Аннотация. В настоящей работе исследуются свойства, являющиеся инвариантными относительно обогащения модели счетно категоричной вполне о-минимальной теории посредством выпуклого унарного предиката. Доказано, что такими свойствами являются вполне о-минимальность, счетная категоричность и ранг выпуклости.

Ключевые слова: слабая о-минимальность, вполне о-минимальность, счетная категоричность, обогащение модели, ранг выпуклости.

Пусть L — счетный язык первого порядка. Всюду в данной статье мы рассматриваем L-структуры и предполагаем что L содержит символ бинарного отношения $<$, который интерпретируется как линейный порядок в этих структурах. Настоящая работа касается понятия *слабой о-минимальности*, первоначально глубоко исследованного в [1]. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a,b\in A$ и $c\in M$ всякий раз когда $a<c<b$ мы имеем $c\in A$. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M=\langle M,=,<,\ldots\rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M. Вспомним что такая структура M называется *о-минимальной*, если каждое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа интервалов и точек в M. Таким образом, слабая о-минимальность является обобщением о-минимальности. Вещественно замкнутые поля с собственным выпуклым кольцом нормирования обеспечивают важный пример слабо о-минимальных (не о-минимальных) структур.

Пусть A,B — произвольные подмножества линейно упорядоченной структуры M. Тогда выражение $A<B$ означает, что $a<b$ всякий раз когда $a\in A$ и $b\in B$. Выражение $A<b$ (соответственно $b<A$) означает, что $A<\{b\}$ ($\{b\}<A$). Для произвольного типа p мы обозначаем через $p(M)$ множество реализаций типа p в M. Теория T является *бинарной*, если любая формула теории T эквивалентна в T булевой комбинации формул самое большее от двух свободных переменных.

Определение 1. [2] Пусть T — слабо о-минимальная теория, M — достаточно насыщенная модель теории T, и пусть $\phi(x)$ — произвольная M-определимая формула с одной свободной переменной. *Ранг выпуклости формулы* $\phi(x)$ $(RC(\phi(x)))$ определяется следующим образом:

1) $RC(\phi(x))\geq 1$, если $\phi(M)$ бесконечно.

2) $RC(\phi(x))\geq \alpha+1$, если существуют параметрически определимое отношение эквивалентности $E(x,y)$ и бесконечная последовательность элементов $b_i, i\in\omega$, такие, что:

• Для любых $i,j\in\omega$, всякий раз когда $i\neq j$ мы имеем $M \quad \neg E(b_i,b_j)$

• Для каждого $i\in\omega$ $RC(E(x,b_i))\geq\alpha$ и $E(M,b_i)$ - выпуклое подмножество множества $\phi(M)$

3) $RC(\phi(x))\geq\delta$, если $RC(\phi(x))\geq\alpha$ для всех $\alpha<\delta$ (δ предельный).

Если $RC(\phi(x))=\alpha$ для некоторого α, то мы говорим что $RC(\phi(x))$ определяется. В противном случае (т.е. если $RC(\phi(x))\ \geq\ \alpha$ для всех α), мы полагаем $RC(\phi(x))=\infty$.

Рангом выпуклости 1-типа p $(RC(p))$ будем называть инфимум множества $\{RC(\phi(x))\mid\phi(x)\in p\}$, т.е. $RC(p):=\inf\{RC(\phi(x))\mid\phi(x)\in p\}$.

В следующих определениях M — слабо о-минимальная структура, $A,B\subseteq M$, M — $|A|^+$-насыщенна, $p,q\in S_1(A)$ — неалгебраические.

Определение 2. [3] Будем говорить что тип p не является *слабо ортогональным* типу q ($p\not\perp^w q$), если существуют A-определимая формула $H(x,y)$, $\alpha\in p(M)$ и $\beta_1,\beta_2\in q(M)$ такие что $\beta_1\in H(M,\alpha)$ и $\beta_2\notin H(M,\alpha)$.

Лемма 3. [3] Отношение не слабой ортогональности $\not\perp^w$ является отношением эквивалентности на $S_1(A)$.

Определение 4. [4] Будем говорить что тип p не является *вполне ортогональным* типу q ($p\not\perp^q q$), если существует A-определимая биекция $f:p(M)\to q(M)$. Будем говорить что слабо о-минимальная теория является *вполне о-минимальной*, если понятия слабой и вполне ортогональности 1-типов совпадают.

