N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 6, Number 310 (2016), 113 – 119

D.S. Dzhumabaev[1,2], S.M. Temesheva[1,3]

[1]Institute of mathematics and mathematical modeling MES RK, Almaty, Kazakhstan;
[2]International information technology university, Almaty, Kazakhstan;
[3]Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Kazakhstan
dzhumabaev@list.ru, nur15@mail.ru

APPROXIMATION OF PROBLEM FOR FINDING THE BOUNDED SOLUTION TO SYSTEM OF NONLINEAR LOADED DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract. On the whole axis the system of nonlinear loaded differential equations is considered. The questions of existence and approximation bounded solution to the system are studied. The definition of «limit as $t \to \pm\infty$» solution to the system of nonlinear loaded differential equations is introduced. Sufficient conditions for the existence of bounded solution to the system of nonlinear loaded differential equations and convergence of the function sequence composed by the bounded solutions to the linearized system of loaded differential equations are obtained. Regular nonlinear two-point boundary value problem for the system of nonlinear loaded differential equations on the finite interval is constructed, which approximate the problem of finding bounded solutions to the original system of loaded differential equations. It is given an estimate of the difference between the solution to initial singular problem and the solution to the approximating regular two-point boundary value problem.

Key words: singular problem, nonlinear loaded differential equation, bounded solution, approximation.

УДК 517.956.223, 519.62

Д.С. Джумабаев[1,2], С.М. Темешева[1,3]

[1]Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан;
[2]Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан;
[3]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

АППРОКСИМАЦИЯ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ ОГРАНИЧЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Работа выполнена в рамках проекта № 4057/ГФ4 по грантовому финансированию МОН РК на 2015-2017 гг.

Аннотация. На всей оси рассматривается система нелинейных нагруженных дифференциальных уравнений. Исследуются вопросы существования и аппроксимации ограниченного решения рассматриваемой системы уравнений. Вводится определение «предельного при $t \to \pm\infty$» решения системы нелинейных нагруженных дифференциальных уравнений. Получены достаточные условия существования ограниченного решения системы нелинейных нагруженных дифференциальных уравнений и сходимости к нему последовательности функций, составленной с помощью ограниченных решений линеаризованной системы нагруженных дифференциальных уравнений. Построена регулярная нелинейная двухточечная краевая задача для системы нелинейных нагруженных дифференциальных уравнений на конечном интервале, аппроксимирующая задачу нахождения ограниченного решения исходной системы нагруженных дифференциальных уравнений. Установлена оценка разности между решением исходной сингулярной задачи и решением аппроксимирующей регулярной двухточечной краевой задачей.

Ключевые слова: сингулярная задача, нелинейное нагруженное дифференциальное уравнение, ограниченное решение, аппроксимация.

Вопросы существования и построения приближенных методов нахождения ограниченных на всей оси решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений рассмотрены многими авторами [1-11]. Различные задачи для нагруженных диффеернциальных уравнений и методы для их решений исследованы в [12-17].

В настоящей статье на $R=(-\infty,\infty)$ рассматривается нелинейное нагруженное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)+f_0(t,x(\theta_{-m}),x(\theta_{-m+1}),\dots,x(\theta_m)),\quad x\in R^n,\quad \|x\|=\max|x_i|, \tag{1}$$

где $f:R^{n+1}\to R^n$, $f_0:R^{2n+2}\to R^n$ непрерывны, $\theta_{-m}<\theta_{-m+1}<\ldots<\theta_0=0<\theta_1<\ldots<\theta_m$.

Целью работы является нахождение условий существования ограниченного на всей оси решения системы нелинейных нагруженных дифференциальных уравнений (1) и построение регулярных двухточечных краевых задач на конечном интервале, позволяющих с заданной точностью определить сужение этого решения на конечный интервал.

В работе [11] введено определение "предельного при $t\to\infty$" решения нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения и доказано, что, если система линеаризованная вдоль такого решения является экспоненциально дихотомичной на полуоси, то "предельное при $t\to\infty$" решение обладает притягивающим свойством. Этот результат позволил построить аппроксимирующие двухточечные краевые задачи на конечном интервале для сингулярных краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений на всей оси. Методы и результаты [11] применяются для нахождения условий существования ограниченных на всей оси решений уравнения (1) и для построения аппроксимирующих регулярных краевых задач на конечном интервале.