Очевидно что любая о-минимальная теория является вполне о-минимальной, поскольку в случае не слабой ортогональности 1-типов над произвольным множеством A существует A-определимая строго монотонная биекция между множествами реализаций этих типов.

Пример 5. [1] Пусть $M=\langle M;<,P_1^1,P_2^1,f^1\rangle$ — линейно упорядоченная структура такая, что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2, при этом $P_1(M)<P_2(M)$. Мы отождествляем интерпретацию P_2 с множеством рациональных чисел Q, упорядоченном как обычно, а P_1 с $\mathrm{Q}\times\mathrm{Q}$, упорядоченном лексикографически. Символ f интерпретируется частичной унарной функцией с $\mathrm{D}om(f)=P_1(M)$ и $\mathrm{R}ange(f)=P_2(M)$ определяется равенством $f((n,m))=n$ для всех $(n,m)\in\mathrm{Q}\times\mathrm{Q}$.

Может быть доказано, что $Th(M)$ — слабо о-минимальная теория. Пусть $p(x):=\{P_1\}$, $q(x):=\{P_2\}$. Очевидно что $p,q\in S_1(\varnothing)$, $p \not\perp^w q$, но $p\perp^q q$, т.е. $Th(M)$ не является вполне о-минимальной. Заметим также, что $RC(p)=2, RC(q)=1$.

Пример 6. Пусть $M:=\langle M,<,P_1^1,P_2^1,E_1^2,E_2^2,f^1\rangle$ — линейно упорядоченная структура, так что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2, при этом $P_1(M)<P_2(M)$. Мы отождествляем интерпретации P_1 и P_2 с $\mathsf{Q}\times\mathsf{Q}$, упорядоченной лексикографически. Интерпретации бинарных предикатов $E_1(x,y)$ и $E_2(x,y)$ — это отношения эквивалентности на $P_1(M)$ и $P_2(M)$ соответственно такие, что для всех $x=(n_1,m_1), y=(n_2,m_2)\in\mathsf{Q}\times\mathsf{Q}$,

$$E_i(x,y)\Leftrightarrow n_1=n_2, \text{ где } i=1, 2.$$

Символ f интерпретируется частичной унарной функцией с $\mathrm{D}om(f)=P_1(M)$ и $\mathrm{R}ange(f)=P_2(M)$ и определяется посредством $f((n,m))=(n,-m)$ для всех $(n,m)\in\mathsf{Q}\times\mathsf{Q}$.

Можно понять, что $E_1(x,y)$ и $E_2(x,y)$ — $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности, разбивающие $P_1(M)$ и $P_2(M)$ соответственно на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Утверждаем, что f является строго убывающей на каждом $E_1(a,M)$, где $a\in P_1(M)$, и f — строго возрастающая на $P_1(M)/E_1$. Может быть доказано, что $\mathrm{T}h(M)$ — вполне о-минимальная теория. Теория $\mathrm{T}h(M)$ не является о-минимальной, поскольку $E_1(a,M)$ определяет выпуклое множество, не являющееся интервалом в M. Заметим также, что $RC(P_1(x))=RC(P_2(x))=2$.

Вполне о-минимальные теории являются подклассом класса слабо о-минимальных теорий, наследующим многие свойства о-минимальных теорий. Так, в работе [5] были полностью описаны счетно категоричные вполне о-минимальные теории. Это описание влечет их бинарность (аналогичный результат верен для счетно категоричных о-минимальных теорий).

Теорема 7. [5], [6] Пусть T — счетно категоричная вполне о-минимальная теория, $M\models\mathrm{T}$, $|M|=\aleph_0$. Тогда

(i) существует конечное множество $C=\{c_0,\ldots,c_n\}\subseteq M(M\cup\{-\infty,+\infty\}$, если M не имеет первого или последнего элементов), состоящее из всех $\varnothing$–определимых элементов в M (с возможными исключениями для $-\infty$, $+\infty$), такое что M $c_i<c_j$ для всех $i<j\le n$ и для каждого $j\in\{1,\ldots,n\}$ либо M $\neg(\exists x)c_{j-1}<x<c_j$ либо $I_j=\{x\in M: M \;\; c_{j-1}<x<c_j\}$ является плотным линейным порядком без концевых точек и существуют $k_j\in\omega$ и $p_1^j,\ldots,p_{k_j}^j\in S_1(\varnothing)$ так что $I_j=\bigcup_{s=1}^{k_j}p_s^j(M)$;

(ii) для каждого неалгебраического $p\in S_1(\varnothing)$ существует $n_p\in\omega$ такой, что $RC(p)=n_p$, т.е. существуют $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности $E_1^p(x,y)$, $E_2^p(x,y)$, $\ldots$, $E_{n_p-1}^p(x,y)$ такие, что

- $E_{n_p-1}^p$ разбивает $p(M)$ на бесконечное число $E_{n_p-1}^p$-классов, каждый $E_{n_p-1}^p$-класс выпуклый и открытый, так что индуцированный порядок на классах является плотным линейным порядком без концевых точек

• для каждого $i \in \{1,\dots,n_p-2\}$ E_i^p разбивает каждый E_{i+1}^p-класс на бесконечное число E_i^p-классов, каждый E_i^p-класс выпуклый и открытый, так что E_i^p-подклассы каждого E_{i+1}^p-класса плотно упорядочены без концевых точек

(iii) существует отношение эквивалентности $\varepsilon \subseteq (\{s : 1 \le s \le k\})^2$, где $\{p_s \mid s \le k < \omega\}$ есть произвольное перечисление всех неалгебраических 1-типов над $\varnothing$, такое что для каждого $(i,j) \in \varepsilon$ существует единственная $\varnothing$–определимая локально монотонная биекция $f_{i,j} : p_i(M) \to p_j(M)$ так что $RC(p_i) = RC(p_j)$, $f_{i,i} = id_{p_i(M)}$ и $f_{j,l} \circ f_{i,j} = f_{i,l}$ для всех $(i,j),(j,l) \in \varepsilon$

так что T допускает элиминацию кванторов до языка

$$\{=,<\} \bigcup \{c_i : i \le n\} \bigcup \{U_s(x) : s \le k\} \bigcup \{E_l^{p_s}(x,y) : s \le k, l \le n_{p_s}\} \bigcup \{f_{i,j} : (i,j) \in \varepsilon\},$$

где $U_s(x)$ изолирует тип p_s для каждого $s \le k$.

Более того, любому упорядочению с выделенными элементами как в (i)-(ii) и любым подходящим отношением эквивалентности ε как в (iii), соответствует счетно категоричная вполне о-минимальная теория как выше.

В настоящей работе исследуются свойства, сохраняющиеся при обогащениях моделей счетно категоричной вполне о-минимальной теории посредством выпуклого унарного предиката. Установлено, что свойствами, сохраняющимися при таких обогащениях, являются вполне о-минимальность, счетная категоричность и ранг выпуклости.

Пусть $M := \langle M, \Sigma \rangle$ — счетно категоричная слабо о-минимальная структура. Обогатим структуру $M := \langle M, \Sigma \rangle$ до структуры $M' := \langle M, \Sigma, U^1 \rangle$ посредством добавления в сигнатуру нового унарного предиката $U(x)$, выделяющего выпуклое множество в M. Согласно основному результату из [3] $T' := Th(M')$ остается слабо о-минимальной теорией. Заметим, что обогащение унарным предикатом $U(x)$, выделяющим конечное число (скажем, m) выпуклых множеств в M, равносильно обогащению m унарными предикатами $U_i(x)$, $1 \le i \le m$, выделяющими выпуклые множества в M (поскольку, очевидно, каждое такое выпуклое множество является $\varnothing$-определимым). Так как M — счетно категорична, то существует лишь конечное число неалгебраических 1-типов над $\varnothing$ $p_1, p_2, \dots, p_s$. Пусть для определенности $p_1(M) < p_2(M) < \dots < p_s(M)$. Предположим, что $U(M) \cap p_i(M) \ne \varnothing$ для каждого $1 \le i \le 3$, $p_2(M) \subset U(M)$, существуют $a_1, a_2 \in p_1(M)$, $b_1, b_2 \in p_3(M)$ такие, что

$$M' \models a_1 < a_2 \wedge \neg U(a_1) \wedge U(a_2) \wedge b_1 < b_2 \wedge U(b_1) \wedge \neg U(b_2)$$

Тогда введение предиката $U(x)$ равносильно введению двух выпуклых предикатов $U_1(x)$ и $U_2(x)$, где $U_1(x) := P_1(x) \wedge \neg U(x)$ и $U_2(x) := P_3(x) \wedge U(x)$. Поэтому далее рассматриваем предикат $U(x)$ такой, что для некоторого неалгебраического 1-типа $p \in S_1(\varnothing)$ $U(M) \subset p(M)$, $U(M)^- = p(M)^-$, т.е существует $a \in p(M)$ такой, что $U(M) < a$.