Используются следующие обозначения:

$\widetilde{C}(J,R^n)$ – пространство непрерывных и ограниченнных на $J\subseteq R$ функций $x:J\to R^n$ с нормой $\|x\|_1=\sup\limits_{t\in R}\|x(t)\|$; $C(J,R^n)$ – множество непрерывных на J функций;

$$S(x_0(t),J,r)=\{x(t)\in C(J,R^n):(x(t)-x_0(t))\in\widetilde{C}(J,R^n),\|x-x_0\|_1<r\},\text{ где } x_0(t)\in C(J,R^n);$$

$$G(x_0(t),J,r)=\{(t,x):t\in J,\ \|x-x_0(t)\|<r\};$$

$$G_0(x_0(t),J,r)=\{(t,v_{-m},\dots v_m):t\in J,\ \|v_k-x_0(\theta_k)\|<r,\ k=\overline{-m,m}\}.$$

Возьмем непрерывно дифференцируемую на R функцию $x_0(t)$ так, что

$$\left(\frac{d}{dt}x_0(t)-f(t,x_0(t))-f_0(t,x_0(\theta_{-m}),x_0(\theta_{-m+1}),\dots,x_0(\theta_m))\right)\in\widetilde{C}(R,R^n) \tag{2}$$

Ограниченное на R решение системы нагруженных дифференциальных уравнений (1) определяется как предел последовательности функций, составленной с помощью ограниченных на всей оси решений линеаризованных систем нагруженных дифференциальных уравнений. Поэтому рассмотрим линейное нагруженное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+\sum_{j=-m}^{m}A_j(t)x(\theta_j)+f(t),\quad x\in R^n,\quad t\in R, \tag{3}$$

где матрицы $A(t)$, $A_j(t)$ $(j=\overline{-m,m})$ и вектор-функция $f(t)$ непрерывны и ограничены на R. Ограниченное решение уравнения (3) называется решением задачи 1.

Определение 1. Задача 1 называется корректно разрешимой, если для любой непрерывной и ограниченной на R функции $f(t)\in C(R,R^n)$ уравнение (3) имеет единственное ограниченное на R решение $x^*(t)$ и выполняется неравенство $\|x^*\|_1\le\gamma\|f\|_1$, где константа γ не зависит от $f(t)$.

Определение 2. Непрерывно дифференцируемая на R функция $x_0(t)$ называется предельным при $t \to \mp\infty$ решением уравнения (1), если

$$\lim_{t\to\mp\infty} \| \dot{x}_0(t) - f(t, x_0(t)) - f_0(t, x_0(\theta_{-m}), x_0(\theta_{-m+1}), \dots, x_0(\theta_m)) \| = 0.$$

Пусть выполнены следующие условия:

(A). Функция $f(t,x)$ непрерывна и имеет равномерно непрерывную производную $\frac{\partial}{\partial x} f(t,x)$ в $G(x_0(t), R, r)$, где $x_0(t)$ – предельное при $t \to \mp\infty$ решение уравнения (1), и справедливы следующие предельные соотношения

$$\lim_{t\to-\infty} f(t,x) = f_-(x), \quad \lim_{t\to+\infty} f(t,x) = f_+(x) \tag{4}$$

$$\lim_{t\to-\infty} x_0(t) = x_-, \quad \lim_{t\to\infty} x_0(t) = x_+, \tag{5}$$

где x_-, x_+ являются решениями систем нелинейных уравнений $f_-(x) = 0$, $f_+(x) = 0$, соответственно.