Если правая граница предиката $U(x)$ определяется некоторым элементом $b \in M$, то обогащение предикатом $U(x)$ равносильно обогащению структуры M одной константой. Понятно, что в этом случае T' остается счетно категоричной. Поэтому далее рассматриваем случай, когда правая граница предиката $U(x)$ определяет иррациональное сечение в M.

Пусть $E(x,y)$ — $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Будем говорить, что $U(x)$ является *иррациональным относительно* E*-классов*, если выполняются следующие два условия:

(1) для каждого $a \in p(M)$ с условием $U(a)$ существует $b \in p(M)$ такой, что

$$M' \models a < b \wedge \neg E(a,b) \wedge U(b);$$

(2) для каждого $c \in p(M)$ с условием $\neg U(c)$ существует $d \in p(M)$ такой, что

$$M' \models d < c \wedge \neg E(c,d) \wedge \neg U(d).$$

Пример 8. Пусть $M := \langle \mathrm{Q}, <, U^1 \rangle$ — линейно упорядоченная структура, где $U(x)$ — унарный предикат, выделяющий в M следующее выпуклое множество:

$$U(M) := \{b \in \mathrm{Q} \mid b < \sqrt{2}\}.$$

Заменим каждую точку $a \in M$ копией множества рациональных чисел Q и определим новое бинарное отношение $E(x,y)$ следующим образом: для любых $a_1 = (m_1, n_1), a_2 = (m_2, n_2) \in \mathrm{Q} \times \mathrm{Q}$ $E(a_1, a_2) \Leftrightarrow m_1 = m_2$.

В результате получим структуру $M' := \langle \mathrm{Q} \times \mathrm{Q}, <, U^1, E^2 \rangle$. Отношение $E(x,y)$ является отношением эквивалентности, разбивающим M' на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что индуцированный порядок на E-классах является плотным порядком без концевых точек.

Может быть доказано, что M' — счетно категоричная слабо о-минимальная структура. Нетрудно понять, что предикат $U(x)$ является иррациональным относительно E-классов.

Будем говорить, что $U(x)$ является *квазирациональным вправо (влево) относительно E-классов*, если существует E-класс $E(a,M)$ для некоторого $a \in p(M)$ такой, что $U(M)^+ = E(a,M)^+$ ($U(M) = p(M) \cap E(a,M)^-$).

Будем далее предполагать, что T — счетно категоричная вполне о-минимальная теория, $M \models T$, $p \in S_1(\varnothing)$ — неалгебраический, M' — обогащение модели M унарным предикатом $U(x)$ таким, что $U(M) \subset p(M)$ и $U(M)^- = p(M)^-$.

Лемма 9. Пусть $RC(p) = n$. Тогда множество реализаций $p(M)$ делится предикатом $U(x)$ на s выпуклых $\varnothing$-определимых множеств, являющихся 1-неразличимыми над $\varnothing$, где $2 \le s \le 2n$.

Доказательство Леммы 9. В силу счетной категоричности теории T тип p является изолированным, откуда существует $\varnothing$-определимая формула $P(x)$, изолирующая тип p. Поскольку $RC(p) = n$, то существуют $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности $E_1(x,y), E_2(x,y), \ldots, E_{n-1}(x,y)$, разбивающие $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что

$$E_1(a,M) \subset E_2(a,M) \subset \ldots \subset E_{n-1}(a,M)$$

для некоторого (любого) $a \in p(M)$. В силу Теоремы 7 тип p определяется только этими отношениями эквивалентности. Следовательно, достаточно исследовать взаимное расположение E_i-классов для $1 \le i \le n-1$ и предиката $U(x)$.