(B). Функция $f_0(t, v_{-m}, \dots v_m)$ непрерывна и имеет равномерно непрерывные производные $\frac{\partial}{\partial v_k} f_0(t, v_{-m}, \dots v_m)$ $(k = \overline{-m,m})$ в $G_0(x_0(t), R, r)$ и для всех $(t, v_{-m}, \dots, v_m) \in G_0(x_0(t), R, r)$ имеют место соотношения

$$\sup_{t\in(-\infty,-T]} \| f_0(t, v_{-m}, \dots, v_m) \| \le \delta_0(-T), \quad \sup_{t\in[T,\infty)} \| f_0(t, v_{-m}, \dots, v_m) \| \le \delta_0(T),$$

$$\lim_{T\to\mp\infty} \delta_0(T) = 0, \quad \lim_{t\to\mp\infty} \left\| \frac{\partial}{\partial v_k} f_0(t, v_{-m}, \dots, v_m) \right\| = 0, \quad k = \overline{-m,m}.$$

(C). Задача 1 для линеаризованного нагруженного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} f(t, x_0(t)) y + \sum_{k=-m}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial v_k} f_0(t, v_{-m}, \dots, v_m) \Big|_{\substack{v_{-m}=x_0(\theta_{-m}) \\ \dots \\ v_m = x_0(\theta_m)}} \cdot J_{\theta_k} \right) y, \quad y \in R^n, \tag{6}$$

корректно разрешима, где $J_{\theta_k} y(t) = y(\theta_k)$, $k = \overline{-m,m}$.

(B). Функции $f_-(x)$, $f_+(x)$ в $S(x_-, r)$, $S(x_+, r)$ соответственно имеют производные $f'_-(x)$, $f'_+(x)$ и равномерно относительно x справедливы предельные соотношения

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(t,x) = f'_-(x), \qquad x \in S(x_-, r),$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(t,x) = f'_+(x), \qquad x \in S(x_+, r),$$

и $f'_\mp(x_\mp) = A_{(\mp)}$, $Re\,\xi_j^\mp \ne 0$, где $\xi_j^\mp$ - собственные значения матриц $A_{(\mp)}$, $j = \overline{1,n}$.

Теорема 1. Функции $f(t,x)$ и $f_0(t, v_{-m}, \dots v_m)$ непрерывны и имеют равномерно непрерывные производные $\frac{\partial}{\partial x} f(t,x)$ и $\frac{\partial}{\partial v_k} f_0(t, v_{-m}, \dots v_m)$ соответственно в $G(x_0(t), R, r)$ и $G_0(x_0(t), R, r)$. При любом $\hat{x}(t) \in S(x_0(t), R, r)$ задача 1 для линеаризованного нагруженного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\partial}{\partial x}f(t,\hat{x}(t))y+\sum_{k=-m}^{m}\left(\frac{\partial}{\partial v_k}f_0(t,v_{-m},\ldots,v_m)\Big|_{\substack{v_{-m}=\hat{x}(\theta_{-m})\\ \ldots\\ v_m=\hat{x}(\theta_m)}}\cdot J_{\theta_k}\right)y+\hat{f}(t),\quad y\in R^n,\quad t\in R,\quad (7)$$

корректно разрешима с константой γ.

Тогда при выполнении неравенства

$$\gamma\,\|\,\dot{x}_0(t)-f(t,x_0(t))-f_0(t,x_0(\theta_{-m}),x_0(\theta_{-m+1}),\ldots,x_0(\theta_m))\,\|_1<r$$

существует число $\alpha\geq 1$ такое, что последовательность непрерывно дифференцируемых на R функций

$$x_{n+1}(t)=x_n(t)+\Delta x_n(t),\quad n=0,1,\ldots,\quad (8)$$

где $\Delta x_n(t)$ – ограниченное на R решение линейного уравнения

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\partial}{\partial x}f(t,x_n(t))y+\sum_{k=-m}^{m}\left(\frac{\partial}{\partial v_k}f_0(t,v_{-m},\ldots,v_m)\Big|_{\substack{v_{-m}=x_n(\theta_{-m})\\ \ldots\\ v_m=x_n(\theta_m)}}\cdot J_{\theta_k}\right)y-$$

$$-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{d}{dt}x_n(t)-f(t,x_n(t))-f_0(t,x_n(\theta_{-m}),\ldots,x_n(\theta_m))\right),\quad y\in R^n,\quad t\in R,\quad (9)$$

по норме $\widetilde{C}(R,R^n)$ сходится к $x^*(t)$ решению уравнения (1) в $S(x_0(t),R,r)$.