Введем следующие формулы:

$$E_0(x,y) := x = y, \quad E_n(x,y) := P(x) \wedge P(y)$$

$$\theta_i(y) := \exists z_1 \exists z_2 [E_i(y,z_1) \wedge E_i(z_1,z_2) \wedge U(z_1) \wedge \neg U(z_2)], \quad 1 \le i \le n-1$$

$$R_i(y) := \exists z [E_{i+1}(y,z) \wedge \neg E_i(y,z) \wedge y < z \wedge U(y) \wedge \neg U(z) \wedge \forall t_1 (E_i(y,t_1) \rightarrow U(t_1)) \wedge$$

$$\wedge \forall t_2 (y < t_2 < z \wedge \neg E_i(y,t_2) \rightarrow \neg U(t_2))], \quad 1 \le i \le n-1$$

$$L_i(y):=\exists z[E_{i+1}(y,z)\wedge\neg E_i(y,z)\wedge y>z\wedge\neg U(y)\wedge U(z)\wedge\forall t_1(E_i(y,t_1)\rightarrow\neg U(t_1))\wedge$$

$$\wedge\forall t_2(z<t_2<y\wedge\neg E_i(y,t_2)\rightarrow U(t_2))],\quad 1\le i\le n-1$$

Случай 1. $U(x)$ является иррациональным относительно E_{n-1}-классов.

В этом случае $\theta_i(M)=\varnothing$ для каждого $1\le i\le n-1$ и $P(x)$ делится на две выпуклые формулы: $P(x)\wedge U(x)$ и $P(x)\wedge\neg U(x)$.

Случай 2. $U(x)$ делит E_i-класс для некоторого $1\le i\le n-1$ и является иррациональным относительно E_{i-1}-классов.

Тогда $P(x)$ делится на $2(n-i+1)$ формул:

$$U_j^l(x):=P(x)\wedge\forall y[\theta_i(y)\rightarrow x<y\wedge\neg E_{n-j+1}(x,y)\wedge E_{n-j+2}(x,y)],\quad 2\le j\le n-i+1$$

$$U_1^l(x):=P(x)\wedge\forall y[\theta_i(y)\rightarrow E_i(x,y)\wedge U(x)]$$

$$U_1^r(x):=P(x)\wedge\forall y[\theta_i(y)\rightarrow E_i(x,y)\wedge\neg U(x)]$$

$$U_j^r(x):=P(x)\wedge\forall y[\theta_i(y)\rightarrow x>y\wedge\neg E_{n-j+1}(x,y)\wedge E_{n-j+2}(x,y)],\quad 2\le j\le n-i+1$$

Случай 3. $U(x)$ делит E_i-класс для некоторого $2\le i\le n$ и является квазирациональным вправо относительно E_{i-1}-классов.

Тогда $P(x)$ делится на $2(n-i)+3$ формул:

$$U_j^l(x):=P(x)\wedge\forall y[\theta_i(y)\rightarrow x<y\wedge\neg E_{n-j}(x,y)\wedge E_{n-j+1}(x,y)],\quad 2\le j\le n-i+1$$

$$U_1^l(x):=P(x)\wedge\forall y[R_{i-1}(y)\rightarrow x<y\wedge E_i(x,y)]$$

$$U_0^l(x):=P(x)\wedge R_{i-1}(x)$$

$$U_1^r(x):=P(x)\wedge\forall y[R_{i-1}(y)\rightarrow x>y\wedge E_i(x,y)]$$

$$U_j^r(x):=P(x)\wedge\forall y[\theta_i(y)\rightarrow x>y\wedge\neg E_{n-j}(x,y)\wedge E_{n-j+1}(x,y)],\quad 2\le j\le n-i+1$$

Случай 4. $U(x)$ делит E_i-класс для некоторого $2\le i\le n$ и является квазирациональным влево относительно E_{i-1}-классов.