Доказательство. В уравнении (1) сделаем замену $u=x-x_0(t)$, получим

$$\frac{du}{dt}=f(t,u+x_0(t))+f_0(t,u(\theta_{-m})+x_0(\theta_{-m}),\ldots,u(\theta_m)+x_0(\theta_m))-\frac{d}{dt}x_0(t),\quad u\in R^n,\quad t\in R,\ (10)$$

Задачу нахождения решения уравнения (10), принадлежащего шару $S(0,R,r)\subset\widetilde{C}(R,R^n)$ запишем в виде операторного уравнения

$$\mathrm{A}(u)\equiv Hu+F(u)=0,\quad u\in S(0,R,r),$$

где $H=\dfrac{d}{dt}$, $F(u)=-f(t,u(t)+x_0(t))-f_0(t,u(\theta_{-m})+x_0(\theta_{-m}),\ldots,u(\theta_m)+x_0(\theta_m))+\dfrac{d}{dt}x_0(t)$.

Учитывая, что корректная разрешимость с константой γ задачи 1 для уравнения (7) обеспечивает оценку $\|(H+F'(u))^{-1}\|_{L(Y,X)}\leq\gamma$ при всех $u\in S(0,R,r)$, а соотношения (8), (9) эквивалентны итерационному процессу (1.18) [11, с. 18], на основе теоремы 5 [11, с. 18] получаем утверждение теоремы.

Далее исследуются вопросы аппроксимации ограниченных на всей оси решений нелинейного нагруженного уравнения (1) решениями регулярных краевых задач на конечном интервале. Для этой цели рассматривается нелинейная двухточечная краевая задача для нагруженного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)+f_0(t,x(\theta_{-m}),x(\theta_{-m+1}),\ldots,x(\theta_m)),\quad t\in[-T,T],\quad x\in R^n,\quad (11)$$

$$P_1S_-f_-(x(-T))+P_2S_+f_+(x(T))=0.\quad (12)$$

Здесь S_-, S_+ – вещественные неособые $(n\times n)$ - матрицы, приводящие матрицы Якоби $f'_-(x_-)$, $f'_+(x_+)$ к обобщенно-жордановым формам

$$\widetilde{A}_-=S_-f'_-(x_-)S_-^{-1}=\begin{pmatrix}\widetilde{A}_{-,11} & 0\\ 0 & \widetilde{A}_{-,22}\end{pmatrix},\quad \widetilde{A}_+=S_+f'_+(x_+)S_+^{-1}=\begin{pmatrix}\widetilde{A}_{+,11} & 0\\ 0 & \widetilde{A}_{+,22}\end{pmatrix},$$

где $\widetilde{A}_{\mp,11}$ и $\widetilde{A}_{\mp,22}$ состоят из обобщенно-жордановых клеток, соответствующих собственным значениям матриц $f'_{\mp}(x_{\mp})$ с отрицательными и положительными действительными частями, число которых обозначим $n_1^{\mp}$ и $n_2^{\mp}$ соответственно. Введем $(n \times n)$-матрицы $P_1 = \begin{pmatrix} I_{n_1^-} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2^+} \end{pmatrix}$, где $I_{n_1^-}$, $I_{n_2^+}$ – единичные матрицы размерностей n_1^-, n_2^+ соответственно.

Сужение ограниченного на R решения $x^*(t)$ уравнения (1) на интервал $[-T,T]$ обозначается через $x_T^*(t)$ и вводится функциональный шар

$$S(x_T^*(t),[-T,T],\rho^*) = \{x(t) \in C([-T,T],\mathrm{R}^n) : \| x - x_T^* \|_{0,T} < \rho^*\}.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия (A)-(D) и $x^*(t) \in S(x^{(0)}(t),r)$ – ограниченное на R решение нелинейного нагруженного дифференциального уравнения (1). Тогда существуют числа $T_0 > 0$, $\rho^* > 0$ такие, что для всех $T \geq T_0$ регулярная двухточечная краевая задача (11), (12) в $S(x_T^*(t),[-T,T],\rho^*)$ имеет единственное решение $x_T(t)$, и справедлива оценка

$$\left\| x_T - x^* \right\|_{0,T} \leq 2\gamma \{ \| \mathrm{S}_- \| \cdot \left(\left\| f_-\left(x^*(-T)\right)\right\| + \delta_0(-T) \right) + \| \mathrm{S}_+ \| \cdot \left(\left\| f_+(x^*(T)) \right\| + \delta_0(T) \right) \}.$$

Доказательство. Нелинейную двухточечную краевую задачу (11), (12) запишем в виде операторного уравнения

$$Ax \equiv Hx + F(x) = 0, \tag{13}$$

где

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{dt} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} -f(t,x(t)) - f_0(t,x(\theta_{-m}),x(\theta_{-m+1}),\ldots,x(\theta_0),\ldots,x(\theta_m)) \\ P_1 S_- f_-(x(-T)) + P_2 S_+ f_+(x(T)) \end{pmatrix}.$$

Оператор A отображает банахово пространство $X = C([-T,T],R^n)$ с нормой $\| x \|_{0,T} = \max\limits_{t \in [-T,T]} \| x(t) \|$ в банахово пространство $Y = \widetilde{C}([-T,T],R^n) \dot{+} R^n$ с нормой $\| y \|_Y = \max\{\| f \|_{0,T}, \| d \|\}$.

Из условия теоремы следует существование $\rho_0 > 0$ такого, что $S(x^*(t),\rho_0) \subset S(x_0(t),r)$, а функции $f(t,x)$, $f_0(t,v_{-m},\ldots,v_m)$, $f_-(x)$, $f_+(x)$ имеют равномерно непрерывные производные: $f'_x(t,x)$, $\dfrac{\partial}{\partial v_k} f_0(t,v_{-m},\ldots,v_m)$ $(k = \overline{-m,m})$, $f'_-(x)$, $f'_+(x)$ в соответсвующих множествах. Отсюда вытекают существование и равномерная непрерывность производной Фреше $F'(x)$ в $S(x_T^*(t),[-T,T],\rho^*)$.

По условию (C) задача 1 для линеаризованного уравнения (7) корректно разрешима. Тогда из теоремы 1 следует существование $T_1 > 0$ такого, что линейная регулярная двухточечная краевая задача

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} f(t,x^*(t)) z + \sum_{k=-m}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial v_k} f_0(t,v_{-m},\ldots,v_m) \Big|_{\substack{v_{-m} = x^*(\theta_{-m}) \\ \cdots \\ v_m = x^*(\theta_m)}} \cdot J_{\theta_k} \right) z + \varphi(t), \quad t \in [-T,T], \quad z \in \mathrm{R}^n,$$

$$P_1 S_- f'_-(x^*(-T)) \cdot z(-T) + P_2 S_+ f'_+(x^*(T)) \cdot z(T) = \widetilde{d}, \quad \widetilde{d} \in \mathrm{R}^n,$$

для всех $T > T_1$ корректно разрешима с независящей от T константой K_1. Это эквивалентно обратимости линейного оператора $H + F'(x_T^*) : X \to Y$ и выполнению неравенства $\| (H + F'(x_T^*))^{-1} \|_{L(Y,X)} \le K_1$.

В качестве x_0 возьмем функцию $x_T^*(t)$ и к операторному уравнению (13)
применим теорему 6 [11, с. 18].
Первое условие теоремы выполняется с $\gamma_0 = K_1$.

Возьмем число $\varepsilon = \dfrac{1}{2K_1}$ и, в силу равномерной непрерывности производной Фреше, выберем $\rho_* \in (0, \rho_0]$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\| F'(x) - F'(x_0) \|_{L(X,Y)} \le \varepsilon = \frac{1}{2K_1}.$$

Тогда $\varepsilon\gamma_0 = \dfrac{1}{2K_1} \cdot K_1 = \dfrac{1}{2} < 1$ и так как

$$\| Hx_0 + F(x_0) \|_Y = \| P_1 S_- f_-(x^*(-T)) + P_2 S_+ f_+ \left(x^*(T)\right) \|$$

(здесь учитывается, что функция $x^*(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) при всех $t \in \mathrm{R}$), $\lim\limits_{t \to \mp\infty} x^*(t) = \hat{x}_\mp$, $f_-(\hat{x}_-) = 0$, $f_+(\hat{x}_+) = 0$, то выберем $T_0 > T_1$ такое, что

$$2K_1 \| Hx_0 + F(x_0) \|_Y < \rho_*.$$

Все условия теоремы 6 [11, с. 18] выполнены, откуда следует утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Далецкий Ю.А., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

[2] Конюхова Н.Б. К решению краевых задач на бесконечном интервале для некоторых нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 1970. - Т. 10, № 5. - С. 1150-1163.