Тогда $P(x)$ также делится на $2(n-i)+3$ формул: $U_j^l(x)$ и $U_j^r(x)$ для каждого $2\le j\le n-i+1$ такие же как в Случае 3.

$$U_1^l(x):=P(x)\wedge\forall y[L_{i-1}(y)\rightarrow x<y\wedge E_i(x,y)]$$

$$U_0^l(x):=P(x)\wedge L_{i-1}(x)$$

$$U_1^r(x):=P(x)\wedge\forall y[L_{i-1}(y)\rightarrow x>y\wedge E_i(x,y)]$$

Лемма 10. Пусть $p,q\in S_1(\varnothing)$ — неалгебраические, $p\not\perp^w q$. Тогда $p(M)$ разбивается на s выпуклых $\varnothing$-определимых множеств $\Leftrightarrow$ $q(M)$ разбивается на s выпуклых $\varnothing$-определимых множеств.

Доказательство Леммы 10. Поскольку $p \not\perp^w q$, то $RC(p) = RC(q)$ и существует $\varnothing$-определимая функция $f : p(M) \to q(M)$, являющаяся локально монотонной биекцией. Пусть $P(x)$ — $\varnothing$-определимая формула, изолирующая тип p. Предположим, что $P(x)$ делится на s выпуклых $\varnothing$-определимых формул $U_1(x),\ldots,U_s(x)$, выделяющих в $p(M)$ 1-неразличимые над $\varnothing$ множества. Рассмотрим следующие формулы:

$$S_i(x) := \exists y[U_i(y) \wedge f(y) = x], \quad 1 \le i \le s$$

Очевидно, что поскольку $U_i(M) \cap U_j(M) = \varnothing$ для всех $1 \le i, j \le s$ с условием $i \ne j$, то $S_i(M) \cap S_j(M) = \varnothing$. В силу неразличимости $U_i(M)$ над $\varnothing$ таким же будет и $S_i(M)$ для любого $1 \le i \le s$.

Пусть $p_i := \{U_i(x)\}, q_i := \{S_i(x)\}$ для каждого $1 \le i \le s$. Тогда нетрудно понять, что $p_i \not\perp^w q_i$, $RC(p_i) = RC(q_i)$ и $f : p_i(M') \to q_i(M')$ — $\varnothing$-определимая биекция.

Таким образом, установлена следующая:

Теорема 11. Пусть M — модель счетно категоричной вполне о-минимальной теории, M' — обогащение модели M произвольным конечным семейством выпуклых унарных предикатов. Тогда M' — модель счетно категоричной вполне о-минимальной теории того же ранга выпуклости.

В заключение отметим, что данные исследования поддержаны грантом КН МОН РК № 0830/ГФ4 по теме «Классификационные вопросы генерических и упорядоченных структур, а также их элементарных теорий» в рамках приоритета «Интеллектуальный потенциал страны».

ЛИТЕРАТУРА

[1] H.D. Macpherson, D. Marker, and C. Steinhorn, Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of The American Mathematical Society, 352 (2000), pp. 5435–5483.

[2] B.Sh. Kulpeshov, Weakly o-minimal structures and some of their properties // The Journal of Symbolic Logic, 63 (1998), pp. 1511–1528.

[3] B.S. Baizhanov, Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic, 66 (2001), pp. 1382–1414.

[4] Б.Ш. Кулпешов, Ранг выпуклости и ортогональность в слабо о-минимальных теориях // Известия НАН РК, серия физико-математическая, 227 (2003), С. 26–31.

[5] Б.Ш. Кулпешов, Счетно-категоричные вполне о-минимальные теории // Вестник НГУ, серия: математика, механика, информатика, 11:1 (2011), С. 45–57.

[6] B.Sh. Kulpeshov, Countably categorical quite o-minimal theories // Journal of Mathematical Sciences, 188:4 (2013), pp. 387–397.

С.С. Байжанов[1], Б.Ш. Кулпешов[2]

[1]Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан;
[2]Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, Алматы, Қазақстан,

ӘБДЕН О-МИНИМАЛДЫҚ ТЕОРИЯЛАРДЫҢ МОДЕЛЬДЕРІН БАЙЫТУДА ИНВАРИАНТТЫҚ ҚАСИЕТТЕРІ

Аннотация. Осы жұмыста дөңестік унарлық предикатпен есептік-категориялық әбден о-минималдық теорияларының моделін байытылғанда инварианттық қасиеттер зерттеленеді. Әбден о-минималдық, есептік категориялық және дөңестік рангісі инварианттық қасиеттерге жататындығын дәлелденді.

Кілт сөздер: әлсіз о-минималдық, әбден о-минималдық, есептік категориялық, модельді байыту, дөңестік рангісі.