[3] Конюхова Н.Б. Об итеративном решении нелинейных краевых задач, выделяющих малые решения некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 1974. - Т. 14, № 5. - С. 1221-1231.

[4] Мухамадиев Э. Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений // Матем. заметки. - 1981. - Т. 30, Вып. 3. - С. 4 3 3 - 460.

[5] Абрамов А.А., Конюхова Н.Б., Балла К. Устойчивые начальные многообразия и сингулярные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Comput. Math. Banach Center Publ. Warsaw: PWN Polish Scient. Publs. - 1984. -V. 13. - P. 319-351.

[6] Dzhumabaev D.S. Convergence of iterative methods for unbounded operator equations // Mathematical Notes. - 1987. - Vol. 41, No 5. - P.356-361.

[7] Dzhumabaev D.S. Approximation of a bounded solution and exponential dichotomy on the line // Computational Mathematics and Mathematical Physics. - 1990. - Vol.30, No 6. - P. 32-43.

[8] Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит. 1954. Ч. II.

[9] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир. 1970.

[10] Dzhumabaev D.S. Approximation of a bounded solution of a linear ordinary differential equation by solutions of two-point boundary value problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. - 1990. - Vol.30, No 2. - P. 34-45.

[11] Dzhumabaev D.S. Singular boundary value problems and their approximation for nonlinear ordinary differential equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. - 1992. - Vol. 32, No 1. - P. 10-24.

[12] Krall A.M. The development of general differential and general differential-boundary systems // Rocky mountain journal of mathematics. – 1975. – Vol. 5, - P. 493-542.

[13] Nakhushev A.M. Boundary value problems for loaded integral-differential equations of hyperbolic type and their applications to the soil moisture forecast // Differencial'nye Uravneniya. – 1979. – Vol. 15, - P. 96-105.

[14] Nakhushev A.M. On an approximate method of solving boundary value problems for differential equations and its applications to the dynamics of soil moisture and groundwater // Differencial'nye Uravneniya. – 1982. – V. 18, - P.72-81.

[15] Alikhanov A.A., Berezkov A.M., Shkhanukhov-Lafishev M.Kh. Boundary value problems for certain classes of loaded differential equations and solving them by finite difference methods // Comput. Math. Math. Phys. – 2008. – Vol. 48, - P. 1581-1590.

[16] Abdullaev V. M., Aida-zade K.R. Numerical method of solution to loaded nonlocal boundary value problems for ordinary differential equations // Comput. Math. Math. Phys. - 2014. – Vol. 54, - P. 1096-1109.

[17] Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. On the numerical solution of loaded systems of ordinary differential equations with nonseparated multipoint and integral conditions // Numer. Anal. Appl. – 2014. – Vol. 7, - P.1-14.

REFERENCES

[1] Daletskii Yu.A., Krein M.G. Ustoichivost' reshenii differentsial'nyh uravnenii v banahovom prostranstve. M.: Nauka, **1970.**

[2] Konyukhova N.B. K resheniyu kraevyh zadach na beskonechnom intervale dlia nekotoryh nelineinyh sistem obyknovennyh differentsial'nyh uravnenii s osobennoct'yu // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. **1970.** T. 10, № 5. S. 1150-1163.

[3] Konyukhova N.B. Ob iterativnom reshenii nelineinyh kraevyh zadach, vydeliayushih malye reshenia nekotoryh sistem obyknovennyh differentsial'nyh uravnenii s osobennoct'yu // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. **1974.** T. 14, № 5. S. 1221-1231.

[4] Muhamadiev E. Issledovania po teorii periodicheskih i ogranichennyh reshenii differentsial'nyh uravneniii // Matem. zametki. **1981**. T. 30, Vyp. 3. S.433- 460.

[5] Abramov A.A., Konyukhova N.B., Balla K. Ustoichivye nachal'nye mnogoobrazia i singuliarnye kraevye zadachi dlia sistem obyknovennyh differentsial'nyh uravnenii // Comput. Math. Banach Center Publ. Warsaw: PWN Polish Scient. Publs. **1984.** V. 13. P. 319-351.

[6] Dzhumabaev D.S. Convergence of iterative methods for unbounded operator equations // Mathematical Notes. **1987.** Vol. 41, No 5. P.356-361.

[7] Dzhumabaev D.S. Approximation of a bounded solution and exponential dichotomy on the line // Computational Mathematics and Mathematical Physics. **1990**. Vol.30, No 6. P. 32-43.

[8] Sansone Dzh. Ordinary differential equations. M.: Izd-vo inostr. lit. **1954.** V. II.

[9] Hartman F. Ordinary differential equations. M.: Mir. **1970.**

[10] Dzhumabaev D.S. Approximation of a bounded solution of a linear ordinary differential equation by solutions of two-point boundary value problems //Computational Mathematics and Mathematical Physics. **1990**. Vol.30, No 2. P. 34-45.

[11] Dzhumabaev D.S. Singular boundary value problems and their approximation for nonlinear ordinary differential equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. **1992.** Vol. 32, No 1. P. 10-24.

[12] Krall A.M. The development of general differential and general differential-boundary systems // Rocky mountain journal of mathematics. **1975.** Vol. 5, P. 493-542.

[13] Nakhushev A.M. Boundary value problems for loaded integral-differential equations of hyperbolic type and their applications to the soil moisture forecast // Differencial'nye Uravneniya. **1979.** Vol. 15, P. 96-105.

[14] Nakhushev A.M. On an approximate method of solving boundary value problems for differential equations and its applications to the dynamics of soil moisture and groundwater // Differencial'nye Uravneniya. **1982**. Vol. 18, P.72-81.

[15] Alikhanov A.A., Berezkov A.M., Shkhanukhov-Lafishev M.Kh. Boundary value problems for certain classes of loaded differential equations and solving them by finite difference methods // Comput. Math. Math. Phys. 2008. Vol. 48, P. 1581-1590.

[16] Abdullaev V. M., Aida-zade K.R. Numerical method of solution to loaded nonlocal boundary value problems for ordinary differential equations // Comput. Math. Math. Phys. **2014.** Vol. 54, P. 1096-1109.

[17] Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. On the numerical solution of loaded systems of ordinary differential equations with nonseparated multipoint and integral conditions // Numer. Anal. Appl. **2014.** Vol. 7, P.1-14.

ӘОЖ: 517.956.223, 519.62

Д.С. Жұмабаев[1,2], С.М. Темешева[1,3]

[1]ҚР БҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы қ., Қазақстан,
[2]Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, Алматы қ., Қазақстан,
[3]Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

СЫЗЫҚСЫЗ ЖҮКТЕЛГЕН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІНІҢ БҮКІЛ ӨСТЕ ШЕКТЕЛГЕН ШЕШІМІН ТАБУ ЕСЕБІНІҢ АППРОКСИМАЦИЯСЫ

Аннотация. Сызықсыз жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі бүкіл өсте қарастырылады. Қарастырылып отырған теңдеулер жүйесінің шектелген шешімінің бар болуы мен оны аппроксимациялау мәселелері зерттеледі. Сызықсыз жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесінің «$t \to \pm\infty$ болғандағы шекті» шешімінің анықтамасы енгізіледі. Сызықсыз жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шектелген шешімінің бар болуының және сызықтандырылған жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шектелген шешімдері көмегімен құрылған функциялар тізбегінің осы шешімге жинақтылығының жеткілікті шарттары алынған. Жүктелген дифференциалдық теңдеулердің бастапқы жүйесінің шектелген шешімін табу есебін аппроксимациялайтын ақырлы аралықтағы сызықсыз жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін регулярлы сызықсыз екінүктелі шеттік есеп тұрғызылған. Бастапқы сингулярлы есептің шешімі мен аппроксимациялаушы регулярлы екінүктелі шеттік есептің шешімінің арасындағы айырманың бағалауы тағайындалған.

Түйін сөздер: сингулярлы есеп, сызықсыз жүктелген дифференциалдық теңдеу, шектелген шешім, аппроксимациялау.